Analisi Matematica II (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (13/07/2009)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO SF / SA

1. Studiare l'integrabilità generalizzata di $f_\alpha(x) = \dfrac{x^{2\alpha}\,\operatorname{arctg}(x^{\alpha-1}-1)}{|\,1-|\log x|\,|^\alpha}$, e calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,dx$.

2. Sono date le equazioni differenziali (i) $2\arcsin(x-yy') = x^2$, (ii) $y''-\cos x = x-\alpha y$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$).

(a) Studiare la crescenza delle soluzioni di (i); mostrare che, se $\varphi(x)$ è soluzione, lo è pure $-\varphi(x)$.

(b) Cercare, tra le soluzioni di (i) e le soluzioni di (ii), quelle per cui $y(0) = -2$.

3. Sia $f(x,y) = \dfrac{x+2y+1}{\sqrt{xy+1}}$.

(a) Trovare dominio, zeri, segno e limiti notevoli di f; descrivere le curve di livello di f.

(b) Dire quali curve di livello di f sono regolari; detta X quella passante per $A(0,2)$, calcolare in due modi diversi la retta affine tangente a X in A. Preso poi un tratto di X attorno A sufficientemente piccolo, scrivere una formula che ne calcoli la lunghezza.

(c) Disegnare $\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |2x-y| \le 2,\ |y-1| \le 3\}$, spiegare perché f ha estremi assoluti su $\mathcal{P}$, e calcolarli.

4. Sia $g(x,y,z) = (g_1,g_2,g_3)(x,y,z) = (\,\log(y-z)\,,\ z^2-2x\,,\ x+y\,)$.

(a) Dire quali superfici di livello di $h(x,y,z) = y - x^2\,g_1(x,y,z)$ sono regolari; parametrizzare quella per $A(0,3,0)$ al suo intorno, e calcolarne in due modi il piano tangente affine.

(b) Quali curve di livello di (g_1,g_2) sono regolari? Detta Y quella passante per A, determinarne eventuali estremi locali per la direzione x.

(c) Dire all'intorno di quali punti del suo dominio la funzione g è diffeomorfismo locale; dedurne che g non è diffeomorfismo globale, cercando se possibile un argomento più diretto per mostrare quest'ultima cosa. Infine, scrivere lo sviluppo al primo ordine dell'inversa locale di g in A, cercando poi di calcolarla esplicitamente.

Analisi Matematica II – Esame Scritto (13/07/2009) – Soluzioni.

1. La funzione $f_\alpha(x) = \frac{x^{2\alpha}\,\text{arctg}\,(x^{\alpha-1}-1)}{|\,1-|\log x|\,|^\alpha}$ è definita per $x>0$ con $x\neq\frac{1}{e}$ e $x\neq e$: dunque l'integrabilità va vista in 0^+, $\frac{1}{e}^\mp$, $e^\mp$ e $+\infty$. Notiamo fin da subito che per $\alpha=1$ la funzione è identicamente nulla, dunque banalmente integrabile; nel seguito supporremo che $\alpha\neq 1$. • In 0^+, per ogni $\alpha\neq 1$ si ha $\text{arctg}\,(x^{\alpha-1}-1)\sim_0^* 1$, e dunque $f_\alpha(x)\sim_0^* x^{2\alpha}|\log x|^{-\alpha}$: ricordando che $x^\beta|\log x|^\gamma$ è integrabile in 0^+ se e solo se $\beta>-1$ per ogni γ, oppure se $\beta=-1$ e $\gamma<-1$, si ha la condizione $\alpha>-\frac{1}{2}$. • Vediamo ora in $e^\mp$. Essendo $1-\log x\sim_e^*(x-e)$ (basta calcolare il limite del rapporto), si ha $f_\alpha(x)\sim_e^*(x-e)^{-\alpha}$, da cui la condizione $-\alpha>-1$, ovvero $\alpha<1$. Lo stesso ragionamento vale per $\frac{1}{e}$. • In $+\infty$ tutto è simile a 0: anche qui per ogni $\alpha\neq 1$ si ha $\text{arctg}\,(x^{\alpha-1}-1)\sim_0^* 1$, e dunque $f_\alpha(x)\sim_0^* x^{2\alpha}|\log x|^{-\alpha}$. Ricordando che $x^\beta|\log x|^\gamma$ è integrabile in $+\infty$ se e solo se $\beta<-1$ per ogni γ, oppure se $\beta=-1$ e $\gamma<-1$, si ha la condizione $\alpha<-\frac{1}{2}$. • Da quanto detto prima, l'integrale proposto $\int_0^1 f_0(x)\,dx=\int_0^1\text{arctg}\,(\frac{1}{x}-1)\,dx$ converge (il valore costante 1 del denominatore è ovviamente estendibile anche al punto singolare $\frac{1}{e}\in\,]0,1[\,$), e avrà valore positivo. Ponendo $\frac{1}{x}-1=t$ (ovvero $x=\frac{1}{t+1}$, da cui $dx=-\frac{1}{(t+1)^2}\,dt$) si ottiene $\int\text{arctg}\,(\frac{1}{x}-1)\,dx=-\int\frac{\text{arctg}\,t}{(t+1)^2}\,dt=\frac{\text{arctg}\,t}{t+1}-\int\frac{1}{(t+1)(t^2+1)}\,dt=\frac{\text{arctg}\,t}{t+1}-\frac{1}{2}\int(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1})\,dt=\frac{\text{arctg}\,t}{t+1}+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{t^2+1}}{t+1}-\frac{1}{2}\text{arctg}\,t$, e pertanto $\int_0^1\text{arctg}\,(\frac{1}{x}-1)\,dx=(\frac{\text{arctg}\,t}{t+1}+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{t^2+1}}{t+1}-\frac{1}{2}\text{arctg}\,t]_{+\infty}^0=(0)-(-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$.

2. (a) L'equazione $2\arcsin(x-yy')=x^2$ equivale a $x-yy'=\sin\frac{x^2}{2}$, ovvero $yy'=x-\sin\frac{x^2}{2}$, con la condizione $|\frac{x^2}{2}|\leq\frac{\pi}{2}$, cioè $|x|\leq\sqrt{\pi}$. Se una soluzione $y(x)$ si annullasse in un certo x_0 si avrebbe necessariamente $x_0=\sin\frac{x_0^2}{2}$, il che accade se e solo se $x_0=0$ (un confronto grafico tra le funzioni x e $\sin\frac{x^2}{2}$ mostra abbastanza chiaramente che $x\geq\sin\frac{x^2}{2}$ se e solo se $x\geq 0$, con uguaglianza solamente in $x=0$). Altrove si ricava $y'=\frac{x-\sin\frac{x^2}{2}}{y}$, dunque le soluzioni di (i) sono strettamente crescenti nel 1o e 3o quadrante e decrescenti nel 2o e 4o; per $x=0$ si ottiene $y(0)\,y'(0)=0$ e dunque, se $y(0)\neq 0$, il punto $x=0$ sarà stazionario per la soluzione, e più precisamente di minimo/massimo assoluto se $y(0)\gtrless 0$. Infine, sia $\varphi(x)$ una soluzione di (i): posta $\psi(x):=-\varphi(x)$, essendo $\psi'(x)=-\varphi'(x)$ si ricava che $2\arcsin(x-\psi(x)\,\psi'(x))=2\arcsin(x-(-\varphi(x))(-\varphi'(x)))=2\arcsin(x-\varphi(x)\,\varphi'(x))=x^2$, in altre parole anche $\psi(x)$ è soluzione di (i).

(b) (i) Separando le variabili e integrando tra 0 e x con la condizione $y(0)=-2$ si ha $\int_{-2}^{y(x)}\eta\,d\eta=\int_0^x(t-\sin(\frac{t^2}{2}))\,dt$, ovvero $\frac{y^2}{2}-2=\frac{x^2}{2}-\int_0^x\sin(\frac{t^2}{2})\,dt$; ricavando $y(x)$ si ottiene l'unica soluzione $y(x)=-\sqrt{4+x^2-2\int_0^x\sin(\frac{t^2}{2})\,dt}$. (ii) Da $y''-\cos x=x-\alpha y$ si ricava $y''+\alpha y=x+\cos x$, che è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. • Se $\alpha>0$ l'omogenea ha soluzioni del tipo $y(x)=A\cos(\sqrt{\alpha}\,x)+B\sin(\sqrt{\alpha}\,x)$. Una soluzione particolare per $b_1(x)=x$ è $\tilde{y}_1(x)=\frac{1}{\alpha}x$; quanto a $b_2(x)=\cos x$, se $\alpha\neq 1$ si ha $\tilde{y}_2(x)=\frac{1}{\alpha-1}\cos x$, mentre se $\alpha=1$ si ha $\tilde{y}_2(x)=\frac{1}{2}x\sin x$. L'integrale generale per $\alpha>0$ e $\alpha\neq 1$ è dunque $y(x)=A\cos(\sqrt{\alpha}\,x)+B\sin(\sqrt{\alpha}\,x)+\frac{1}{\alpha}x+\frac{1}{\alpha-1}\cos x$, e imponendo $y(0)=-2$ si ottiene $A+\frac{1}{\alpha-1}=-2$, ovvero $A=-\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}$; nel caso particolare $\alpha=1$ si ha $y(x)=A\cos x+(B+\frac{1}{2}x)\sin x+x$, e imponendo $y(0)=-2$ si ottiene $A=-2$. • Se $\alpha=0$ l'equazione $y''=x+\cos x$ si integra direttamente, dando prima $y'=\frac{1}{2}x^2+\sin x+U$ e poi $y(x)=\frac{1}{6}x^3-\cos x+Ux+V$, e imponendo $y(0)=-2$ si ottiene $-2=-1+V$, ovvero $V=-1$. • Se infine $\alpha<0$ l'omogenea ha soluzioni del tipo $y(x)=A\,e^{\sqrt{-\alpha}\,x}+B\,e^{-\sqrt{-\alpha}\,x}$. Una soluzione particolare per $b_1(x)=x$ è, come prima, $\tilde{y}_1(x)=\frac{1}{\alpha}x$; e, sempre come prima, una per $b_2(x)=\cos x$ è $\tilde{y}_2(x)=\frac{1}{\alpha-1}\cos x$. L'integrale generale per $\alpha<0$ è dunque $y(x)=A\,e^{\sqrt{-\alpha}\,x}+B\,e^{-\sqrt{-\alpha}\,x}+\frac{1}{\alpha}x+\frac{1}{\alpha-1}\cos x$, e imponendo $y(0)=-2$ si ottiene $A+B+\frac{1}{\alpha-1}=-2$, ovvero $A+B=-\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}$.

3. (a) (Figura 1) Il dominio di $f(x,y)=\frac{x+2y+1}{\sqrt{xy+1}}$ è dato da $xy+1>0$ (i punti compresi tra i rami –esclusi– dell'iperbole equilatera I d'equazione $xy=-1$); la funzione si annulla sui punti del dominio che stanno sulla retta r data da $x+2y+1=0$, ed è positiva sopra. I limiti notevoli di f sono nei punti di I e in ∞_2. Nei punti di I diversi da $P(-2,\frac{1}{2})$ e $Q(1,-1)$ (che sono le intersezioni tra I e r) il limite è $+\infty$ (se sopra r) o $-\infty$ (se sotto), mentre in P e Q il limite non esiste (tendendovi lungo r la funzione è nulla, mentre al loro intorno vi sono altri punti di I in cui f diverge a $\mp\infty$); quanto poi a ∞_2, limite non esiste (lungo l'asse x la funzione tende a $\mp\infty$ e sulla bisettrice $y=x$ la funzione vale $f(x,x)=\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ e dunque tende a ∓ 3). Passiamo ora alle curve di livello $X_\alpha=\{(x,y):f(x,y)=\alpha\}$. Iniziamo notando che se $\alpha\gtrless 0$ la curva deve stare sopra/sotto la retta r, mentre se $\alpha=0$ è proprio r (anzi, per meglio dire, il tratto di r che sta nel dominio). Da $f(x,y)=\alpha$ si ricava poi (tenendo presente quanto detto prima sulla posizione relativa a r) che $(x+2y+1)^2=\alpha^2(xy+1)$, ovvero $x^2+(4-\alpha^2)xy+4y^2+2x+4y+1-\alpha^2=0$: questa è l'equazione di una conica, più precisamente di un'ellisse quando $\Delta=(4-\alpha^2)^2-16=\alpha^2(\alpha^2-8)<0$ (cioè per $|\alpha|<2\sqrt{2}$), una parabola quando $\Delta=0$ (cioè —a parte il caso degenere $\alpha=0$ in cui si trova r— per $|\alpha|=2\sqrt{2}$) e un'iperbole quando $\Delta>0$ (cioè per $|\alpha|>2\sqrt{2}$). In realtà tutte le coniche con queste equazioni cartesiane passano per i punti P e Q (infatti l'equazione è identicamente soddisfatta in essi per ogni α), e X_α è la parte di loro che sta sopra/sotto la retta r, a seconda che sia $\alpha\gtrless 0$.

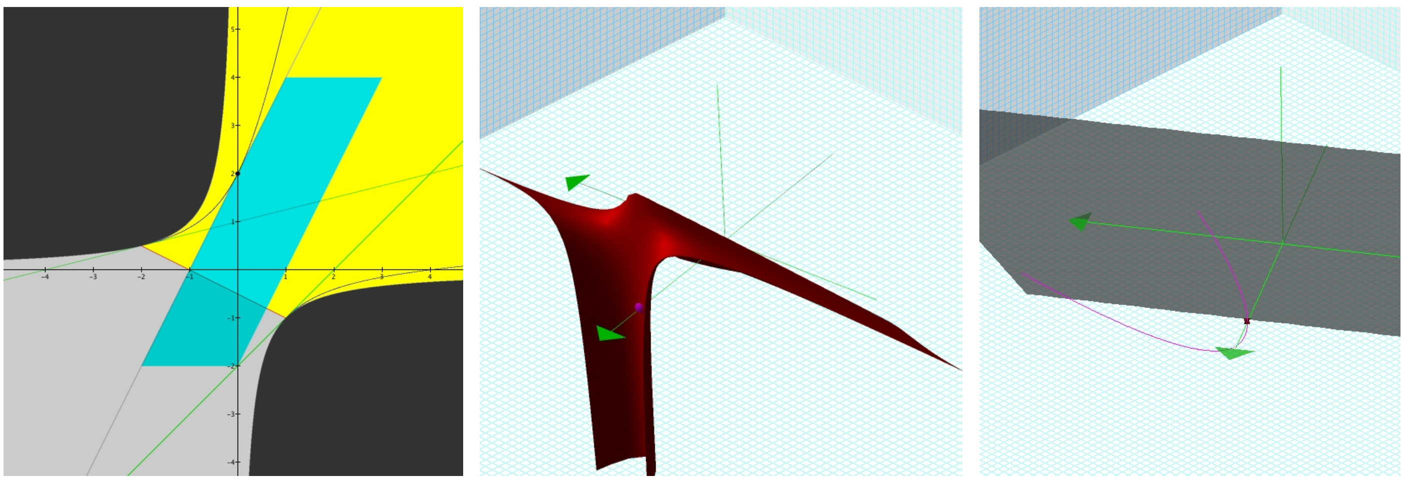
(b) (Figura 1) Il gradiente $\nabla f = (\frac{xy+2-2y^2-y}{2(xy+1)^{3/2}}, \frac{2xy+4-x^2-x}{2(xy+1)^{3/2}})$ si annulla quando $xy+2-2y^2-y = 2(xy+2)-x^2-x = 0$. Confrontando le due espressioni si ottiene $2(xy+2) = 4y^2+2y = x^2+x$; la seconda uguaglianza dà $x-2y = -(x^2-4y^2)$, da cui $x-2y = -(x+2y)(x-2y)$, ovvero $(x-2y)(x+2y+1) = 0$, da cui $x = 2y$ oppure $x = -2y-1$, e mettendo queste relazioni in $xy+2 = 2y^2+y$, nel primo caso si trova il punto $R(4,2)$ (accettabile perché nel dominio), mentre nel secondo rispuntano i due punti P e Q (no). Pertanto tutte le curve di livello di f sono regolari tranne quella che contiene R, ovvero X_3: in realtà X_3 è una conica degenere (la sua equazione $x^2-5xy+4y^2+2x+4y-8 = 0$ si spezza in $(x-4y+4)(x-y-2) = 0$, dunque si tratta di un'iperbole degenerata nell'unione delle due rette $x-4y+4 = 0$ e $x-y-2 = 0$, il punto d'intersezione delle quali è —guarda caso— il punto R). In particolare $X = X_5$ è regolare nel suo punto $A(0,2)$, ed essendo $\nabla f(A) = (-4,2)$, ricaviamo subito la retta affine tangente con $(-4,2)\cdot(x-0,y-2) = 0$, ovvero $2x-y+2 = 0$; alternativamente, per Dini, all'intorno di A da $f(x,y) = 5$ possiamo esplicitare $y(x) = 2+(-\frac{-4}{2})(x-0)+o_0(x-0)$, e lo sviluppo al 1o ordine ridà la retta trovata. Con questa parametrizzazione di X, valida per $|x| < \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo (ovvero $\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}^2$, $\gamma(x) = (x,y(x))$) possiamo rispondere anche all'ultima domanda: la lunghezza del tratto di X parametrizzato da questa γ sarà $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$. In questo caso possiamo scrivere esplicitamente chi è $y(x)$: da $x^2-21xy+4y^2+2x+4y-24 = 0$ si ricava $y(x) = \frac{1}{8}(21x-4+5\sqrt{17x^2-8x+16})$, che è una funzione con dominio $\mathbb{R}$, ovvero questa $y(x)$ parametrizza in realtà tutto il ramo dell'iperbole X che passa per A, dunque possiamo usarla per calcolare la lunghezza di un qualsiasi tratto limitato di tale ramo.

(c) (Figura 1) L'insieme $\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |2x-y| \le 2,\ |y-1| \le 3\}$ è il parallelogramma (chiuso e pieno) di vertici $B(-2,-2)$, $C(1,4)$, $D(3,4)$ e $E(0,-2)$: si tratta di un compatto interamente contenuto nel dominio di f, che è continua, e dunque f ha estremi assoluti su $\mathcal{P}$ in base a Weierstrass. Per il calcolo degli estremi di f su $\mathcal{P}$ decomponiamo quest'ultimo nell'unione disgiunta dei suoi punti interni (aperto di $\mathbb{R}^2$), dei suoi quattro lati senza vertici (quattro curve regolari) e dei suoi quattro vertici. Per quanto riguarda i punti interni, l'unico punto stazionario di f è come visto $R(4,2)$, che però non sta in $\mathcal{P}$. Sul lato BC si ha $f(x,2x+2) = \frac{5(x+1)}{\sqrt{2x^2+2x+1}}$ con $-2 < x < 1$, ed essendo $f(x,2x+2)' = -\frac{5x}{(2x^2+2x+1)^{3/2}} = 0$ per $x = 0$, ritroviamo il noto punto $A(0,2)$. Sul lato CD si ha $f(x,4) = \frac{x+9}{\sqrt{4x+1}}$ con $1 < x < 3$, e vale $f(x,4)' = \frac{2x-17}{(4x+1)^{3/2}} = 0$ per $x = \frac{17}{2}$ (non accettabile). Sul lato DE si ha $f(x,2x-2) = \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2-2x+1}}$ con $0 < x < 3$, la cui derivata $f(x,2x-2)' = \frac{x+2}{(2x^2-2x+1)^{3/2}}$ si annulla in $x = -2$ (non accettabile). Sul lato EB si ha $f(x,-2) = \frac{x-3}{\sqrt{1-2x}}$ con $-2 < x < 0$, e vale $f(x,-2)' = -\frac{x+2}{(1-2x)^{3/2}} = 0$ nell'estremo $x = -2$ (non accettabile). La questione degli estremi di f su $\mathcal{P}$ si gioca pertanto tra i punti A, B, C, D e E: essendo $f(A) = 5$, $f(B) = -\sqrt{5} \sim 2{,}2$, $f(C) = 2\sqrt{5} \sim 4{,}5$, $f(D) = \frac{12}{\sqrt{13}} \sim 3{,}3$ e $f(E) = -3$, ne ricaviamo che il massimo assoluto di f su $\mathcal{P}$ è 5 (assunto in A) e il minimo assoluto è -3 (assunto in E).

4. (a) (Figura 2) Il gradiente di $h(x,y,z) = y - x^2\log(y-z)$ è $\nabla h = (-2x\log(y-z)\,,\, 1-\frac{x^2}{y-z}\,,\, \frac{x^2}{y-z})$, e non si annulla mai: dunque tutte le superfici di livello di h sono regolari. Quella passante per $A(0,3,0)$ è di livello $h(A) = 3$; essendo $\nabla h(A) = (0,1,0)$, per Dini da $h(x,y,z) = 3$ si può esplicitare localmente $y(x,z)$, con $y(0,0) = 3$ e $\nabla y(0,0) = (0,0)$, da cui $y(x,z) = 3 + o(\sqrt{x^2+z^2})$, e il piano tangente affine è $y = 3$, come si nota in figura. Alternativamente, da $\nabla h(A)\cdot(x-0,y-3,z-0) = 0$ si riottiene lo stesso risultato.

(b) (Figura 3) Lo jacobiano di (g_1,g_2), ovvero $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y-z} & -\frac{1}{y-z} \\ -2 & 0 & 2z \end{pmatrix}$, ha sempre rango 2: dunque tutte le curve di livello sono regolari. Quella passante per A è $Y = \{(x,y,z) : (g_1,g_2) = (\log 3, 0)\}$: usando il metodo di Lagrange, si tratta di risolvere il sistema dato dal vincolo e da $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y-z} & -\frac{1}{y-z} \\ -2 & 0 & 2z \end{pmatrix} = 0$, cioè $\begin{cases} \frac{2z}{y-z} = 0 \\ \log(y-z) = \log 3 \\ z^2 - 2x = 0 \end{cases}$, la cui unica soluzione è il già noto punto $A(0,3,0)$. Per determinarne la natura bisogna prima parametrizzare Y attorno A, e lo jacobiano di (g_1,g_2) in A, ovvero $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ci dice che si può esplicitare localmente $(x(z),y(z))$ con $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ci serviranno però anche le derivate seconde, pertanto partiamo dal sistema che definisce Y, ovvero $\begin{cases} y-z = 3 \\ z^2-2x = 0 \end{cases}$: derivando due volte rispetto z si ottiene $\begin{cases} y'-1 = 0 \\ 2z-2x' = 0 \end{cases}$ (da cui nuovamente $\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) e $\begin{cases} y'' = 0 \\ 2-2x'' = 0 \end{cases}$, da cui $\begin{pmatrix} x''(0) \\ y''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Componendo la coordinata x (ovvero la funzione $f(x,y,z) = x$) con la parametrizzazione $(x(z),y(z),z)$ si ottiene semplicemente $F(z) := f(x(z),y(z),z) = x(z)$, dunque le derivate di F sono le stesse di x. Ne ricaviamo che il punto A è di minimo locale per la direzione x su Y, come la figura mostra chiaramente.

(c) Si ha $\det \mathsf{J}_g(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y-z} & -\frac{1}{y-z} \\ -2 & 0 & 2z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{2(z+1)}{y-z}$, dunque g è diffeomorfismo locale in tutti i punti del suo dominio tranne quelli con $z = -1$. Ciò mostra *a fortiori* che g non è diffeomorfismo globale. Volendo procedere, per quest'ultima cosa, con un argomento più diretto, proviamo a vedere se ad esempio g non sia iniettiva: ponendo $g(x_1,y_1,z_1) = g(x_2,y_2,z_2)$ si ottiene $\begin{cases} y_1-z_1 = y_2-z_2 \\ z_1^2-2x_1 = z_2^2-2x_2 \\ x_1+y_1 = x_2+y_2 \end{cases}$, da cui $\begin{cases} y_1-y_2 = z_1-z_2 \\ 2(x_1-x_2) = -(z_1-z_2)(z_1+z_2) \\ x_1-x_2 = -(y_1-y_2) \end{cases}$; posto $u := x_1-x_2 = -(y_1-y_2) = -(z_1-z_2)$, se $u = 0$ le equazioni sono tutte soddisfatte (ma questo è il caso dell'uguaglianza), mentre se fosse $u \neq 0$ dalla seconda si otterrebbe $z_1 + z_2 = -2$. Pertanto due punti (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) tali che $x_1 - x_2 = -(y_1 - y_2) = -(z_1 - z_2)$ e che $z_1 + z_2 = -2$ avranno la stessa immagine tramite g, e di punti simili nel dominio se ne trovano facilmente, ad esempio il nostro $A(0, 3, 0)$ e $A'(2, 1, -2)$. Dunque g non è iniettiva, e ancora una volta *a fortiori* non è diffeomorfismo globale. • Si ha $\mathsf{J}_g(A) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; la funzione ℓ, inversa locale di g all'intorno di A, sarà definita in un intorno di $g(A) = B(\log 3, 0, 3)$, si avrà ovviamente $\ell(B) = A$ e, come sappiamo, varrà $\mathsf{J}_\ell(B) = \mathsf{J}_g(A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -3 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$: pertanto, dette (u, v, w) le variabili del codominio di g (dunque del dominio di ℓ), lo sviluppo richiesto è $\ell(u, v, w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -3 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - \log 3 \\ v - 0 \\ w - 3 \end{pmatrix} + \cdots = \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{2}v + \cdots \\ 3 + \frac{1}{2}v + (w-3) + \cdots \\ 0 - 3(u - \log 3) + \frac{1}{2}v + (w-3) + \cdots \end{pmatrix}$. Infine, proviamo a invertire $(u, v, w) = g(x, y, z) = (\log(y-z)\,,\ z^2 - 2x\,,\ x+y)$ tenendo presente di trovarci nei paraggi di $A(0, 3, 0)$: mettendo $x = \frac{1}{2}(z^2 - v)$ e $y = z + e^u$ in $x + y = w$ si ottiene $z^2 + 2z + (2e^u - v - 2w) = 0$, da cui $z = -1 + \sqrt{1 - 8e^u + 4v + 8w}$ (essendo $z_A = 0$, la soluzione col meno è spuria), e perciò $x = \frac{1}{2}(z^2 - v) = 1 - 4e^u + \frac{3}{2}v + 4w - \sqrt{1 - 8e^u + 4v + 8w}$ e $y = z + e^u = -1 + e^u + \sqrt{1 - 8e^u + 4v + 8w}$. L'espressione esplicita dell'inversa locale ℓ è perciò $\ell(u, v, w) = (1 - 4e^u + \frac{3}{2}v + 4w - \sqrt{1 - 8e^u + 4v + 8w}\,,\ -1 + e^u + \sqrt{1 - 8e^u + 4v + 8w}\,,\ -1 + \sqrt{1 - 8e^u + 4v + 8w})$.



1. Esercizio 3: si notino la curva X per A (l'iperbole blu) e la curva di livello degenere (verde). **2.** La superficie di livello di h per A dell'esercizio 4(a) (il punto è porpora). **3.** La curva Y dell'esercizio 4(b) è in porpora, il suo punto A è rosso. Il piano grigio è quello che delimita il dominio di g.