

4 Topologia degli spazi affini

4.1 Nozioni generali

L'insieme $\mathbb{R}^n = \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ delle n -uple di numeri reali ha una naturale struttura di $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale, di dimensione n ; la base $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$, ove $\underline{e}_j$ è il vettore nullo ovunque tranne che nella componente j -esima che vale 1, è detta *base canonica*. Come ogni spazio vettoriale, anche $\mathbb{R}^n$ ha una struttura di *spazio affine*, per la quale i suoi elementi possono essere visti sia come *vettori* che come *punti*. Su $\mathbb{R}^n$ si ritiene fissato anche il *prodotto scalare euclideo* dato da $\underline{x}' \cdot \underline{x}'' = x'_1 x''_1 + \dots + x'_n x''_n$, che è legato alla *norma euclidea* dalla relazione $\|\underline{x}\| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}}$: si parla allora di $\mathbb{R}^n$ come di *spazio affine euclideo*. Un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^n$ è usualmente chiamato *insieme affine*.

Prodotto scalare euclideo in $\mathbb{R}^n$

Insieme affine

La norma euclidea induce una topologia su $\mathbb{R}^n$, per la quale una *base di intorni* di un punto $\underline{x}_0$ è la famiglia delle palle aperte $\{B_n(\underline{x}_0, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$, o delle palle chiuse $\{B_n(\underline{x}_0, \varepsilon]\}_{\varepsilon > 0}$.⁽⁴⁰⁾

Base di intorni

Palle aperte e chiuse

Per $n \geq 2$ non è più assegnato un ordine su $\mathbb{R}^n$, ovvero la relazione “ $\leq$ ” perde senso; ed assieme ad essa perdono senso le nozioni di “insieme superiormente/inferiormente limitato” e di $\pm\infty$. Tuttavia:

Insieme limitato

- un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si può ancora definire *limitato* se esiste $r > 0$ tale che $\|\underline{x}\| < r$ per ogni $\underline{x} \in A$, ovvero se è contenuto in qualche palla centrata nell’origine;
- quanto all’“infinito”, si aggiunge ad $\mathbb{R}^n$ un unico punto ∞_n , ottenendo uno spazio esteso $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty_n\}$. Una base di “intorni” di ∞_n in $\overline{\mathbb{R}^n}$ è data da $\mathbb{R}^n \setminus B(0, M) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x}\| > M\}$ (i complementari di palle chiuse) al variare di $M > 0$; tale intorno di ∞_n sarà tanto più piccolo quando più grande è M .⁽⁴¹⁾

Infinito ∞_n in $\mathbb{R}^n$

Spazio completato $\overline{\mathbb{R}^n}$

Una successione $(\underline{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di punti di $\mathbb{R}^n$ (dunque $\underline{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})$) ha limite $\underline{\ell} \in \overline{\mathbb{R}^n}$ se essa sta definitivamente in ogni intorno di $\underline{\ell}$, cioè se per ogni intorno (di base) U di $\underline{\ell}$ esiste $k_U \in \mathbb{N}$ tale che $\underline{x}_k \in U$ per ogni $k > k_U$.

Limite di successione in $\overline{\mathbb{R}^n}$

Proposizione 4.1.1. *Il limite di una successione in $\mathbb{R}^n$ si può ricondurre a quello in $\mathbb{R}$:*

- (i) (Convergenza) *Se $\underline{\ell} \in \mathbb{R}^n$, si ha $\lim_{k \rightarrow +\infty} \underline{x}_k = \underline{\ell}$ se e solo se $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k,j} = \ell_j$ per ogni j .*
- (ii) (Divergenza) *Si ha $\lim_{k \rightarrow +\infty} \underline{x}_k = \infty_n$ se e solo se $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\underline{x}_k\| = +\infty$.*

Dimostrazione. (i) Basta passare al limite per $k \rightarrow +\infty$ nelle disuguaglianze $\max_j |x_{k,j} - \ell_j| \leq \|\underline{x}_k - \underline{\ell}\| \leq \sum_j |x_{k,j} - \ell_j|$. (ii) Per definizione. $\square$

⁽⁴⁰⁾Tuttavia, per la Proposizione 3.1.1, al posto della norma euclidea si potrebbe usare qualsiasi altra norma su $\mathbb{R}^n$, ad esempio $\|\underline{x}\|_m$ o $\|\underline{x}\|_s$, senza alterare la struttura topologica che ne risulta definita su $\mathbb{R}^n$.

⁽⁴¹⁾Per visualizzare intuitivamente il “punto all’infinito” ∞_n , si pensi ad una superficie sferica $(n-1)$ -dimensionale (dunque una circonferenza in $\mathbb{R}^2$, una superficie sferica in $\mathbb{R}^3$...) centrata in 0 e di raggio che tende all’infinito, i cui punti vengano alla fine “pinzati” per farli diventare uno solo. In questo senso, lo spazio esteso $\overline{\mathbb{R}^n}$ si identifica con la superficie sferica n -dimensionale $\mathbb{S}^n = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\underline{x}\| = 1\}$: ciò si vede al meglio con la *proiezione stereografica* dal polo Nord di $\mathbb{S}^n$ verso $\mathbb{R}^n$, in cui il polo Nord venga mandato in ∞_n (vedi pag. 46). La scelta fatta per la base di intorni di ∞_n è la naturale conseguenza di questa visualizzazione: gli intorni di ∞_n sono i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che “avvolgono” tutta questa “ $(n-1)$ -sfera all’infinito”, e dunque sono proprio quelli che contengono qualche complementare di palla chiusa.

Proposizione 4.1.2. *Ogni successione limitata in $\mathbb{R}^n$ ammette una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Ci limitiamo al caso $n = 2$, in quanto l'idea è facilmente adattabile al caso generale. Se $(a_k, b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione limitata in $\mathbb{R}^2$, entrambe le successioni $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sono limitate in $\mathbb{R}$. Esisterà in particolare una sottosuccessione $(a_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ di $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergente, diciamo a $\tilde{a} \in \mathbb{R}$. Anche la successione $(b_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ di $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è limitata, e dunque ammette una sottosuccessione $(b_{k_{\ell_m}})_{m \in \mathbb{N}}$ convergente, diciamo a $\tilde{b} \in \mathbb{R}$. Allora la sottosuccessione $(a_{k_{\ell_m}}, b_{k_{\ell_m}})_{m \in \mathbb{N}}$ di $(a_k, b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in \mathbb{R}^2$. $\square$

Esempi. (1) La successione $\underline{x}_k = (\frac{1}{k}, \arctg k, -3)$ in $\mathbb{R}^3$ tende a $\ell = (0, \frac{\pi}{2}, -3)$. Invece, la successione $\underline{x}_k = (\frac{1}{k}, (-1)^k)$ in $\mathbb{R}^2$ non ha limite, perché non ce l'ha la successione $(-1)^k$ in $\mathbb{R}$: tuttavia è evidente che quest'ultima successione è limitata, e dunque deve ammettere sottosuccessioni convergenti (ad esempio, $\underline{x}_{2k+1}$ converge a $(0, -1)$). **(2)** Topologicamente, i numeri complessi $\mathbb{C}$ vengono identificati al piano euclideo $\mathbb{R}^2$: dunque, ad esempio, quando si dice che la successione di numeri complessi $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} = (x_k + iy_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $w = (u + iv) \in \mathbb{C}$, si intende che la successione $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a (u, v) in $\mathbb{R}^2$. **(3)** Se $\lim \underline{x}_k = \infty_n$ (ovvero se $\lim \|\underline{x}_k\| = +\infty$) non è detto che una delle componenti tenda a ∞ in $\mathbb{R}$: ad esempio, in $\mathbb{R}^2$, le successioni $(-k, 0)$ e $(k \cos \frac{k\pi}{2}, k \sin \frac{k\pi}{2})$ divergono entrambe a ∞_2 (infatti $\|(-k, 0)\| = \|(k \cos \frac{k\pi}{2}, k \sin \frac{k\pi}{2})\| = k \rightarrow +\infty$), ma nel primo caso la y è sempre nulla, mentre nel secondo né la x né la y hanno limite. Invece, se una delle componenti di $\underline{x}_k$ tende a ∞ allora anche $\lim \underline{x}_k = \infty_n$: infatti $\|\underline{x}_k\| \geq |x_{k,j}|$ per ogni j .

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ le definizioni di *insieme aperto*, *insieme chiuso*, *punto interno*, *punto di chiusura*, *punto di accumulazione*, *punto isolato* e *punto di frontiera* così come i risultati che legano queste nozioni tra loro e con le successioni, rimangono formalmente del tutto analoghe a quelle già viste per $\mathbb{R}$, a patto di sostituire le palle agli intervalli, e dunque la norma euclidea di $\mathbb{R}^n$ al modulo.

Insiemi aperti e chiusi

Punti interni, di chiusura, di accumulazione, isolati, di frontiera

Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dirà *compatto* se è chiuso e limitato⁽⁴²⁾, e *compatto per successioni* se da ogni successione in A si può estrarre una sottosuccessione convergente in A .

Insiemi compatti e compatti per successioni

Proposizione 4.1.3. *Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. Supponiamo che $K \subset \mathbb{R}^n$ sia sequenzialmente compatto. Se K non fosse limitato, esisterebbe una successione di elementi di K che tende a ∞_n ; analogamente, se K non fosse chiuso esisterebbe una successione di elementi di K che converge ad un punto in $\mathbb{R}^n \setminus K$. In entrambi i casi, nessuna sottosuccessione delle successioni date potrebbe convergere in K , assurdo. Dunque K è sia chiuso che limitato, ovvero compatto. Supponiamo ora che K sia compatto, e sia $(\underline{x}_k)_k$ una successione in K . Poiché K è limitato, per la Proposizione 4.1.2 esiste una sottosuccessione $(\underline{x}_{k_\ell})_\ell$ che converge in $\mathbb{R}^n$, diciamo a $\tilde{x}$; e poiché K è chiuso, deve essere $\tilde{x} \in K$. Dunque K è sequenzialmente compatto. $\square$

A si dirà *connesso* se non esistono due aperti disgiunti $U, V \subset \mathbb{R}^n$ tali che $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$ e $A \cap V \neq \emptyset$; si dirà *connesso per archi* se per ogni $\underline{x}_0, \underline{x}_1 \in A$ esiste un *cammino*

Insiemi connessi e connessi per archi
Cammino

⁽⁴²⁾La definizione generale di *compattezza* in uno spazio topologico sarebbe la seguente: se X è uno spazio topologico, un sottoinsieme $A \subset X$ si dice *compatto* se, data una qualsiasi famiglia $\{U_\iota : \iota \in I\}$ di aperti di X che ricopre A (ovvero tale che $A \subset \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$), da essa è sempre possibile scegliere una sottofamiglia finita $\{U_{\iota_1}, \dots, U_{\iota_m}\}$ che continua a ricoprire A , ovvero tale che $A \subset U_{\iota_1} \cup \dots \cup U_{\iota_m}$. La definizione più semplice di compattezza data sopra (chiusura più limitatezza) si addice agli spazi vettoriali di dimensione *finita* $X = \mathbb{R}^n$, nei quali si dimostra essere equivalente a quella generale; ma non funziona per spazi topologici qualsiasi, in particolare non funziona per gli spazi vettoriali di dimensione infinita come gli *spazi di Hilbert*.

in A (ovvero, una curva continua $\gamma : [a, b] \rightarrow A$) tale che $\gamma(a) = \underline{x}_0$ e $\gamma(b) = \underline{x}_1$.⁽⁴³⁾

Proposizione 4.1.4. *Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ connesso per archi è anche connesso.*⁽⁴⁴⁾

Dimostrazione. Supponiamo che $A \subset \mathbb{R}^n$ sia sconnesso, e siano $U, V \subset \mathbb{R}^n$ due aperti disgiunti tali che $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$ e $A \cap V \neq \emptyset$. Siano ora $\underline{x}_0 \in A \cap U$ e $\underline{x}_1 \in A \cap V$, e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ una curva continua in A tale che $\gamma(a) = \underline{x}_0$ e $\gamma(b) = \underline{x}_1$; come vedremo nella Proposizione 4.3.7, il sostegno $\Gamma = \gamma([a, b]) \subset A$ è anch'esso connesso. Ma allora si cade in contraddizione, perché $\Gamma \subset U \cup V$, $\Gamma \cap U \neq \emptyset$ e $\Gamma \cap V \neq \emptyset$. Dunque A non è connesso per archi. $\square$

4.2 Limiti e continuità

Studieremo d'ora in poi funzioni del tipo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, di n variabili reali (perché il dominio è $\mathbb{R}^n$, dunque va specificato il valore di f in ogni $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$) e vettoriali (perché il codominio è $\mathbb{R}^m$, dunque il valore $f(\underline{x})$ sarà un vettore di $\mathbb{R}^m$). Più generalmente, dovremo aspettarci che f sia definita solo su un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$, ovvero $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$; il grafico di f sarà allora

$$\Gamma_f = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in A \times \mathbb{R}^m : \underline{y} = f(\underline{x})\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

Se $\pi_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ è la proiezione canonica j -esima $\pi_j(\underline{y}) = y_j$ (con $j = 1, \dots, m$), la funzione $f_j = \pi_j \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *componente j -esima* di f , e si ha $f = (f_1, \dots, f_m)$. Per $n = 1$ (e A un intervallo di $\mathbb{R}$) ritroviamo la nozione di *curva*; per $m = 1$ si parla anche di funzioni *scalari*.

Componenti di
una funzione
Funzione scalare

Esempi. (1) Se A è $\mathbb{R}^2$ privato dell'asse x , le componenti di $f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $f(x, y) = (9x - 3y, \sin xy, \frac{x^2 - e^x}{y})$ sono $f_1, f_2, f_3 : A \rightarrow \mathbb{R}$ date da $f_1(x, y) = 9x - 3y$, $f_2(x, y) = \sin xy$ e $f_3(x, y) = \frac{x^2 - e^x}{y}$.
(2) Avendo identificato topologicamente $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, le componenti di una funzione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sono $f_1, f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ date da $f_1 = \operatorname{Re} f$ e $f_2 = \operatorname{Im} f$. Ad esempio, se $f(z) = z^2 - ze^z$ si ha $z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ e $ze^z = (x + iy)(e^x \cos y + ie^x \sin y) = e^x(x \cos y - y \sin y) + ie^x(x \sin y + y \cos y)$, dunque $f_1(z) = (\operatorname{Re} f)(z) = x^2 - y^2 + e^x(x \cos y - y \sin y)$ e $f_2(z) = (\operatorname{Im} f)(z) = 2xy + e^x(x \sin y + y \cos y)$.

Proposizione - Definizione 4.2.1. (Limite di una funzione) *Sia $\underline{p} \in \overline{\mathbb{R}^n}$ un punto di accumulazione per A , e sia $\underline{\ell} \in \overline{\mathbb{R}^m}$. Si dirà che $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{p}} f(\underline{x}) = \underline{\ell}$ se sono verificate le seguenti condizioni equivalenti:*

Limite di funzione

- (i) per ogni intorno V di $\underline{\ell}$ esiste un intorno U di $\underline{p}$ tale che $f((U \setminus \{\underline{p}\}) \cap A) \subset V$;
- (ii) per ogni successione $\underline{x}_k$ in $A \setminus \{\underline{p}\}$ tale che $\lim \underline{x}_k = \underline{p}$ si ha $\lim f(\underline{x}_k) = \underline{\ell}$.

Come fatto per le successioni, è molto importante iniziare notando che, nel calcolo dei limiti, ci si può comunque ridurre al caso $m = 1$, cioè alle funzioni scalari $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

Proposizione 4.2.2. (i) (Limiti finiti) *Se $\ell \in \mathbb{R}^m$, si ha $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{p}} f(\underline{x}) = \underline{\ell}$ se e solo se $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{p}} f_j(\underline{x}) = \ell_j$ per ogni $j = 1, \dots, m$.*

(ii) (Limiti infiniti) *Si ha $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{p}} f(\underline{x}) = \infty_m$ se e solo se $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{p}} \|f(\underline{x})\| = +\infty$.*

⁽⁴³⁾In $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ si ritrova la nozione di *intervallo*, cioè “insieme senza buchi”.

⁽⁴⁴⁾Il viceversa è falso, come è evidenziato nell'esempio del *seno del topologo* in $\mathbb{R}^2$, ovvero l'insieme $A = \{(x, y) : x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\} \cup \{(x, y) : x = 0, |y| \leq 1\}$ che si dimostra essere connesso ma non connesso per archi. Tuttavia, se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$ allora le due nozioni sono equivalenti.

Dimostrazione. Segue subito dalla Proposizione 4.1.1. □

La Proposizione 4.2.2 mostra che a rendere più delicata la nozione di limite rispetto al caso base di funzioni di una sola variabile reale è solo, eventualmente, l'*aumentata dimensione del dominio*. Infatti, per $n \geq 2$, le palle $B_n(\underline{x}_0, \varepsilon)$ sono insiemi “più compositi” degli intervalli $B_1(x_0, \varepsilon) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, così come i complementari di palle chiuse lo sono più delle semirette: ora a $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$ si può tendere *in molti modi diversi*, e non solo in due (da sinistra o da destra) come prima, ed $f(\underline{x})$ potrebbe avere comportamenti discordanti tra loro a seconda del modo in cui $\underline{x}$ tende a $\underline{p}$. Dunque, anche se la nozione di limite è formalmente la stessa di prima, in realtà essa può diventare più delicata da maneggiare nei casi dubbi, come si vedrà ampiamente negli esempi presentati più in basso.

La funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dirà *continua in* $\underline{x}_0 \in A$ se $\underline{x}_0$ è un punto isolato di A , oppure se $\underline{x}_0$ è di accumulazione per A e $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$; si dirà che f è *continua in* A se è continua in ogni $\underline{x}_0 \in A$. Funzione continua

Proposizione 4.2.3. f è continua in $\underline{x}_0$ se e solo se lo sono tutte le sue componenti.

Dimostrazione. Vedi Proposizione 4.2.2(i). □

La funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dirà *lipschitziana in* A se esiste una costante $L \geq 0$ tale che $\|f(\underline{x}) - f(\underline{x}')\| \leq L\|\underline{x} - \underline{x}'\|$ per ogni $\underline{x}, \underline{x}' \in A$. La migliore (ovvero la minima) di queste costanti $L_A \geq 0$ si dirà *la costante di Lipschitz* per f su A .⁽⁴⁵⁾ Funzione lipschitziana

Proposizione 4.2.4. Se f è lipschitziana in A , essa è anche continua in A .

Dimostrazione. Esercizio (è la stessa di quella per funzioni di una variabile reale). □

Corollario 4.2.5. La norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e le proiezioni $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue.

Dimostrazione. Sia la norma che le proiezioni sono lipschitziane: infatti da $\underline{x}' = \underline{x} + (-\underline{x} + \underline{x}')$, da $\underline{x} = \underline{x}' + (\underline{x} - \underline{x}')$ e dalla disuguaglianza triangolare delle norme discende $\|\underline{x}\| - \|\underline{x}'\| \leq \|\underline{x} - \underline{x}'\|$, e da $\max_j |x_j - x'_j| \leq \|\underline{x} - \underline{x}'\|$ segue $|x_j - x'_j| \leq \|\underline{x} - \underline{x}'\|$ per ogni j . □

Le principali proprietà dei limiti e delle funzioni continue (ad esempio, la compatibilità con le operazioni e la composizione) restano vere anche in generale. Assieme alla Proposizione 4.2.2 e al Corollario 4.2.5, oltre al fatto che *le funzioni elementari sono continue nel loro dominio naturale*, queste proprietà permettono di risolvere gran parte delle questioni di limiti e continuità: ad esempio

Corollario 4.2.6. Tutte le funzioni lineari di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ sono continue.

⁽⁴⁵⁾ Mostriamo che effettivamente esiste la minima costante di Lipschitz. Sia $S = \{L \geq 0 : \|f(\underline{x}) - f(\underline{x}')\| \leq L\|\underline{x} - \underline{x}'\| \text{ per ogni } \underline{x}, \underline{x}' \in A\}$. Se f è lipschitziana in A si ha $S \neq \emptyset$; è inoltre ovvio che S è inferiormente limitato (0 è un minorante), dunque esiste $L_A = \inf S \geq 0$. Dobbiamo mostrare che $L_A = \min S \geq 0$, cioè che $L_A \in S$. Se infatti esistessero $\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{x}}' \in A$ tali che $\|f(\tilde{\underline{x}}) - f(\tilde{\underline{x}}')\| > L_A \|\tilde{\underline{x}} - \tilde{\underline{x}}'\|$, si avrebbe di certo $\tilde{\underline{x}} \neq \tilde{\underline{x}}'$ (infatti $0 \neq 0$), dunque ciò equivarrebbe a $\frac{\|f(\tilde{\underline{x}}) - f(\tilde{\underline{x}}')\|}{\|\tilde{\underline{x}} - \tilde{\underline{x}}'\|} > L_A$; per la proprietà caratteristica dell'estremo inferiore esisterebbe allora $L \in S$ tale che $\frac{\|f(\tilde{\underline{x}}) - f(\tilde{\underline{x}}')\|}{\|\tilde{\underline{x}} - \tilde{\underline{x}}'\|} > L$, ovvero $\|f(\tilde{\underline{x}}) - f(\tilde{\underline{x}}')\| > L\|\tilde{\underline{x}} - \tilde{\underline{x}}'\|$; ma ciò sarebbe assurdo, proprio perché $L \in S$.

Dimostrazione. Come noto, una funzione lineare $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è rappresentata —rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ — da una e una sola matrice Φ ad m righe ed n colonne, ovvero tale che $\varphi(\underline{x}) = \Phi \underline{x}$ per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ove il secondo membro indica la moltiplicazione di Φ per il vettore colonna $\underline{x}$. Pertanto ogni componente di φ si scrive come combinazione lineare delle proiezioni $\pi_1, \dots, \pi_n$ (più precisamente si ha $\varphi_j = \Phi_{j1} \pi_1 + \dots + \Phi_{jn} \pi_n$), e dunque è continua. $\square$

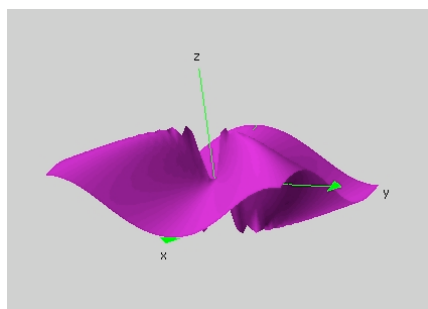
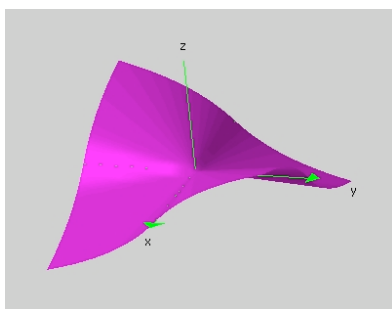
Come detto, i problemi si presentano *quando si vogliono studiare i limiti di f nei punti dubbi*, che possono essere punti di $\overline{\mathbb{R}^n}$ di accumulazione per il dominio e fuori da esso, o punti del dominio in cui f è definita “ad hoc” o in cui vi sono passaggi di definizione per f , e ciò per i motivi descritti in precedenza. Iniziamo col notare il seguente fatto, che generalizza quanto già noto per i limiti “sinistro” e “destro” nel caso di una variabile.

Proposizione 4.2.7. (Limiti e limiti di restrizioni) *Siano $E \subset A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione, e $\underline{p} \in \overline{\mathbb{R}^n}$ un punto di accumulazione per E (dunque anche per A). Se esiste $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{p}} f(\underline{x})$ allora esiste, ed è uguale, anche $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{p}} (f|_E)(\underline{x})$.*

Dimostrazione. Ovvio dalla definizione di limite. $\square$

La tecnica del limite di restrizioni, ovvero dello studiare il limite di $f(\underline{x})$ quando $\underline{x}$ si avvicina a $\underline{p}$ *restando in un certo sottoinsieme del dominio* permette dunque di “testare”, pur senza poterla dimostrare, l’eventuale esistenza del limite globale: anzi, permette di dimostrare l’eventuale *non*-esistenza del limite globale, nel caso in cui si trovi un sottoinsieme E tale che $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{p}} (f|_E)(\underline{x})$ non esiste, o due sottoinsiemi E_1 ed E_2 tali che $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{p}} (f|_{E_1})(\underline{x})$ e $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{p}} (f|_{E_2})(\underline{x})$ esistono ma sono diversi. I sottoinsiemi più comunemente usati sono (i sostegni di) *curve* che passano, o tendono, a $\underline{p}$, e la ragione è chiara: se $\gamma : I \rightarrow A$ (con I intervallo di $\mathbb{R}$) parametrizza la curva, restringere f al sostegno di γ significa considerare la composizione $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, e dunque il limite della restrizione è ridotto al limite di una funzione di una sola variabile reale, il parametro $t \in I$.

In base alla Proposizione 4.2.3, possiamo limitarci a studiare il caso delle funzioni scalari.



(a) Grafico di $h(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}$. (b) Grafico di $g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$.

Esempi. (1) $h(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}$ è definita e continua per $(x, y) \neq (0, 0)$. Restringendo h agli assi (fuori da $(0, 0)$) si ottiene $h(x, 0) = h(0, y) = 0$, dunque $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} h(x, y)$, se esiste, vale 0. L’impressione è rafforzata restringendo a qualunque altra retta $y = mx$: infatti $\lim_{x \rightarrow 0} h(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m|x|}{1 + |m|} = 0$. Ma nemmeno questo prova che $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} h(x, y)$ vale 0. Quanto a ∞_2 , tendendo lungo gli assi si ha

$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x, 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(0, y) = 0$, mentre tendendo lungo la bisettrice $y = x$ si ha $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x, x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{2} = +\infty$: dunque $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty_2} f(x, y)$ non esiste, mentre la questione resta in sospeso per $(0, 0)$.
(2) $\ell(x, y) = \frac{xy}{x+y}$ è definita e continua fuori dalla retta $y = -x$. Se $a \neq 0$ si ha $\lim_{(x,y) \rightarrow (a, -a)} \ell(x, y) = \infty$ (il numeratore tende a $-a^2 \neq 0$, il denominatore è infinitesimo). Sugli assi ℓ è nulla, dunque tendendo a $(0, 0)$ lungo le curve-assi si ha che $\lim_{t \rightarrow 0} \ell(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \ell(0, t) = 0$; d'altra parte, in ogni intorno di $(0, 0)$ vi sono punti della retta $y = -x$ vicino ai quali ℓ diverge a ∞ , dunque $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ell(x, y)$ non può esistere. **(3)** $g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ è definita e continua fuori da $(0, 0)$; inoltre, g è nulla sugli assi, dunque $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$, se esiste, deve essere 0. Inoltre, se $\gamma_\alpha(t) = (t, \alpha t)$ è una generica curva-retta per l'origine, vale $\lim_{t \rightarrow 0} g(\gamma_\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\alpha t)^2}{(t)^2 + (\alpha t)^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 t}{1 + \alpha^4 t^2} = 0$; ma, come già visto, nemmeno questo basta per affermare che il limite vale 0. E infatti in questo caso è falso: se si sceglie la curva $\gamma(t) = (t^2, t)$ (il cui sostegno è il grafico $x = y^2$) si ha $g(\gamma(t)) \equiv \frac{1}{2}$, dunque $\lim_{t \rightarrow 0} g(\gamma(t)) = \frac{1}{2}$. In definitiva $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ non esiste. Per le stesse ragioni non esiste nemmeno $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty_2} g(x, y)$.
(4) $m(x, y) = x$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}^2$, e studiamo $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty_2} m(x, y)$. Se $\gamma_1(t) = (t, 0)$ (l'asse x), si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} m(t, 0) = +\infty$, mentre se $\gamma_2(t) = (0, t)$ è l'asse y , si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} m(0, t) = 0$. Dunque $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty_2} m(x, y)$ non esiste. **(5)** Anche $n(x, y) = x^2 + y^2 - x$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}^2$. Si verifica facilmente che restringendosi ad una qualunque retta $y = mx + q$ si ha $\lim_{x \rightarrow \infty} n(x, mx + q) = +\infty$, e lo stesso vale per le rette verticali $x = k$ (ovvero $\lim_{y \rightarrow \infty} n(k, y) = +\infty$); ma ciò non dimostra ancora che $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty_2} n(x, y) = +\infty$, e anche questa questione resta in sospeso.

Come visto, le considerazioni sui limiti di varie restrizioni, anche se tutte concordi, non bastano a provare l'esistenza di un limite globale. A questo fine, risultano invece utili i seguenti criteri (eventualmente con l'ausilio delle coordinate speciali), che generalizzano tecniche già usate nel caso di una variabile.

Proposizione 4.2.8. Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, e $\underline{p} \in \overline{\mathbb{R}^n}$ un punto di accumulazione per A .

- (i) Sia $\ell \in \mathbb{R}$. Se esiste $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ infinitesima in $\underline{p}$ (ovvero tale che $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{p}} \varphi(\underline{x}) = 0$) per cui $|f(\underline{x}) - \ell| \leq |\varphi(\underline{x})|$ all'intorno di $\underline{p}$, allora $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{p}} f(\underline{x}) = \ell$.
- (ii) Se esiste $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ infinita in $\underline{p}$ (ovvero tale che $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{p}} \varphi(\underline{x}) = \infty$) per cui $|f(\underline{x})| > |\varphi(\underline{x})|$ all'intorno di $\underline{p}$, allora $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{p}} f(\underline{x}) = \infty$.

Dimostrazione. Esercizio (segue dalle definizioni e dal Teorema del confronto in una variabile). □

Negli esercizi in cui si studiano limiti di funzioni di due variabili $f(x, y)$ in $(0, 0)$ o in ∞_2 può essere utile anche il *cambio di variabili polari*: il seguente criterio dice che il conto con (ρ, θ) funziona se il limite è uniforme rispetto a θ .

Proposizione 4.2.9. Sia $f(x, y)$ definita in $A \subset \mathbb{R}^2$, e $(0, 0)$ sia di accumulazione per A .

- (i) Sia $\ell \in \mathbb{R}$. Se esiste $\varphi(\rho)$ infinitesima per $\rho \rightarrow 0^+$ per cui $|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - \ell| \leq |\varphi(\rho)|$ all'intorno di $\rho = 0^+$, allora $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \ell$.
- (ii) Se esiste $\varphi(\rho)$ infinita per $\rho \rightarrow 0^+$ per cui $|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| \geq |\varphi(\rho)|$ all'intorno di $\rho = 0^+$, allora $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \infty$.

Le stesse conclusioni valgono con ∞_2 al posto di $(0, 0)$, facendo tendere $\rho \rightarrow +\infty$.

Dimostrazione. Esercizio (anche qui, definizioni e Teorema del confronto in una variabile). □

Esempi. (1) Era rimasto il dubbio se $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x,y)$ valesse 0. Per dimostrare che è così, basta notare che $|h(x,y)| \leq \varphi(x,y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{2}$ (sugli assi h è nulla; mentre, essendo $|x| + |y| \geq 2\sqrt{|xy|}$, fuori dagli assi si ha $|h(x,y)| \leq \frac{|xy|}{2\sqrt{|xy|}} = \frac{\sqrt{|xy|}}{2}$), ed essendo $\varphi(x,y)$ infinitesima si conclude. **(2)** Era in dubbio anche se fosse $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty_2} n(x,y) = +\infty$. La risposta è positiva: usando le coordinate polari, se $\rho \geq 2$ si ha $n(x,y) = \rho^2 - \rho \cos \theta = \rho(\rho - \cos \theta) \geq \rho$, e $\varphi(\rho) = \rho$ tende a $+\infty$. **(3)** Riprendiamo la funzione $g(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. Passando in coordinate polari si ha $g(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \rho^2 \sin^4 \theta}$, e si può osservare che per ogni θ fissato il limite per $\rho \rightarrow 0^+$ è 0: dunque g tende a 0? Non si può dire: questa è solo un'errata applicazione della Proposizione 4.2.9, che invece richiede *prima* di maggiorare con una funzione infinitesima di ρ e *poi* di passare al limite (in effetti, che g tenda a 0 per ogni θ fissato equivale solo a dire che g tende a 0 quando si tende all'origine $(0,0)$ lungo una qualsiasi retta passante per essa). Un discorso perfettamente analogo vale per ∞_2 facendo tendere $\rho \rightarrow +\infty$. In realtà, come già visto in precedenza, i limiti di g in $(0,0)$ e in ∞_2 non esistono.

4.3 Proprietà delle funzioni continue

Esaminiamo ora le relazioni della continuità con gli insiemi aperti e chiusi, con i compatti e con i connessi; e anche la nozione di *omeomorfismo*, cioè “isomorfismo topologico”.

Proposizione 4.3.1. (Funzioni continue, aperti e chiusi) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Se $V \subset \mathbb{R}^m$ è aperto allora $f^{-1}(V)$ è aperto in A , ovvero esiste un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ tale che $f^{-1}(V) = A \cap U$. Similmente, se $D \subset \mathbb{R}^m$ è chiuso allora $f^{-1}(D)$ è chiuso in A , ovvero esiste un chiuso $C \subset \mathbb{R}^n$ tale che $f^{-1}(D) = A \cap C$.*

Entrambe le condizioni sono anche sufficienti per la continuità.

Dimostrazione. Sia V un aperto di $\mathbb{R}^m$, e sia $\underline{x} \in f^{-1}(V) \subset A$. Poiché V è intorno del suo punto $f(\underline{x})$, per continuità esiste un intorno $U_{\underline{x}}$ di $\underline{x}$ in $\mathbb{R}^n$ tale che $f(A \cap U_{\underline{x}}) \subset V$, ovvero $A \cap U_{\underline{x}} \subset f^{-1}(V)$. Posto $U = \bigcup \{U_{\underline{x}} : \underline{x} \in f^{-1}(V)\}$ si ha allora che U è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e che $f^{-1}(V) = A \cap U$, dunque $f^{-1}(V)$ è aperto in A . L'analogo asserto per i chiusi discende poi dall'identità $f^{-1}(E \setminus F) = f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)$: infatti $\mathbb{R}^m \setminus D$ è aperto, dunque $f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus D) = f^{-1}(\mathbb{R}^m) \setminus f^{-1}(D) = A \setminus f^{-1}(D)$ è un aperto di A , dunque $f^{-1}(D)$ è un chiuso di A . $\square$

Corollario 4.3.2. *I sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ definiti da un numero finito di disequazioni strette di funzioni continue sono aperti. I sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ definiti da un numero qualunque di equazioni e/o disequazioni late sono chiusi.*

Dimostrazione. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e $a \in \mathbb{R}$, poiché ad esempio $]a, +\infty[$ è un aperto di $\mathbb{R}$ mentre $[a, +\infty[$ e $\{a\}$ sono chiusi di $\mathbb{R}$ si ha che $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) > a\} = f^{-1}(]a, +\infty[)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ mentre $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) \geq a\} = f^{-1}([a, +\infty[)$ e $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) = a\} = f^{-1}(\{a\})$ sono chiusi di $\mathbb{R}^n$. Il resto delle affermazioni segue dal fatto che intersezioni finite di aperti sono aperte, e che intersezioni arbitrarie di chiuse sono chiuse. $\square$

Esempi. (1) Gli insiemi $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2-1)e^y > 3x\}$ e $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y^2 < \cos(xyz)\}$ sono aperti: infatti $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) > 0\}$ con $f(x,y) = (x^2-1)e^y - 3x$ e $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x,y,z) > 0, g_2(x,y,z) < 0\}$ con $g_1(x,y,z) = x, g_2(x,y,z) = y^2 - \cos(xyz)$, e le funzioni f, g_1, g_2 sono continue. **(2)** Analogamente, gli insiemi $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4x + y^2 \leq 0, x + y - 1 \geq 0\}$, $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - x^4 - y^2 + 3y \geq 1, x + 2y = 2\}$ e $S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 3, x^2 + y^2 \geq 1\}$ sono chiusi.

Proposizione 4.3.3. (Immagini continue di compatti sono compatte) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua, e $K \subset A$ compatto. Allora $f(K) \subset \mathbb{R}^m$ è compatto.

Dimostrazione. Usando la Proposizione 4.1.3 si può usare equivalentemente la compattezza sequenziale; la dimostrazione, facile, è allora come quelle per le funzioni di una variabile (esercizio). $\square$

Se Z è un insieme e $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, il *massimo* (assoluto) di f è (se esiste) il numero reale $\alpha = \max f(Z)$. In tal caso, ogni $z \in Z$ tale che $f(z) = \alpha$ si dirà *punto di massimo* (assoluto) per f , e se z è l'unico punto di Z in cui $f(z) = \alpha$ si dirà che z è un punto di massimo *stretto*. Definizioni simili si hanno per il minimo. Massimo e minimo (risp. punti di massimo e minimo) di f sono detti *estremi di f* (risp. *estremanti di f*). Dalla Proposizione 4.3.3 segue allora il

Teorema 4.3.4. (Weierstrass) Se $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto, ogni funzione continua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ammette massimo e minimo assoluti.

Dimostrazione. L'insieme $f(K)$ è un compatto di $\mathbb{R}$: esso dunque ha gli estremi superiore ed inferiore in $\mathbb{R}$ perché limitato, e li contiene perché chiuso. $\square$

Corollario 4.3.5. Siano $C \subset \mathbb{R}^n$ un chiuso non limitato e $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

- (i) Se $\lim_{\underline{x} \rightarrow \infty} f(\underline{x}) = +\infty$, oppure se $\lim_{\underline{x} \rightarrow \infty} f(\underline{x}) = \alpha \in \mathbb{R}$ ed esiste $\underline{x}_0 \in C$ tale che $f(\underline{x}_0) < \alpha$, allora f ammette minimo assoluto in C .
- (ii) Più generalmente, se esistono $\beta \in \mathbb{R}$ e $\underline{x}_0 \in C$ tali che f sia definitivamente $> \beta$ e $f(\underline{x}_0) \leq \beta$, allora f ammette minimo assoluto in C .

Dimostrazione. Sia $M > 0$ tale che se $\underline{x} \in C$ e $\|\underline{x}\| > M$ allora $f(\underline{x}) > \beta$, e sia $C' = C \cap B(\underline{0}, M)$: allora di certo $\underline{x}_0 \in C'$, e $\inf_C f = \inf_{C'} f$. Ma C' è compatto, dunque per Weierstrass f ammette minimo assoluto su C' . $\square$

Mettiamo in evidenza il seguente legame tra limiti e compattezza, che serve a stabilire con facilità la compattezza di insiemi affini.

Proposizione 4.3.6. Se C è un chiuso non limitato di $\mathbb{R}^n$ ed $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che $\lim_{\underline{x} \rightarrow \infty} f(\underline{x}) = +\infty$, allora l'insieme $\{\underline{x} \in C : f(\underline{x}) \leq 0\}$ è compatto.

Più generalmente, se C è un chiuso non limitato di $\mathbb{R}^n$ ed $f_1, \dots, f_r : C \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue tali che almeno una di esse è definitivamente > 0 ,⁽⁴⁶⁾ allora l'insieme $\{\underline{x} \in C : f_j(\underline{x}) \leq 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, r\}$ è compatto.

I risultati sono veri anche cambiando tutte o alcune delle disuguaglianze “ $\leq$ ” con “ $=$ ”.

Dimostrazione. Se C è un chiuso non limitato di $\mathbb{R}^n$ ed $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che $\lim_{\underline{x} \rightarrow \infty} f(\underline{x}) = +\infty$, allora l'insieme $X = \{\underline{x} \in C : f(\underline{x}) \leq 0\}$ è compatto in quanto chiuso (Corollario 4.3.2) e limitato (per definizione di limite). Nel caso generale, basta osservare che un sottoinsieme chiuso di un insieme compatto è esso stesso compatto. $\square$

Esempi. (1) L'insieme $S_1 = \{(x, y) : x^2 - 4x + y^2 \leq 0, x + y - 1 \geq 0\}$ è compatto, poiché $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} x^2 - 4x + y^2 = +\infty$. Accorgendosi che $x^2 - 4x + y^2 \leq 0$ rappresenta i punti interni alla circonferenza di centro

⁽⁴⁶⁾significa che esistono $j_0 \in \{1, \dots, r\}$ e $M > 0$ tali che se $\|\underline{x}\| > M$ allora $f_{j_0}(\underline{x}) > 0$.

$(0, 2)$ e raggio 2, la compattezza di S è chiara in quanto S è chiuso (vedi Corollario 4.3.2) e limitato (infatti $\|(x, y)\| \leq 4$). **(2)** L'insieme $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 3, x^2 + y^2 \geq 1\}$ è compatto, perché è $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x, y, z) \leq 0, f_2(x, y, z) \geq 0\}$ con $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 3$ e $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, e $\lim_{(x, y, z) \rightarrow \infty} f(x, y, z) = +\infty$. Anche qui la compattezza si può verificare direttamente, notando che da $f_1(x, y, z) \leq 0$ segue subito $|x| \leq \sqrt{3}$, $|y| \leq \sqrt{3}$ e $|z| \leq \sqrt{3/2}$. (Poiché $x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 3$, ovvero $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{3/2} \leq 1$, rappresenta i punti interni all'ellissoide di semiassi $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{3/2}$, mentre $x^2 + y^2 \geq 1$ rappresenta i punti esterni al cilindro con base la circonferenza unitaria nel piano (x, y) ed asse l'asse z , l'insieme S è l'intersezione di questi due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$.) **(3)** Naturalmente il criterio può essere usato anche con i segni invertiti, e serve sempre un po' d'intuito. Ad esempio, $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - x^4 - y^2 + 3y \geq 1, x + 2y = 2\}$ può essere scritto come $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x, y) \geq 0, f_2(x, y) = 0\}$, con $f_1(x, y) = 4x - x^4 - y^2 + 3y - 1$ e $f_2(x, y) = x + 2y - 2$: poiché vale $\lim_{(x, y) \rightarrow \infty} f_1(x, y) = -\infty$, l'insieme S è certamente compatto.

Proposizione 4.3.7. (Immagini continue di connessi sono connesse) *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Se $B \subset A$ è connesso allora $f(B) \subset \mathbb{R}^m$ è connesso. Similmente, se B è connesso per archi allora $f(B) \subset \mathbb{R}^m$ è connesso per archi.*

Dimostrazione. Supponiamo per semplicità che $A = \mathbb{R}^n$ (lasciando allo studente gli adattamenti nel caso generale). (i) Sia $B \subset \mathbb{R}^n$ connesso, e supponiamo che $f(B) \subset \mathbb{R}^m$ sia sconnesso: allora esistono V_1, V_2 aperti disgiunti di $\mathbb{R}^m$ tali che $V_1 \cap f(B) \neq \emptyset$, $V_2 \cap f(B) \neq \emptyset$ e $f(B) \subset V_1 \cup V_2$. Ma allora $U_1 = f^{-1}(V_1)$ e $U_2 = f^{-1}(V_2)$ sono aperti (Proposizione 4.3.1) disgiunti di $\mathbb{R}^n$ tali che $U_1 \cap B \neq \emptyset$, $U_2 \cap B \neq \emptyset$ e $B \subset U_1 \cup U_2$, assurdo. (ii) Sia B connesso per archi, e siano $\underline{y}_1 = f(\underline{x}_1)$ e $\underline{y}_2 = f(\underline{x}_2)$ due punti di $f(B)$. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow B$ è una curva continua in B da $\underline{x}_1 = \gamma(a)$ a $\underline{x}_2 = \gamma(b)$, allora $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow f(B)$ è una curva continua in $f(B)$ da $\underline{y}_1 = (f \circ \gamma)(a)$ a $\underline{y}_2 = (f \circ \gamma)(b)$. Dunque $f(B)$ è connesso per archi. $\square$

Corollario 4.3.8. (Teorema degli zeri) *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ connesso, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (con $\alpha < \beta$) due valori assunti da f . Allora per ogni $\gamma \in [\alpha, \beta]$ esiste qualche $\underline{x} \in A$ tale che $f(\underline{x}) = \gamma$.*

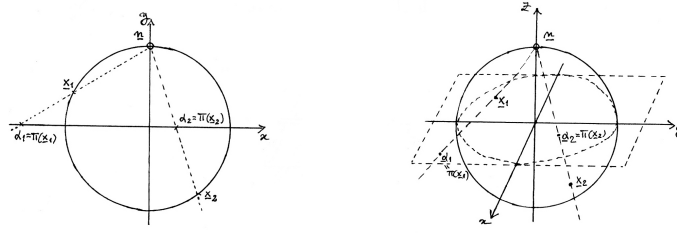
Dimostrazione. $f(A)$ è un connesso di $\mathbb{R}$, ovvero è un intervallo: dunque, poiché $\alpha, \beta \in f(A)$ si ha anche $[\alpha, \beta] \subset f(A)$, da cui la conclusione. $\square$

Dati due sottoinsiemi $A, B \subset \mathbb{R}^n$, una funzione $f : A \rightarrow B$ si dirà *omeomorfismo* se è continua, biiettiva e con inversa continua. Due sottoinsiemi $A, B \subset \mathbb{R}^n$ si diranno *omeomorfi* se esiste un omeomorfismo tra essi. Il significato è quello che A e B , pur essendo eventualmente diversi, sono in realtà “topologicamente equivalenti”: in effetti, un omeomorfismo preserva le proprietà topologiche (un sottoinsieme $A' \subset A$ è aperto, chiuso, connesso, compatto, etc. se e solo se lo è $f(A') \subset B$).

Omeomorfismo

Esempi. **(1)** $A = \mathbb{R}^n$ è omeomorfo ad una palla aperta $B = B(0, r)$, con $f(\underline{x}) = \frac{r}{1+\|\underline{x}\|} \underline{x}$ (da cui $f^{-1}(\underline{y}) = \frac{1}{r-\|\underline{y}\|} \underline{y}$). **(2)** In $\mathbb{R}^2$, un quadrato pieno $\{|x| + |y| < 1\}$ è omeomorfo ad un disco pieno $B(0, 1)$, e idem per i corrispondenti insiemi con il bordo incluso; inoltre, un disco bucato $B(0, 1) \setminus \{0\}$ è omeomorfo ad una corona circolare $B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2})$ (si provino queste affermazioni per esercizio). Provare poi (magari aiutandosi con un disegno) che un quadrato bucato $A = \{|x| + |y| < 1\} \setminus \{0\}$ è omeomorfo ad una corona circolare $B = B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2})$. **(3)** Si consideri la sfera n -dimensionale $\mathbb{S}^n = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\underline{x}\| = 1\}$, e sia $\underline{n} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ il suo “polo Nord”. Si dimostra che $A = \mathbb{S}^n \setminus \{\underline{n}\}$ (la sfera privata di un punto) è omeomorfa a $\mathbb{R}^n$ tramite la *proiezione stereografica* $\pi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, che manda un punto $\underline{x} \in A$ nell'unico punto del “piano orizzontale” $x_{n+1} = 0$ (identificabile a $\mathbb{R}^n$) che sta sulla retta passante per

$\underline{x}$ e $\underline{n}$. In coordinate, se $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in A$ allora $\pi(\underline{x}) = (\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}, 0)$, mentre se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ allora $\pi^{-1}(\alpha) = (\frac{1}{|\alpha|^2+1}(2\alpha_1, \dots, 2\alpha_n, |\alpha|^2 - 1))$. Ad esempio, per $n = 1$ si ha $\pi(x, y) = (\frac{x}{1-y}, 0)$ e $\pi^{-1}(\alpha) = (\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}, \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1})$; mentre per $n = 2$ si ha $\pi(x, y, z) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0)$ e $\pi^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) = (\frac{2\alpha_1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+1}, \frac{2\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+1}, \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2-1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+1})$.



(a) Proiezione stereografica per S^1 . (b) Proiezione stereografica per S^2 .