Analisi Matematica II (Fisica e Astronomia)

Autoverifica sulla topologia degli spazi affini

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09

giovedì 7 maggio 2009

Istruzioni generali. **(1)** Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento (che sarà dato sabato 09/05). **(2)** Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato. **(3)** Da sabato 09/05 fino a lunedì 11/05 sarà possibile, seguendo il link che sarà attivato il 09/05 nella pagina web, comunicare via web in forma anonima i risultati dell'autovalutazione esercizio per esercizio, assieme a eventuali commenti. Nella comunicazione online dell'autovalutazione non vanno indicati i punteggi facoltativi: inserire eventuali informazioni a riguardo nel campo "Commenti".

Istruzioni per l'autovalutazione. **Ex. 1:** 36 pt (4×9). **Ex. 2:** 30 pt (3×10). **Ex. 3:** 34 pt (4×8,5). **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sé quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.

Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in una seduta da 3 ore, o in due sedute da 2 ore).

1. Per ciascuna delle funzioni che seguono, specificare il dominio e studiare i limiti proposti (con più opzioni).

$$(i) \lim_{(0,0); (1,3); \infty_2} \frac{x^2 y - x - 2}{1 - x}; \quad (ii) \lim_{(0,0); \infty_2} (3x^4 + y^2 - 1 + y^3 e^{1-x^2-y^2});$$
$$(iii) \lim_{(0,0); \infty_2} \left(x^2 + |y|, \frac{x^2}{1 + |x|}, \frac{1 - e^{-|y|}}{x^2 + 2y^2} \right); \quad (iv) \lim_{(0,0,0); (0,-1,-1); \infty_3} \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{|x|}.$$

2. Per ciascuna delle funzioni che seguono, specificare il dominio naturale, studiare il segno e dire se è possibile estendere la funzione per continuità in qualche punto di accumulazione del dominio.¹

$$(i) \sqrt{\frac{x-1}{y}} - 1; \quad (ii) \frac{y e^{x+y}}{\sin(xy)}; \quad (iii) \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^3 + y^2}.$$

3. Per ognuno degli insiemi che seguono tracciare (se possibile) un disegno e dire se è aperto, chiuso, compatto, connesso (per archi).

$$(i) A = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 \leq 4, |x + y| \geq 1\}; \quad (ii) B = \{(x, y) : xy > 3, 3y > x^2\};$$
$$(iii) C = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2 - 1, x^2 + z^2 < 4\}; \quad (iv) D = \{(x, y, z) : y^2 |z| \geq 1, x^2 + y^2 + z^2 \geq 9\}.$$

¹Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e $\underline{x}_0$ è un punto di accumulazione per D , si dice che si può *estendere* f per continuità in $\underline{x}_0$ col valore ℓ se esiste *finito* il limite $\ell = \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x})$. Formalmente, ciò significa che la funzione $\tilde{f} : D \cup \{\underline{x}_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $\tilde{f}(\underline{x}) = f(\underline{x})$ se $\underline{x} \in D$, e $\tilde{f}(\underline{x}_0) = \ell$, è continua.

Soluzioni.

1. (i) La funzione è definita e continua fuori dalla retta $x = 1$, dunque il limite in $(0, 0)$ vale -2 . Tendendo a $(1, 3)$ lungo la retta $y = 3$ si ottiene $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{1 - x} = 5$, mentre lungo $y = x + 2$ si ha $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x+2) - x - 2}{1 - x} = -6$; dunque il limite in $(1, 3)$ non esiste. Infine, tendendo a ∞_2 ad esempio lungo l'asse x si ha $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - 2}{1 - x} = 1$, e lungo l'asse y si ha $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-2}{1} = -2$, dunque il limite in ∞_2 non esiste.

(ii) La funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque il limite in $(0, 0)$ vale -1 . Tendendo poi a ∞_2 lungo una qualsiasi retta il limite è $+\infty$ (verificare prima lungo $x = k$ e poi lungo $y = mx + q$), dunque è probabile che il limite valga $+\infty$. In effetti, passando in coordinate polari si ha $3x^4 + y^2 - 1 + y^3 e^{1-x^2-y^2} = 3\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta - 1 - \rho^3 \sin^3 \theta e^{1-\rho^2} = \rho^2(3\rho^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta - \frac{1}{\rho^2} - \rho e^{1-\rho^2} \sin^3 \theta)$: si noti che per $\rho \rightarrow +\infty$ i termini $-\frac{1}{\rho^2}$ e $\rho e^{1-\rho^2} \sin^3 \theta$ sono infinitesimi, mentre $3\rho^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta$ è lontana da 0 per ogni valore di θ (infatti per $\rho > 1$ è $\geq 3 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta$, funzione che ha minimo assoluto $\frac{11}{12}$). Ne segue che $\lim_{\rho \rightarrow +\infty, \theta \in [0, 2\pi[} \rho^2(3\rho^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta - \frac{1}{\rho^2} - \rho e^{1-\rho^2} \sin^3 \theta) = +\infty$.

(iii) La funzione $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)) = (x^2 + |y|, \frac{x^2}{1+|x|}, \frac{1-e^{-|y|}}{x^2+2y^2})$ è definita e continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ed a valori vettoriali (in $\mathbb{R}^3$): dunque ricordiamo che

- (1) un limite di f esiste finito e vale $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{R}^3$ se e solo se esistono finiti i corrispondenti limiti delle tre componenti f_1, f_2, f_3 e valgono rispettivamente ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 ;
- (2) un limite di f esiste e vale ∞_3 se e solo il corrispondente limite di $\|f\|$ è $+\infty$ (e ciò accade, ad esempio, se il limite di almeno una tra $|f_1|, |f_2|, |f_3|$ esiste ed è $+\infty$).

Per continuità si ha $\lim_{(0,0)} (x^2 + |y|) = 0$ e $\lim_{(0,0)} \frac{x^2}{1+|x|} = 0$; d'altra parte $\frac{1-e^{-|y|}}{x^2+2y^2}$ è nulla sull'asse x , mentre tendendo a $(0, 0)$ lungo l'asse y si ha $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-e^{-|y|}}{2y^2} = \infty$. Dunque $\lim_{(0,0)} f_3(x, y)$ non esiste; se ne deduce che non esiste nemmeno $\lim_{(0,0)} f(x, y)$.

Quanto a ∞_2 , notiamo che $\lim_{\infty_2} f_1(x, y) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow +\infty \\ \theta \in [0, 2\pi[}} \rho(\rho \cos^2 \theta + |\sin \theta|) = +\infty$: pertanto già possiamo affermare che $\lim_{\infty_2} f(x, y) = \infty_3$, indipendentemente da ciò che succede per $\lim_{\infty_2} f_2(x, y)$ e $\lim_{\infty_2} f_3(x, y)$. Per inciso, notiamo che $\lim_{\infty_2} f_2(x, y)$ non esiste (infatti su una retta verticale $x = k$ la funzione $f_2(x, y)$ vale la costante $\frac{k^2}{1+|k|}$ dipendente da k , dunque tendendo a ∞_2 lungo $x = k$ si ottengono limiti diversi al variare di k) mentre $\lim_{\infty_2} \frac{1-e^{-|y|}}{x^2+2y^2} = 0$ perché $\left| \frac{1-e^{-|y|}}{x^2+2y^2} \right| \leq \frac{1}{x^2+y^2}$.

(iv) La funzione è definita (e continua) in $\mathbb{R}^3$ tranne che sul piano $x = 0$. Tendendo a $(0, 0, 0)$ lungo gli assi coordinati si ha limite nullo, e lo stesso accade lungo una qualsiasi retta per l'origine (verificare); nonostante ciò, è abbastanza chiaro che il limite in $(0, 0, 0)$ non può essere 0 (dunque non può esistere), perché la funzione diverge a ∞ quando (x, y, z) si avvicina troppo al piano $x = 0$: formalmente, tendendo a $(0, 0, 0)$ ad esempio lungo l'arco di cubica $x = y^3$ sul piano $z = 0$ si ottiene $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^6 - 2y^2}{|y^3|} = -\infty$. Quando si tende al punto $(0, -1, -1)$, invece, il numeratore tende sempre a -1 ed il denominatore a 0^+ , e dunque il limite vale senz'altro $-\infty$. Infine, per ∞_2 consideriamo alcune restrizioni della funzione a curve illimitate sul piano $z = 0$: sull'asse x si ottiene $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{|x|} = +\infty$, sulla retta $x = 1$ si ha $\lim_{y \rightarrow \infty} (-2y^2) = -\infty$, e sulla retta $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$ si ottiene $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2}{|x|} = 0$. Ciò mostra che il limite in ∞_2 non esiste.

2. (i) La funzione è definita e continua nel dominio $D = \{(x, y) : x \geq 1, y > 0\} \cup \{(x, y) : x \leq 1, y < 0\}$, ed è ≥ 0 nei punti del dominio tali che $0 < y \leq x - 1$ oppure $x - 1 \leq y < 0$. I punti di $\mathbb{R}^2$ che sono di accumulazione ma che non stanno in D sono dunque quelli dell'asse x . Tendendo ad un punto $(x_0, 0)$ (con $x_0 \neq 1$) lungo la retta $x = x_0$ si ha $\lim_{y \rightarrow 0} (\sqrt{\frac{x_0 - 1}{y}} - 1) = \infty$, dunque in tali punti non si può estendere per continuità. La stessa cosa vale per il punto $(1, 0)$: ciò si dimostra semplicemente notando che in ogni intorno di $(1, 0)$ in $\mathbb{R}^2$ vi sono punti del tipo $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 1$ nei quali la funzione diverge (dunque il limite in $(1, 0)$ non può essere finito); alternativamente, se si tende a $(1, 0)$ lungo la retta $y = m(x - 1)$ si ha $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{\frac{x - 1}{m(x - 1)}} - 1) = \frac{1}{\sqrt{m}} - 1$, che varia con m . Dunque non si può estendere la funzione per continuità in alcun punto.

(ii) La funzione è definita e continua su $\mathbb{R}^2$ tranne i punti (x, y) per cui $\sin(xy) = 0$, ovvero i punti che stanno sugli assi coordinati e sulle iperboli $xy = k\pi$ con $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, ed è ≥ 0 nei punti del dominio in cui $y > 0$ e $2k\pi < xy < \pi + 2k\pi$ oppure in cui $y < 0$ e $\pi + 2k\pi < xy < 2\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Tra tutti i punti fuori dal dominio, quelli in cui il numeratore non è infinitesimo non hanno certo speranze di estendibilità, dunque

occupiamoci dei soli punti dell'asse x . Consideriamo $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$: essendo $\sin(xy) \sim_{y \rightarrow 0} xy$ il limite è certamente finito e vale $\frac{e^{x_0}}{x_0}$ (formalmente: $|\frac{\sin(xy)}{y} - x_0| = |\frac{\sin(xy) - xy + xy - x_0 y}{y}| \leq |\frac{\sin(xy) - xy}{y}| + |x - x_0| = |\frac{xy \cdot o_0(xy)}{y}| + |x - x_0| = |x \cdot o_0(xy)| + |x - x_0| \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow (x_0, 0)$); invece, tendendo a $(0, 0)$ lungo la bisettrice $y = x$ si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{2x}}{\sin(x^2)} = \infty$. Dunque si può prolungare la funzione per continuità ai soli punti dell'asse x diversi dall'origine: se $(x_0, 0)$ è uno di essi, il valore di estensione è $\frac{e^{x_0}}{x_0}$.

(iii) La funzione è definita e continua su $\mathbb{R}^2$ tranne che nei punti della curva cuspidale $C = \{(x, y) : x \leq 0, y = \pm|x|\sqrt{-x}\}$, ed è < 0 per $(x \leq 0$ e $-|x|\sqrt{-x} < y < |x|\sqrt{-x})$. Se (x_0, y_0) è un punto di C diverso da $(0, 0)$ si ha $x_0^2 + y_0^2 > 0$ e dunque la funzione diverge. Invece, in $(0, 0)$ il limite si presenta in forma indeterminata. Sull'asse y si ha $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(2y^2)^2}{y^2} = 0$, e su una retta $y = mx$ si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2m^2 x^2)^2}{x^3 + m^2 x^2} = 0$: dunque sembrerebbe che il limite sia 0. Passando in coordinate polari, si trova $\frac{\rho^2}{\rho \cos^3 \theta + \sin^2 \theta}$, che però stavolta non si riesce a maggiorare con una funzione infinitesima in (ρ, θ) (quando $\rho \rightarrow 0^+$ e $\theta \in [0, 2\pi[$). In effetti tutti questi sforzi sono inutili, in quanto il limite in $(0, 0)$ non può essere 0 (e dunque non esiste) per il motivo già detto in (i): in ogni intorno di $(0, 0)$ vi sono punti di C diversi da $(0, 0)$ nei quali la funzione diverge.

3. (i) A è la parte di area ellittica $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \leq 1$ (di semiassi 2 e $\sqrt{2}$), bordo compreso, che sta sopra la retta $y = -x + 1$ e sotto la retta $y = -x - 1$, segmenti compresi. Esso è chiuso (disequazioni late con funzioni continue) e compatto (chiuso e limitato), ma non connesso (ha due componenti).

(ii) B è la porzione di piano oltre l'iperbole $xy = 3$ (esclusa) e dentro la parabola $y = \frac{x^2}{3}$ (esclusa). Esso è aperto (disequazioni strette con funzioni continue), non compatto (si noti che non è né chiuso né limitato), e connesso (per archi).

(iii) C è la porzione di superficie di paraboloidi $z = x^2 + y^2 - 1$ che sta all'interno del cilindro aperto pieno illimitato $x^2 + z^2 < 4$ (che ha l'asse y come asse, e il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 2 nel piano (x, z) come sezione). Ne risulta un insieme che non è né aperto (non ha punti interni in $\mathbb{R}^3$) né chiuso (i punti che stanno sia sulla superficie del paraboloidi che sulla superficie cilindrica sono punti di chiusura per B ma non stanno in B), dunque non è compatto (pur essendo limitato), ed è connesso (per archi).

(iii) D è la parte del complementare in $\mathbb{R}^3$ della palla aperta di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 3 che sta sopra la superficie $z = \frac{1}{y^2}$ e sotto la superficie $z = -\frac{1}{y^2}$ (invarianti rispetto a x), compresi i pezzi di superfici. Ne risulta un insieme chiuso, non compatto (perché illimitato) e non connesso (ha quattro componenti).