Analisi Matematica II (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (08/09/2009)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO SF / SA

1. Studiare in $]0,\pi[$ l'integrabilità gen. di $f_\alpha(x) = \dfrac{x^\alpha\ |x-1|^{1-\alpha}\ \sin^{2-\alpha}(x)}{(1-\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}}$, e calcolare $\displaystyle\int_0^\pi f_1(x)\,dx$.

2. Trovare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $\alpha y'' - (\alpha^3+1)y' + \alpha^2 y = x - e^x$ che hanno un punto stazionario in $x = 0$.

3. Sia $f(x,y) = e^{x-2y} - x - y^2$.

(a) Dire quali curve di livello di f sono regolari; considerata quella passante per $A(-1,-1)$, calcolarne in due modi diversi la retta affine tangente in tale punto.

(b) f ha estremi locali/globali in $\mathbb{R}^2$? E su $\mathrm{P} = \{(x,y) : 0 \le y - x \le 2\,,\ -2 \le y \le 0\}$?

(c) Trovare eventuali estremità locali in direzione verticale per la curva di livello 1.

4. Sia $g(x,y,z) = \sqrt{y^2 - 2xz} - xyz$.

(a) Dire quali superfici di livello di g sono regolari; parametrizzare quella per $A(0,1,-1)$ al suo intorno, e calcolarne in due modi il piano tangente affine.

(b) Dal sistema $\begin{cases} g(x,y,z) = 1 \\ x^2 = \log(z-y) \end{cases}$ si vorrebbero esplicitare, vicino alla soluzione $B(0,-1,0)$, due variabili in funzione della rimanente. Dire in quali modi ciò è possibile e, scelto uno di questi, calcolare lo sviluppo fino al II ordine di tali funzioni implicite.

(c) Il sistema del punto precedente definisce anche una curva ℓ in $\mathbb{R}^3$. Con quanto trovato prima, è possibile calcolare la retta tangente affine a ℓ in B in due modi diversi?

Analisi Matematica II – Esame Scritto (08/09/2009) – Soluzioni.

1. In $]0,\pi[$ la funzione $f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha\ |x-1|^{1-\alpha}\ \sin^{2-\alpha}(x)}{(1-\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}}$ è definita e continua tranne che eventualmente per $x=1$: dunque l'integrabilità va vista in 0^+, $1^\mp$ e π^-. • In 0^+ si ha $\sin x \sim_{0+} x$ e $1-\cos x \sim^*_{0+} x^2$, dunque $f_\alpha(x) \sim^*_0 \frac{x^\alpha x^{2-\alpha}}{x^{2\frac{\alpha}{2}}} = x^{2-\alpha}$, da cui la condizione $2-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < 3$. • In $1^\mp$ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_1 |x-1|^{1-\alpha}$, da cui la condizione $1-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < 2$. • In π^- si ha $\sin x \sim_{\pi^-} (\pi - x)$ (basta fare il limite del rapporto), dunque $f_\alpha(x) \sim^*_{\pi^-} (\pi-x)^{2-\alpha}$, da cui ancora la condizione $2-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < 3$. • Da quanto detto prima, l'integrale proposto $\int_0^\pi f_1(x)\,dx = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx$ converge, e avrà valore positivo. Integrando per parti e ricordando che $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ (positivo in $]0,\pi[$) si ha $\int \frac{x\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx = x\,2\sqrt{1-\cos x} - \int 2\sqrt{1-\cos x}\,dx = 2x\sqrt{1-\cos x} - 2\sqrt{2}\int \sin\frac{x}{2}\,dx = 2x\sqrt{1-\cos x} + 4\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} + k$, per cui il nostro integrale vale $(2x\sqrt{1-\cos x} + 4\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}]_0^\pi = (2\sqrt{2}\,\pi + 0) - (0 + 4\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}(\pi - 2) \sim 3{,}2$.

2. L'equazione $\alpha y'' - (\alpha^3+1)y' + \alpha^2 y = x - e^x$ si riduce, nel caso $\alpha = 0$, a $y' = -x + e^x$, da cui $y(x) = -\frac{1}{2}x^2 + e^x + k$, e notando che $y'(0) = 1 \neq 0$ non si ha nessuna soluzione che soddisfa la condizione di stazionarietà richiesta; invece se $\alpha \neq 0$, cosa che supporremo nel seguito, essa è del secondo ordine a coefficienti costanti. Le radici caratteristiche sono α^2 e $\frac{1}{\alpha}$, che coincidono se e solo se $\alpha = 1$. Poichè le radici sono entrambe non nulle, una soluzione particolare relativa a $b_1(x) = x$ sarà del tipo $\tilde{y}_1(x) = ax + b$, e si trova $(a,b) = (\frac{1}{\alpha^2}, \frac{\alpha^3+1}{\alpha^4})$. Per quanto riguarda invece $b_2(x) = -e^x$, vanno distinti i casi $\alpha = 1$ (in cui 1 è radice caratteristica doppia), $\alpha = -1$ (in cui 1 è radice caratteristica semplice) e $\alpha \neq \mp 1$ (in cui non lo è); nel primo caso una soluzione particolare sarà del tipo $\tilde{y}_2(x) = ax^2e^x$, e si trova $a = -\frac{1}{3}$; nel secondo una soluzione particolare sarà del tipo $\tilde{y}_2(x) = axe^x$, e si trova $a = \frac{1}{2}$; nel terzo sarà del tipo $\tilde{y}_2(x) = ae^x$, e si trova $a = \frac{1}{(\alpha-1)^2(\alpha+1)}$. Pertanto se $\alpha = 1$ le soluzioni dell'equazione completa saranno $y(x) = (A + Bx - \frac{1}{3}x^2)e^x + x + 2$ con $A, B \in \mathbb{C}$, e la stazionarietà in $x = 0$ equivale a $y'(0) = A + B + 1 = 0$; se $\alpha = -1$ saranno $y(x) = (A + \frac{1}{2}x)e^x + Be^{-x} + x$ con $A, B \in \mathbb{C}$, e la stazionarietà in $x = 0$ equivale a $y'(0) = A - B + \frac{3}{2} = 0$; mentre se $\alpha \neq \mp 1$ saranno $y(x) = Ae^{\alpha^2 x} + B\,e^{\frac{1}{\alpha}x} + \frac{\alpha^2 x + \alpha^3 + 1}{\alpha^4} + \frac{1}{(\alpha-1)^2(\alpha+1)}e^x$, sempre con $A, B \in \mathbb{C}$, e la stazionarietà in $x = 0$ equivale a $y'(0) = A\alpha^2 + B\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(\alpha-1)^2(\alpha+1)} = 0$.

3. (a) (Figura 1) Denotiamo le curve di livello della funzione $f(x,y) = e^{x-2y} - x - y^2$ tramite $\mathsf{X}_\alpha = \{(x,y) : f(x,y) = \alpha\}$. Il gradiente $\nabla f = (e^{x-2y} - 1, -2(e^{x-2y} + y))$ si annulla quando $e^{x-2y} = 1$ e $e^{x-2y} + y = 0$: questo accade solo nel punto $B(-2,-1)$, per il quale passa la curva X_2. Questa è dunque l'unica curva a contenere un possibile punto singolare; tutte le altre curve sono regolari, e tra queste X_e, che passa per $A(-1,-1)$. La retta affine tangente in A è data da $\nabla f(A) \cdot (x - (-1), y - (-1)) = 0$, ovvero $(e-1, -2(e-1)) \cdot (x+1, y+1) = 0$, ovvero $x - 2y - 1 = 0$. Alternativamente, da $f(x,y) = e$ si può esplicitare ad esempio $x(y)$ all'intorno di A, con $x(y) = -1 + (-\frac{-2(e-1)}{e-1})(y - (-1)) + o_{-1}(y - (-1)) = -1 + 2(y+1) + o_{-1}(y+1)$, e lo sviluppo al primo termine ridà la retta trovata.

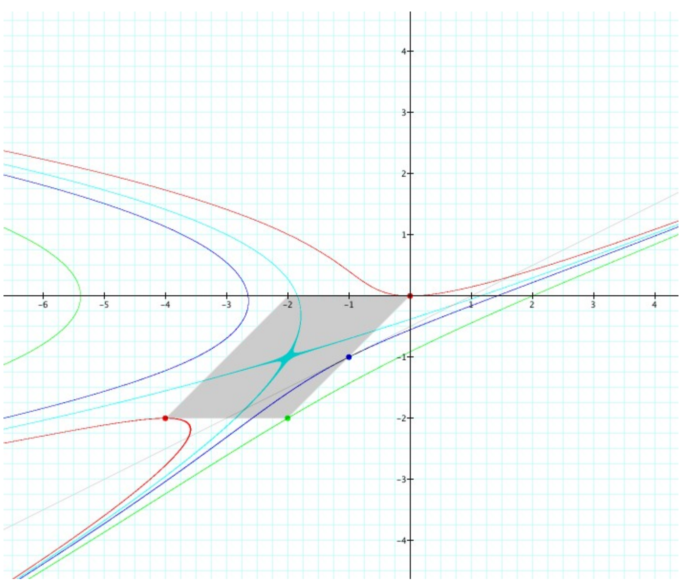
(b) (Figura 1) Eventuali estremi locali/globali di f in $\mathbb{R}^2$ devono essere in particolare stazionari e, come visto, l'unico è $B(-2,-1)$; tuttavia è immediato verificare che l'hessiano di f in B è indefinito, dunque si tratta di una sella. • Il parallelogramma $\mathrm{P} = \{(x,y) : 0 \le y - x \le 2\,,\ -2 \le y \le 0\}$ è compatto, dunque f vi assume di certo estremi assoluti, per la cui ricerca separiamo P in componenti che siano varietà. Nei punti interni di P l'unico punto stazionario è B, che però, come visto, è una sella. Sul lato $y = 0$ con $-2 < x < 0$ si ha $\varphi(x) := f(x,0) = e^x - x$, ma $\varphi'(x) = e^x - 1$ non si annulla in tale intervallo, dunque niente. Sul lato $y = x$ con $-2 < x < 0$ si ha $\psi(x) := f(x,x) = e^{-x} - x - x^2$: vale $\psi'(x) = -e^{-x} - 1 - 2x = 0$ quando $e^{-x} = -2x - 1$, ma ciò non accade mai (basta fare un confronto grafico). Sul lato $y = -2$ con $-4 < x < -2$ si ha $\eta(x) := f(x,-2) = e^{x+4} - x - 4$, ma $\eta'(x) = e^{x+4} - 1 = 0$ non si annulla in tale intervallo, dunque ancora niente. Sul lato $y = x + 2$ con $-4 < x < -2$ si ha $\xi(x) := f(x, x+2) = e^{-x-4} - x - (x+2)^2$: vale $\xi'(x) = -e^{-x-4} - 1 - 2(x+2) = 0$ quando $e^{-x-4} = -2x - 5$, e ciò accade in un unico punto $a \in]-3,-2[$: si trova dunque un punto $C(a, a+2)$, con $f(C) = e^{-a-4} - a - (a+2)^2 = -2a - 5 - a - (a+2)^2 = -a^2 - 7a - 9 \sim 2{,}5$. Infine, nei quattro vertici $D(-2,0)$, $O(0,0)$, $E(-2,-2)$ e $F(-4,-2)$ si ha $f(D) = e^{-2} + 2 \sim 2{,}1$, $f(O) = 1$, $f(E) = e^2 - 2 \sim 5{,}4$ e $f(F) = 1$. Concludiamo che il massimo assoluto per f su P è $e^2 - 2$ (assunto in E) e il minimo è 1 (assunto in O e F).

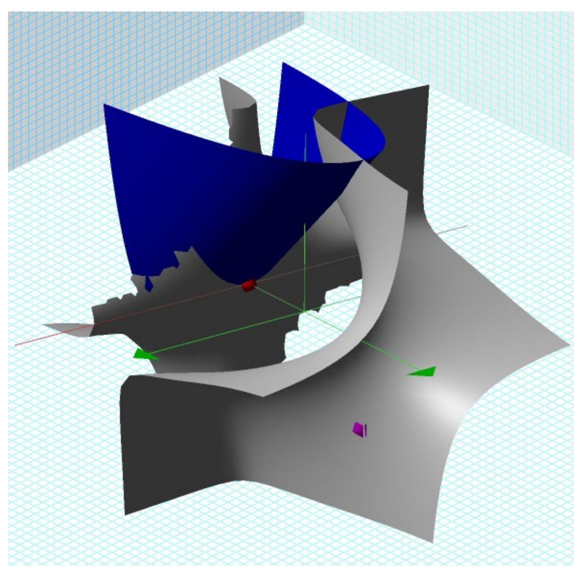
(c) (Figura 1) Il problema di trovare eventuali estremità locali in direzione verticale su X_1 equivale a quello di trovare estremi locali di $h(x,y) = y$ su X_1. Il metodo di Lagrange dà il sistema $\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 0 \\ f(x,y) = 1 \end{cases}$, che ha soluzioni $O(0,0)$ e $F(-4,-2)$. Per determinarne la natura, converrà esplicitare direttamente $y(x)$ (che è già la funzione h) dall'equazione $f(x,y) = 1$ all'intorno di ciascuno dei due punti. Derivando due volte l'identità $e^{x-2y} - x - y^2 = 1$ (ove si intende $y(x)$) si ottiene $(1 - 2y')e^{x-2y} - 1 - 2y'y = 0$ e $(-2y'' + (1-2y')^2)e^{x-2y} - 2(y')^2 - 2yy'' = 0$: calcolando in $x = 0$ (con $y(0) = 0$) si ottiene $y'(0) = 0$ e $y''(0) = \frac{1}{2} > 0$; calcolando invece in $x = -4$ (con $y(-4) = -2$) si ottiene $y'(-4) = 0$ e $y''(-4) = -\frac{1}{2} < 0$. Ne ricaviamo che, come testimonia la figura, i punti O e F sono rispettivamente di minimo e massimo per la direzione verticale su X_1.

4. (a) (Figura 2) Denotiamo con Y_α la superficie di livello α della funzione $g(x,y,z) = \sqrt{y^2-2xz} - xyz$. Il gradiente di g (calcolato dove $y^2 - 2xz > 0$) è $\nabla g = (-\frac{z}{\sqrt{y^2-2xz}} - yz, \frac{y}{\sqrt{y^2-2xz}} - xz, -\frac{x}{\sqrt{y^2-2xz}} - xy)$. Per individuare i possibili punti singolari bisogna vedere dove tale gradiente si annulla, ovvero risolvere il sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0$. Da $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ si ricava $z = 0$ oppure $\sqrt{y^2-2xz} = -\frac{1}{y}$; la prima eventualità non può verificarsi (da $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ si avrebbe $y \neq 0$ e $\frac{y}{|y|} = \operatorname{sign} y = 0$, assurdo), mentre nella seconda da $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ si ottiene $-y^2 - xz = 0$, cioè $xz = -y^2$, che rimessa dentro $\sqrt{y^2-2xz} = -\frac{1}{y}$ dà $\sqrt{3y^2} = -\frac{1}{y}$, ovvero $y^2 = -\frac{\operatorname{sign} y}{\sqrt{3}}$, da cui l'unica soluzione $y = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$; resta poi $xz = -y^2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Pertanto i possibili punti singolari sono quelli della curva parametrica $\{(u, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{u\sqrt{3}}) : u \in \mathbb{R},\, u \neq 0\}$, che giacciono tutti su $\mathsf{Y}_{\frac{2}{3}\sqrt[4]{3}}$. Tutte le altri superfici di livello di g sono regolari, e tra queste anche Y_1 che contiene $A(0,1,-1)$: il piano affine tangente a Y_1 in A è dato da $\nabla g(0,1,-1) \cdot (x-0, y-1, z-(-1)) = 0$, ovvero $(2,1,0)\cdot(x, y-1, z+1) = 0$, ovvero $2x + y - 1 = 0$. Dalla forma del gradiente notiamo che all'intorno di A dall'equazione $g(x,y,z) = 1$ si possono esplicitare a scelta $x(y,z)$ oppure $y(x,z)$: ad esempio, scegliendo la seconda, si ha $y(x,z) = 1 + (-\frac{2}{1}, -\frac{0}{1})(x-0, z+1) + \cdots = 1 - 2x + \cdots$, e lo sviluppo al primo ordine ridà il piano tangente trovato in precedenza.

(b) Lo jacobiano di $(g, x^2 - \log(z-y))$, ovvero $\begin{pmatrix} -\frac{z}{\sqrt{y^2-2xz}} - yz & \frac{y}{\sqrt{y^2-2xz}} - xz & -\frac{x}{\sqrt{y^2-2xz}} - xy \\ 2x & \frac{1}{z-y} & -\frac{1}{z-y} \end{pmatrix}$, nel punto $B(0,-1,0)$ diventa $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$: pertanto, in base al teorema del Dini, l'unico modo per esplicitare due variabili in funzione della rimanente è di ricavare y e z in funzione di x; si avrà $\begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix} y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. È tuttavia richiesto lo sviluppo fino al II ordine, dunque conviene partire dall'identità data dal sistema $\begin{cases} g(x, y(x), z(x)) \equiv 1 \\ x^2 \equiv \log(z(x) - y(x)) \end{cases}$: derivando una volta si ottiene $\begin{cases} \frac{yy' - z - xz'}{\sqrt{y^2-2xz}} - yz - xy'z - xyz' \equiv 0 \\ 2x - \frac{z'-y'}{z-y} \equiv 0 \end{cases}$ (da cui, posto $x = 0$ con $(y(0), z(0)) = (-1, 0)$, si ritrova $(y'(0), z'(0)) = (0,0)$), e derivando nuovamente si ottiene $\begin{cases} \frac{1}{y^2-2xz}(((y')^2 + yy'' - 2z' - xz'')\sqrt{y^2-2xz} - \frac{(yy'-z-xz')^2}{\sqrt{y^2-2xz}}) - 2y'z - 2yz' - xy''z - 2xy'z' - xyz'' \equiv 0 \\ 2 - \frac{(z''-y'')(z-y) - (z'-y')^2}{(z-y)^2} \equiv 0 \end{cases}$ da cui, posto $x = 0$ con $(y(0), z(0)) = (-1, 0)$ e $(y'(0), z'(0)) = (0,0)$, si ottiene $(y''(0), z''(0)) = (0, 2)$. Dunque lo sviluppo al II ordine cercato è $(y(x), z(x)) = (-1 + o_0(x^2),\, x^2 + o_0(x^2))$.

(c) (Figura 2) Quanto fatto nel punto (b) è del tutto analogo allo studio della curva ℓ: vicino al suo punto B essa è interpretabile come grafico della sola variabile x, e la retta tangente affine è data sia come sviluppo al primo ordine di $(y(x), z(x))$, sia come $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-(-1) \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. In entrambi i casi risulta la retta $\begin{cases} y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$, parallela all'asse x.





1. Esercizio 3: le curve X_1, X_2, X_e e X_{e^2-2} sono rispettivamente in rosso, azzurro, blu e verde. **2.** Esercizio 4: la superficie Y_1 (in grigio) contiene entrambi i punti A (porpora) e B (rosso); è anche visibile la retta tangente affine in B alla curva ℓ (intersezione tra le due superfici grigia e blu).