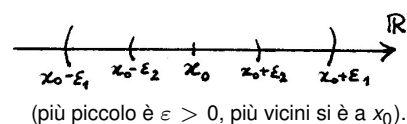


Indice

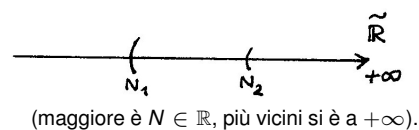
- 0 Presentazione
- 1 Integrazione generalizzata
- 2 Equazioni differenziali: primi elementi
- 3 Curve parametriche affini
- 4 Topologia degli spazi affini**
- 5 Calcolo differenziale negli spazi affini
- 6 Varietà differenziali affini

La topologia di $\mathbb{R}$ e $\tilde{\mathbb{R}}$

Topologia della retta reale $\mathbb{R}$: la vicinanza a x_0 è data dagli **intervalli centrati** $B(x_0, \varepsilon) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$



Topologia della retta reale estesa $\tilde{\mathbb{R}}$: ad es., la vicinanza a $+\infty$ è data dalle **semirette** $]N, +\infty[$



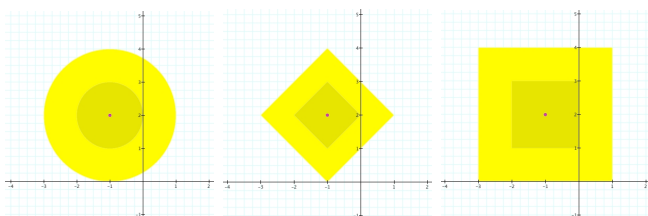
Come visto, da questa nozioni di vicinanza se ne ricavano **molte altre**:

- sottoinsiemi **aperti** e **chiusi** di $\mathbb{R}$ e $\tilde{\mathbb{R}}$; **interni** di $x_0 \in \mathbb{R}$ e di $\mp\infty$;
- sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ **connessi**, **limitati**, **compatti**;
- punti **interni**, **isolati**, di **chiusura**, di **accumulazione** per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$;
- **limite di una successione** $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$;
- **limite di una funzione di variabile reale** $f(x)$ in un punto di accumulazione del dominio; **continuità** di $f(x)$ in un punto del dominio.

La topologia di $\mathbb{R}^n$ e di $\overline{\mathbb{R}^n}$

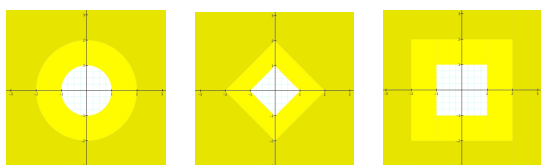
Analogamente, una norma $\|\cdot\|$ su $\mathbb{R}^n$ dà una **topologia su $\mathbb{R}^n$** :

la vicinanza a $\underline{x}_0$ è data dalle **palle centrate** $B(\underline{x}_0, \varepsilon) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \varepsilon\}$



Palle centrate in $\underline{x}_0 = (-1, 2)$ di raggi $\varepsilon = 2$ (tutto il giallo) e $\varepsilon = 1$ (solo giallo scuro) rispetto alle norme euclidea, perimetrale e del massimo.

Quanto all'infinito, **non ha più senso parlare di $\mp\infty$ in $\mathbb{R}^n$ se $n \geq 2$** .
Si ha $\overline{\mathbb{R}^n}$ aggiungendo a $\mathbb{R}^n$ **un solo punto infinitamente lontano ∞_n** :



la vicinanza a ∞_n è data dalle **corone illimitate** $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x}\| > N\}$

Corone illimitate con $N = 1$ (tutto il giallo) e $N = 2$ (solo giallo scuro) rispetto alle tre norme.

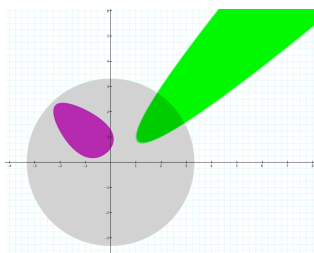
A proposito: **a cosa assomiglia $\overline{\mathbb{R}^n}$** ? (Pensare ai casi $n = 1$ e $n = 2$...)

La topologia di $\mathbb{R}^n$ e di $\overline{\mathbb{R}^n}$

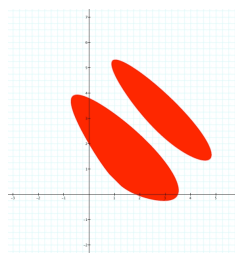
Con la topologia, si possono definire **le stesse nozioni del caso $n = 1$** :

- sottoinsiemi **aperti** e **chiusi** di $\mathbb{R}^n$ e $\overline{\mathbb{R}^n}$; **interni** di $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e di ∞_n ;
- sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ **connessi**, **limitati**, **compatti**;
- punti **interni**, **isolati**, di **chiusura**, di **accumulazione** per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$;
- **limite di una successione** $(\underline{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} = ((x_1)_k, \dots, (x_n)_k)$ in $\mathbb{R}^n$;
- **limite di una funzione di n variabili reali** $f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ in un punto di accumulazione del dominio; **continuità** di $f(\underline{x})$ in un punto del dominio.

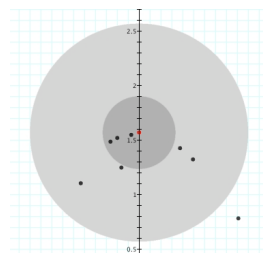
Formalmente, le definizioni sono **circa le stesse** del caso $n = 1$...



Sottoinsiemi limitati e non



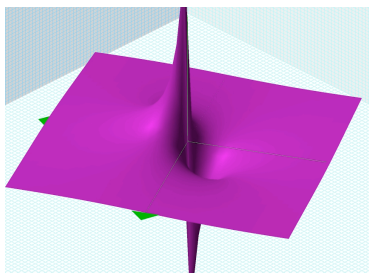
Sottoinsieme sconnesso

 $\underline{x}_n = (\frac{\sin 2n}{\sqrt{n}}, \arctg n)$ converge a $(0, \frac{\pi}{2})$

La topologia di $\mathbb{R}^n$ e di $\overline{\mathbb{R}^n}$

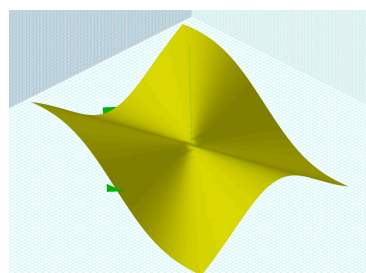
... ma l'**aumentato numero di variabili** rende **più delicato il loro uso** !

Vediamo un paio di **esempi eloquenti** ...



$$f : \mathbb{R}_\times^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

- **$f(x, y)$ non ha limite in $(0, 0)$**
(è nulla sull'asse y , e tende a $\mp\infty$ lungo l'asse x)
- **$f(x, y)$ ha limite 0 in ∞_2**
(in coord. polari: $|f(x, y)| = \frac{|\cos \theta|}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} 0$)



$$g : \mathbb{R}_\times^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

- **$g(x, y)$ ha limite 0 in $(0, 0)$**
(in polari, o $|f(x, y)| = |y| \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} |y| \rightarrow 0$)
- **$g(x, y)$ non ha limite in ∞_2**
(è nulla sugli assi, ma tende a $\mp\infty$ lungo $y = x$)