Analisi Matematica II (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (17/09/2009)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO SF / SA

1. Studiare in $]0,+\infty[$ l'integrabilità gen. di $f_\alpha(x) = \dfrac{x^{1-\alpha}\,|\log x|^\alpha}{(x+2)^{\alpha+1}}$, e calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(x)\,dx$.

2. Trovare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, le soluzioni $y(x)$ delle equazioni (i) $x^2y' + \alpha(y+1)^2 \log x = 0$, (ii) $x^2y' + (x-1)y = e^{\alpha x}$ tali che $y(1) = 0$, e determinarne i limiti in 0^+ e in $+\infty$.

3. Si consideri nel piano la curva polare ℓ data da $\rho(\theta) = 3 + 2\sin\theta$ con $\theta \in [-\pi,\pi]$.

(a) Disegnare ℓ, parametrizzarla opportunamente e calcolarne la retta tangente nel punto A con $\theta = 0$. Scrivere in modo corretto l'integrale che dà la lunghezza di ℓ.

(b) Determinare[(1)] un polinomio $p(x,y)$ che definisca cartesianamente ℓ. Da $p(x,y) = 0$ esplicitare, all'intorno di A, una delle coordinate rispetto all'altra, e scriverne lo sviluppo fino al I ordine. Usare quanto trovato per ricalcolare in due modi la retta tangente a ℓ in A.

(c) Dimostrare che ℓ è compatta, e calcolarne i punti estremi rispetto alle coordinate x e y. Come andrebbe impostato lo stesso problema usando la forma cartesiana $p(x,y) = 0$?

4. Sia $g(x,y,z) = (g_1(x,y,z),\, g_2(x,y,z)) = (\operatorname{arctg}(xyz) + x - yz\,,\ xz - y^2)$.

(a) Dire quali superfici di livello $\mathsf{S}_\alpha = \{(x,y,z) : g_1(x,y,z) = \alpha\}$ sono regolari. Mostrare che S_1, all'intorno del suo punto $A(1,0,-1)$, è esprimibile in un solo modo come grafico, e calcolarne in due modi il piano tangente affine. (Facoltativo: visti i risultati, si può indagare se per caso A sia un punto estremo per S_1 rispetto a una delle coordinate?)

(b) Sia Y la curva di livello di g passante per A. Mostrare che Y è regolare in A, e calcolarne la retta tangente affine in due modi.

(c) Mostrare che A è un estremante locale (minimo o massimo?) per la coordinata z su Y.

[(1)] Moltiplicare per ρ ambo i membri di $\rho = 3 + 2\sin\theta$, e ricordare i legami tra le coordinate polari e cartesiane.

Analisi Matematica II – Esame Scritto (17/09/2009) – Soluzioni.

1. La funzione $f_\alpha(x) = \frac{x^{1-\alpha}\,|\log x|^\alpha}{(x+2)^{\alpha+1}}$ è definita per $x > 0$ tranne che eventualmente in $x = 1$: dunque l'integrabilità va vista in 0^+, $1^\mp$ e $+\infty$. • In 0^+ si ha $f_\alpha(x) \sim_0^* x^{1-\alpha}\,|\log x|^\alpha$: ricordando che $x^\beta|\log x|^\gamma$ è integrabile in 0^+ se e solo se $\beta > -1$ per ogni γ, oppure se $\beta = -1$ e $\gamma < -1$, si ha la condizione $1-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < 2$. • Essendo $\log x \sim_1 x-1$ si ricava $f_\alpha(x) \sim_1^* |x-1|^\alpha$, da cui la condizione $\alpha > -1$. • In $+\infty$ si ha $f_\alpha(x) \sim_{+\infty} \frac{x^{1-\alpha}\,\log^\alpha(x)}{x^{\alpha+1}} = x^{-2\alpha}\,|\log x|^\alpha$: ricordando che $x^\beta|\log x|^\gamma$ è integrabile in $+\infty$ se e solo se $\beta < -1$ per ogni γ, oppure se $\beta = -1$ e $\gamma < -1$, si ha la condizione $-2\alpha < -1$, ovvero $\alpha > \frac{1}{2}$. • Da quanto detto prima, l'integrale proposto $\int_0^{+\infty} f_1(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{|\log x|}{(x+2)^2}\,dx$ converge, e avrà ovviamente valore positivo. Iniziamo calcolando una primitiva di $\frac{\log x}{(x+2)^2}$: integrando per parti si ha $\int\frac{\log x}{(x+2)^2}\,dx = (-\frac{1}{x+2})\log x - \int(-\frac{1}{x+2})\frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{x+2}\log x + \frac{1}{2}\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2})\,dx = -\frac{1}{x+2}\log x + \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{2}\log(x+2) + k = \frac{1}{2}(\frac{x}{x+2}\log x - \log(x+2)) + k$ (o anche $= -\frac{1}{x+2}\log x + \frac{1}{2}\log\frac{x}{x+2} + k$, altra espressione utile per il calcolo). Tenendo poi presente che $|\log x| = \mp\log x$ a seconda che $x \lessgtr 1$, si ha che $\int_0^{+\infty}\frac{|\log x|}{(x+2)^2}\,dx = -\int_0^1\frac{\log x}{(x+2)^2}\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{\log x}{(x+2)^2}\,dx = (-\frac{1}{2}(\frac{x}{x+2}\log x - \log(x+2))]_0^1 + (-\frac{1}{x+2}\log x + \frac{1}{2}\log\frac{x}{x+2}]_1^{+\infty} = (\frac{1}{2}\log 3) - (\frac{1}{2}\log 2) + (0) - (-\frac{1}{2}\log 3) = \log 3 - \frac{1}{2}\log 2 \sim 0{,}75$.

2. (i) L'equazione $x^2y' + \alpha(y+1)^2\log x = 0$ è del primo ordine a variabili separabili; separando si ha $-\frac{1}{(y+1)^2}\,dy = \alpha\frac{\log x}{x^2}\,dx$ da cui integrando si trova $\frac{1}{y+1} = -\alpha\frac{1}{x}(\log x+1) + k$; imponendo che $y(1) = 0$ si ha $k = \alpha+1$, da cui $\frac{1}{y+1} = -\alpha\frac{1}{x}(\log x+1) + (\alpha+1) = \frac{(\alpha+1)x - \alpha(\log x+1)}{x}$, da cui $y(x) = \frac{x}{(\alpha+1)x-\alpha(\log x+1)} - 1$. Si ha $\lim_{0^+} y(x) = -1$ per ogni α; d'altra parte, se $\alpha \neq -1$ vale $\lim_{+\infty} y(x) = \frac{1}{\alpha+1} - 1 = -\frac{\alpha}{\alpha+1}$, mentre se $\alpha = -1$ si ha $\lim_{+\infty} y(x) = +\infty$. • (ii) L'equazione $x^2y' + (x-1)y = e^{\alpha x}$ è lineare del primo ordine, e per $x > 0$ essa viene messa nella forma canonica $y' + p(x)\,y = q(x)$ con $p(x) = \frac{x-1}{x^2}$ e $q(x) = \frac{e^{\alpha x}}{x^2}$; si ha $\int p(x)\,dx = \log x + \frac{1}{x}$, perciò la soluzione con $y(1) = 0$ ha forma integrale $y(x) = e^{-\log x - \frac{1}{x}}\int_1^x e^{\log t + \frac{1}{t}}\frac{e^{\alpha t}}{t^2}\,dt = \frac{1}{xe^{\frac{1}{x}}}\int_1^x\frac{e^{\alpha t+\frac{1}{t}}}{t}\,dt$. In 0^+ si ha $\frac{e^{\alpha t+\frac{1}{t}}}{t} > \frac{1}{t}$, dunque l'integrale $\int_1^x\frac{e^{\alpha t+\frac{1}{t}}}{t}\,dt$ tende a $-\infty$ e il limite $\lim_{0^+} y(x)$ è in forma $\frac{\infty}{\infty}$: con de l'Hôpital si ottiene $\lim_{0^+} y(x) = \lim_{0^+}\frac{\frac{e^{\alpha x+\frac{1}{x}}}{x}}{e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x})} = \lim_{0^+}\frac{e^{\alpha x+\frac{1}{x}}}{(x-1)e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{0^+}\frac{e^{\alpha x}}{x-1} = -1$. Per quanto riguarda $+\infty$, se $\alpha < 0$ l'integrale converge e dunque $\lim_{+\infty} y(x) = 0^+$; se invece $\alpha \geq 0$ l'integrale chiaramente diverge e dunque siamo in forma $\frac{\infty}{\infty}$: con de l'Hôpital si ottiene $\lim_{+\infty} y(x) = \lim_{+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{x-1}$, che vale 0 se $\alpha = 0$ e vale $+\infty$ se $\alpha > 0$.

3. (a) (Figura 1) La parametrizzazione naturale della curva polare ℓ data da $\rho(\theta) = 3+2\sin\theta$ è data da $\gamma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$ con $\gamma(\theta) = ((3+2\sin\theta)\cos\theta,\ (3+2\sin\theta)\sin\theta)$; un vettore tangente è $\gamma'(\theta) = (2-3\sin\theta-4\sin^2\theta,\ (4\sin\theta+3)\cos\theta)$, dunque la retta tangente nel punto con $\theta = 0$ è data da $\{\gamma(0) + t\,\gamma'(0) : t \in \mathbb{R}\} = \{(3,0) + t\,(2,3) : t \in \mathbb{R}\} = \{(3+2t, 3t) : t \in \mathbb{R}\}$; eliminando il parametro t si ottiene $3x - 2y - 9 = 0$. Infine l'elemento d'arco è $\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\,d\theta = \sqrt{13+12\sin\theta}\,d\theta$, da cui la lunghezza $\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{13+12\sin\theta}\,d\theta$.

(b) Moltiplicando ambo i membri di $\rho = 3+2\sin\theta$ per ρ si ottiene $\rho^2 = 3\rho + 2\rho\sin\theta$, ovvero $x^2+y^2 = 3\sqrt{x^2+y^2} + 2y$, che equivale a $9(x^2+y^2) = (x^2+y^2-2y)^2$, ovvero $p(x,y) = x^4+2x^2y^2+y^4-4x^2y-4y^3-9x^2-5y^2 = 0$; si calcola $\nabla p(x,y) = (4x^3+4xy^2-8xy-18x,\ 4x^2y+4y^3-4x^2-12y^2-10y)$, ed essendo $\nabla p(3,0) = 18(3,-2)$ si può esplicitare una a scelta delle due coordinate rispetto all'altra: ad esempio, si può scrivere $y = 0 + (-\frac{3}{-2})(x-3) + o_3(x-3) = \frac{3}{2}(x-3) + o_3(x-3)$. La retta tangente precedente si ritrova come $\nabla p(3,0)\cdot(x-3, y-0) = 0$, o come lo sviluppo al primo ordine di $y(x)$.

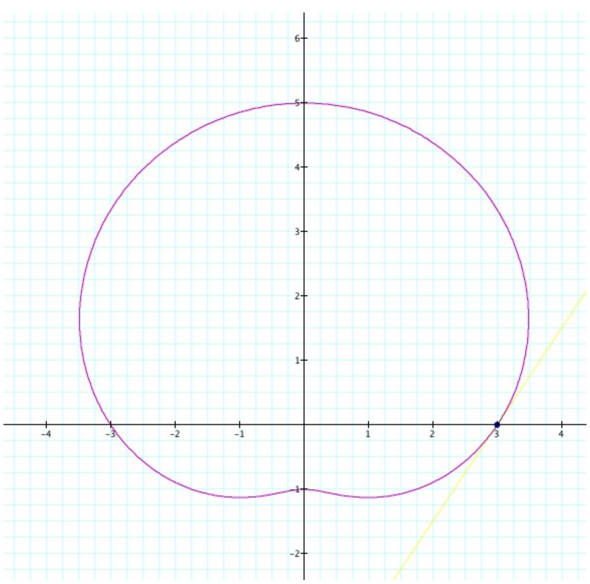
(c) (Figura 1) Il modo più rapido per mostrare che ℓ è una curva compatta è notare che essa è immagine di un compatto (l'intervallo $[-\pi,\pi]$) tramite una funzione continua (la parametrizzazione γ); alternativamente, ℓ è chiusa perché definita dall'equazione $p(x,y) = 0$, e limitata perché $\rho = 3+2\sin\theta \leq 5$. Cerchiamone i punti estremi rispetto alla coordinata x: usando γ si tratta di trovare gli estremi di $x(\gamma) = (3+2\sin\theta)\cos\theta$. La derivata $x'(\gamma) = 2-3\sin\theta-4\sin^2\theta$ si annulla quando $\sin\theta = \frac{\sqrt{41}-3}{8}$: detto $\theta_0 = \arcsin\frac{\sqrt{41}-3}{8}$, si trovano i punti estremi $\gamma(\theta_0)$ e $\gamma(\pi-\theta_0)$. Per la coordinata y, la derivata $y'(\theta) = \cos\theta(4\sin\theta+3)$ si annulla per $\theta = \mp\frac{\pi}{2}$, $-\arcsin\frac{3}{4}$, $\arcsin\frac{3}{4}-\pi$, da cui i quattro punti previsti dal disegno. Usando la forma cartesiana $p(x,y) = 0$, si tratterebbe di usare il metodo di Lagrange e poi di determinare la natura dei punti usando una carta locale. Ad esempio, per gli estremi secondo y si ottiene il sistema $\partial_x p(x,y) = p(x,y) = 0$, che tra la varie soluzioni dà $P(0,-1)$: da $\nabla p(P) = (0,-6)$ si nota che da $p(x,y) = 0$ si può esplicitare $y(x)$, e i conti (derivando due volte l'identità $p(x,y(x)) \equiv 0$ con $y(0)-1$) dànno $y(x) = -1-x^2+o_0(x^2)$, che mostra che P è un punto di massimo locale per la coordinata y su ℓ.

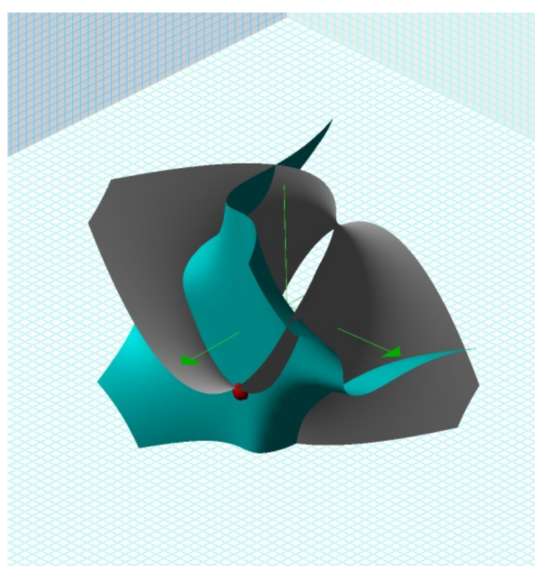
4. (a) (Figura 2) Il gradiente di $g_1(x,y,z) = \text{arctg}\,(xyz) + x - yz$ è $\nabla g_1 = (\frac{yz}{1+x^2y^2z^2}+1,\ \frac{xz}{1+x^2y^2z^2}-z,\ \frac{xy}{1+x^2y^2z^2}-y)$; vediamo quali sono i possibili punti singolari delle superfici di livello S_α di g_1 annullando tale gradiente. Da

$\frac{\partial g_1}{\partial y} = 0$ si ricava che $z = 0$ oppure $1 + x^2y^2z^2 = x$; la prima eventualità è impossibile (da $\frac{\partial g_1}{\partial x} = 0$ si otterrebbe $1 = 0$), e nella seconda da $\frac{\partial g_1}{\partial x} = 0$ si avrebbe $yz = -x$, da cui $1 + x^2(-x)^2 = x$, ovvero $x^4 + 1 = x$, ma questa equazione non ha soluzioni reali (basta un rapido confronto grafico). Dunque tutte le superfici S_α sono regolari; in particolare lo è S_1 all'intorno del suo punto $A(1, 0, -1)$. Essendo $\nabla g_1(A) = (1, 0, 0)$, l'unico modo per esprimere S_1 come grafico attorno A è di esplicitare $x(y, z)$ da $g_1(x, y, z) = 1$, con $x(0, -1) = 1$ e $(\dot{x}_y(0, -1), \dot{x}_z(0, -1)) = (0, 0)$. Il piano tangente cercato è dunque $x = 1$, che si trova anche come $\nabla g_1(A) \cdot (x - 1, y - 0, z - (-1)) = 0$. Quanto all'ultima domanda, visto che il piano tangente a S_1 in A è parallelo al piano (y, z), tale punto potrebbe essere un estremo locale per la coordinata x: si tratta allora di vedere la natura del punto stazionario $(y_A, z_A) = (0, -1)$ per la funzione implicita $x(y, z)$. Il primo tentativo è quello di determinare l'hessiano di $x(y, z)$ in $(0, -1)$, ma una doppia derivazione dell'identità $g_1(x(y, z), y, z) \equiv 1$ rispetto a y e z ci dice solo che esso è identicamente nullo (guardando la figura, questo non è una sorpresa: infatti S_1 è "notevolmente piatta" vicino al punto A), e pertanto ciò non fornisce alcuna informazione sulla natura di A. Bisogna allora andare più in dettaglio, ma come fare? Per sondare il problema, possiamo provare a restringerci a una curva, ad esempio studiamo come si comporta la coordinata x sui punti di S_1 a quota $z = -1$, con particolare riguardo a ciò che accade vicino a A: è chiaro che ciò equivale a studiare, nel piano (x, y), la natura del punto $A'(1, 0)$ per la funzione x sulla curva definita da $\operatorname{arctg}(xy(-1)) + x - y(-1) = 1$, ovvero $\varphi(x, y) := x + y - \operatorname{arctg} xy = 1$. Essendo $\nabla\varphi(A') = (1, 0)$, da $\varphi(x, y) = 1$ esplicitiamo $x(y)$ e vediamone lo sviluppo in $y = 0$ (con $x(0) = 1$), aspettandoci naturalmente che le prime due derivate siano nulle: in effetti, derivando tre volte (con notevole pazienza) l'identità $\varphi(x(y), y) \equiv 1$ e calcolando in $y = 0$ si trova $x'(0) = x''(0) = 0$ e $x'''(0) = -2$, da cui $x(y) = 1 - \frac{1}{3}y^3 + o_0(y^3)$. Siamo stati fortunati: infatti abbiamo scoperto che A' è una sella per la funzione x sulla curva dei punti di S_1 a quota $z = -1$, e ciò implica che A è una sella per la coordinata x su S_1.

(b) (Figura 2) La matrice jacobiana di g in A è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, che ha rango massimo 2: dunque Y (la curva di livello di g passante per A) è regolare in A, e la retta tangente affine è data da $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{cases} x = 1 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$ All'intorno di A si può parametrizzare Y solo esplicitando x e z in funzione di y, con $\begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, da cui lo sviluppo $\begin{cases} x = 1 + o_0(y^2) \\ z = -1 + o_0(y^2) \end{cases}$: la parte fino al primo ordine, ovvero $\begin{cases} x = 1 \\ z = -1 \end{cases}$, ridà la retta tangente affine a Y in A (si tratta di una retta parallela all'asse y) e ovviamente coincide con quanto già trovato in precedenza.

(c) (Figura 2) Si tratta solo di studiare la funzione implicita $z(y)$ del punto precedente, cercando di capire la natura del suo punto stazionario $y = 0$: in altre parole, ci serve lo sviluppo di $z(y)$ fino al secondo ordine. Derivando l'identità $g(x(y), y, z(y)) \equiv (1, -1)$ rispetto alla variabile y si ottiene $\begin{cases} \frac{x'yz + xz + xyz'}{1 + x^2y^2z^2} + x' - z - yz' = 0 \\ x'z + xz' - 2y = 0 \end{cases}$ (da cui, calcolando in $y = 0$, si riottiene $x'(0) = z'(0) = 0$); derivando nuovamente, e calcolando di nuovo in $y = 0$, si trova poi $(x''(0), z''(0)) = (0, 2)$. Ne ricaviamo che $z(y) = -1 + y^2 + o_0(y^2)$, il che ci dice (e la figura lo conferma) che A è un punto di minimo locale per la coordinata z su Y.





1. Ex. 3: la curva polare ℓ e il suo punto A. **2.** Ex. 4: il punto A (rosso), la superficie S_1 (azzurra), la curva Y (intersezione tra le due superfici).