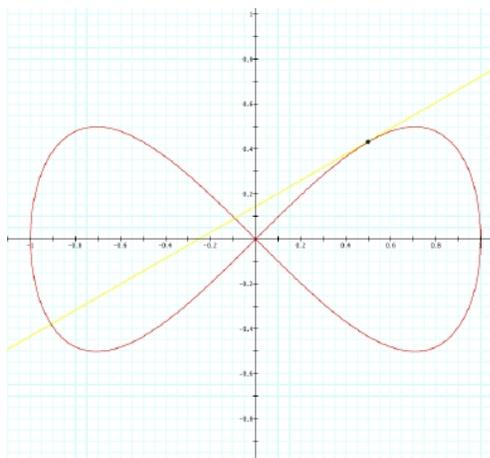
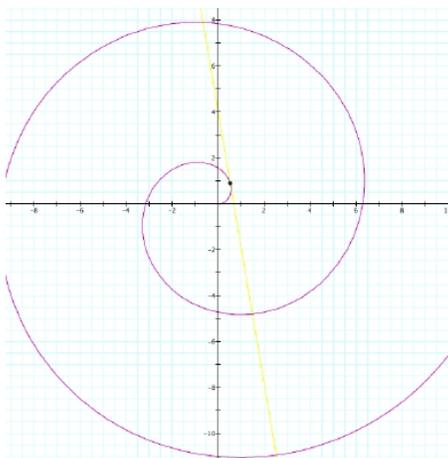


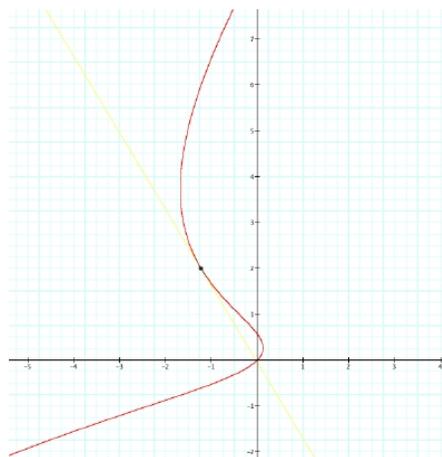
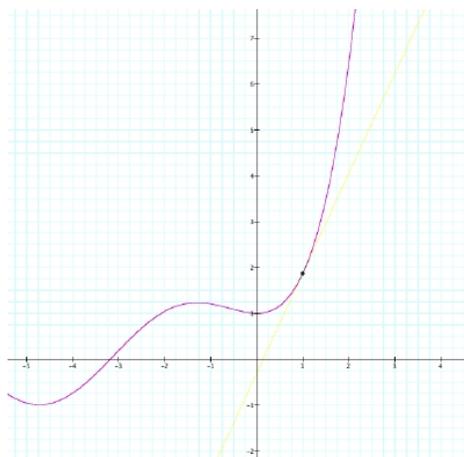
Analisi Matematica II (Fisica e Astronomia)

Varietà differenziali nello spazio affine: alcuni esempi

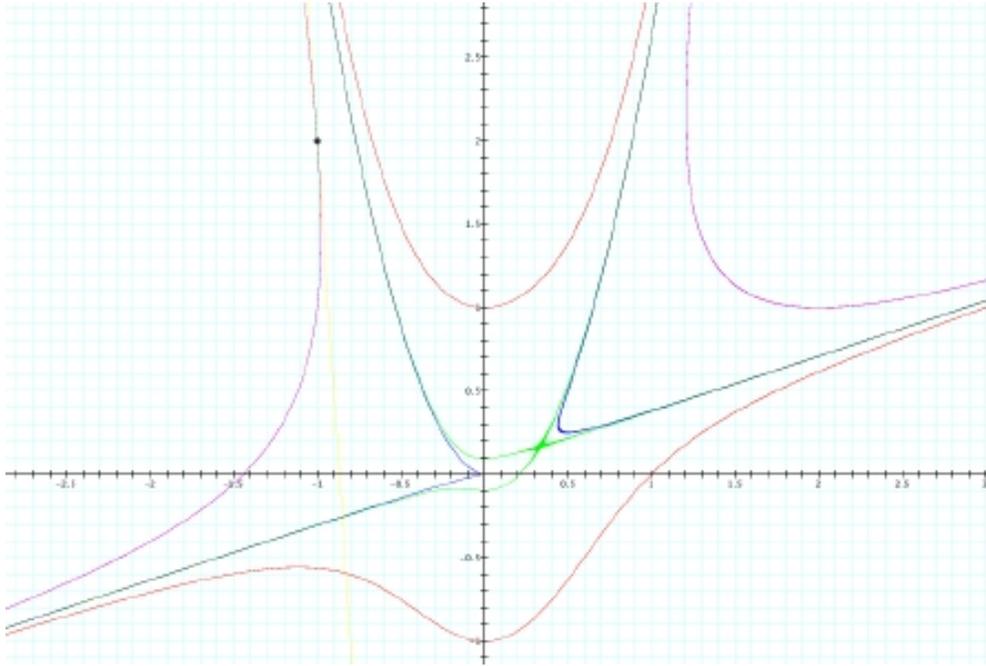
Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09



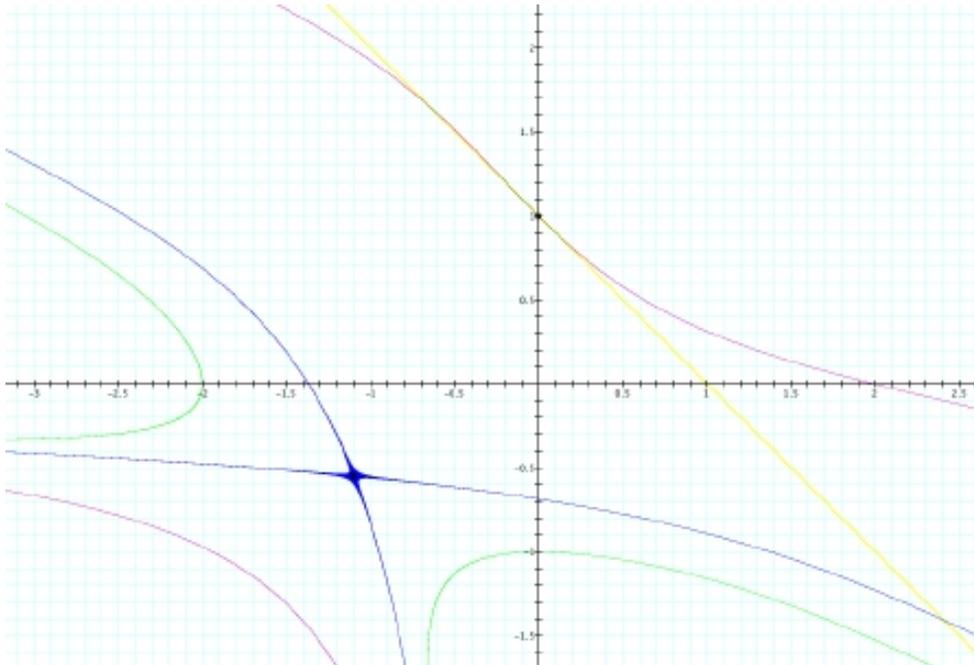
Curve piane in forma parametrica. (1) La spirale di Archimede $\rho(\theta) = \theta$, parametrizzata con $\gamma(\theta) = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta)$. Sia $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$: vale allora $\gamma(\theta_0) = (x_0, y_0) = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi\sqrt{3}}{6})$, e da $\gamma'(\theta) = (\frac{dx}{d\theta}(\theta), \frac{dy}{d\theta}(\theta)) = (\cos \theta - \theta \sin \theta, \sin \theta + \theta \cos \theta)$ si ha $\gamma'(\theta_0) = (-\frac{\pi\sqrt{3}-3}{6}, \frac{\pi+3\sqrt{3}}{6})$. La retta tangente in $\gamma(\theta_0)$ (gialla) in forma parametrica è dunque $\{\gamma(\theta_0) + \lambda\gamma'(\theta_0) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi\sqrt{3}}{6}) + \lambda(-\frac{\pi\sqrt{3}-3}{6}, \frac{\pi+3\sqrt{3}}{6}) : \lambda \in \mathbb{R}\}$: eliminando il parametro λ si ottiene l'equazione cartesiana $y = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi+3\sqrt{3}}{\pi\sqrt{3}-3}(x - \frac{\pi}{6})$. Passiamo ora ad una forma grafico. Essendo $\frac{dx}{d\theta}(\theta_0) = -\frac{\pi\sqrt{3}-3}{6} \neq 0$, si può invertire localmente $x(\theta)$ ottenendo $\theta(x)$ con $\theta(x_0) = \theta_0$ e $\frac{d\theta}{dx}(x_0) = \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}(\theta_0)} = -\frac{6}{\pi\sqrt{3}-3}$: si ottiene allora la forma grafico $y(\theta(x))$ con $y(x_0) = y_0$ e $\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{dy}{d\theta}(\theta_0) \frac{d\theta}{dx}(x_0) = \frac{\frac{dy}{d\theta}(\theta_0)}{\frac{dx}{d\theta}(\theta_0)} = -\frac{\pi+3\sqrt{3}}{\pi\sqrt{3}-3}$, e la consueta espressione della retta tangente $y = y_0 + \frac{dy}{dx}(x_0)(x - x_0)$ dà il risultato precedente. **(2)** La curva-otto $\gamma(t) = (\sin t, \sin t \cos t)$. Ragionando come prima, la retta tangente in $\gamma(\frac{\pi}{6}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ (gialla) risulta $y = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{2x-1}{2\sqrt{3}}$.



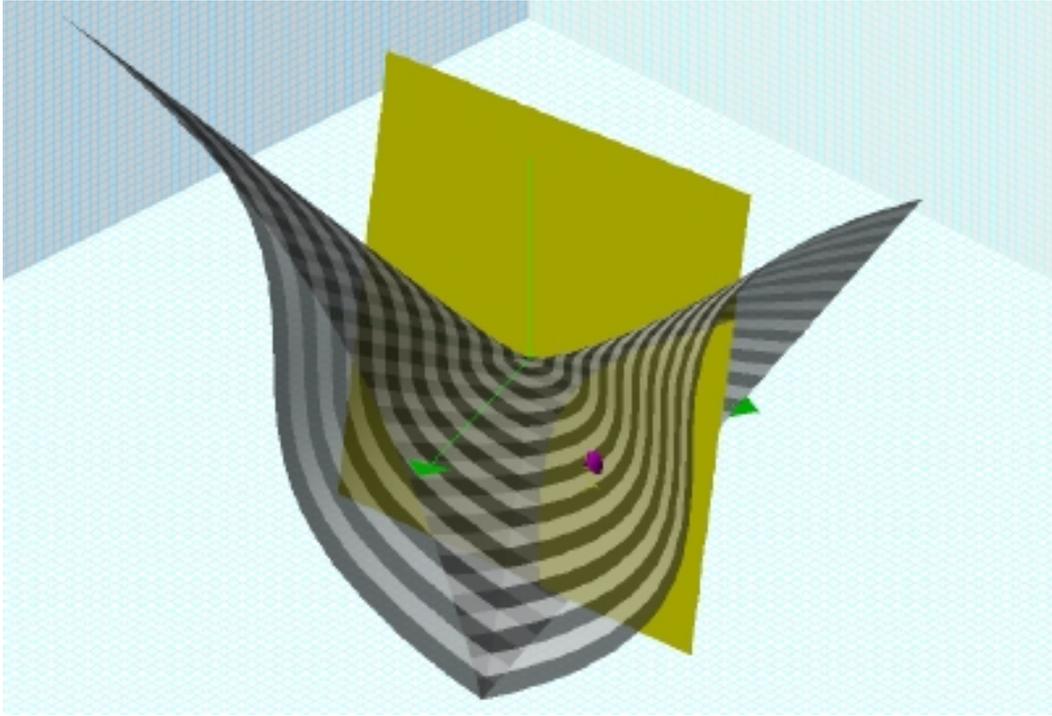
Curve piane in forma grafico. (1) Grafico di $\phi(x) = e^x - \sin x$ (in giallo la retta tangente $y - \phi(1) = \phi'(1)(x - 1)$ in $(1, \phi(1))$). **(2)** Grafico di $\psi(y) = y - 2 \log(y^2 + 1)$ (in giallo la retta tangente $x - \psi(2) = \psi'(2)(y - 2)$ in $(\psi(2), 2)$).



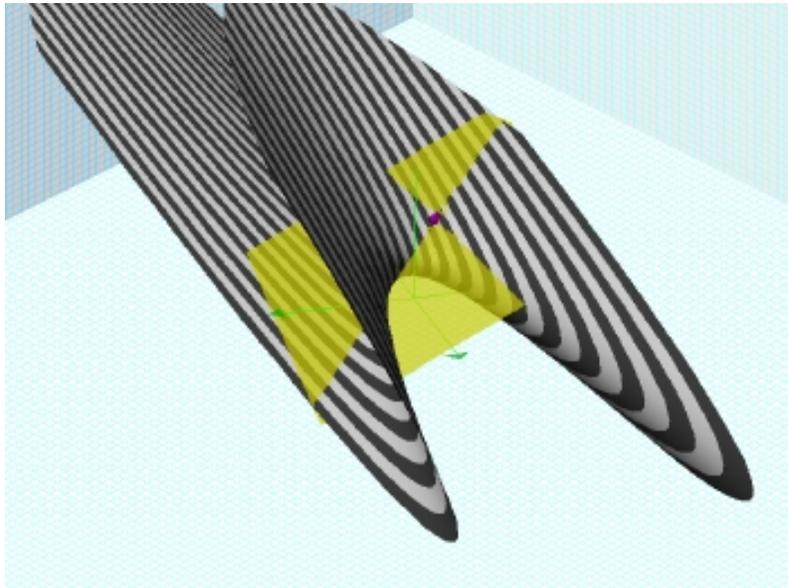
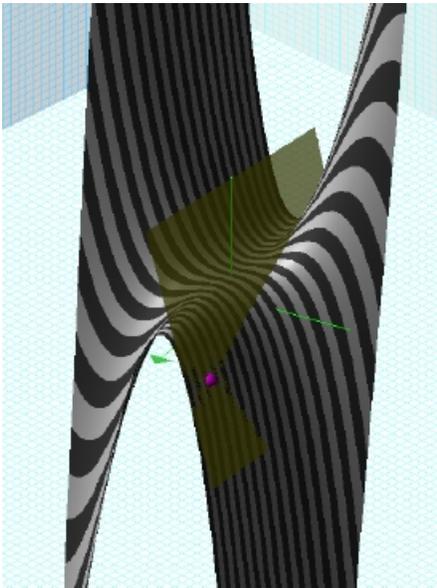
Curve piane in forma cartesiana. (1) Esaminiamo le curve di livello $g(x, y) = \alpha$ di $g(x, y) = x^3 - 3x^2y + y^2$. Si ha $\nabla g = (3x^2 - 6xy, -3x^2 + 2y) = (0, 0)$ se e solo se $(x, y) = (0, 0)$ oppure $(x, y) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$: poiché $g(0, 0) = 0$ e $g(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}) = \frac{1}{108}$, tutte le curve con $\alpha \neq 0, \frac{1}{108}$ saranno regolari (ad esempio lo è quella rossa, con $\alpha = 1$); invece le curve di livello 0 (blu) e $\frac{1}{108}$ (verde) avranno con ogni probabilità dei punti singolari rispettivamente in $(0, 0)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, e il disegno lo dimostra. Il punto $(-1, 2)$ sta nella curva di livello $\alpha = g(-1, 2) = -3$ (porpora); la retta tangente (gialla) è data da $\{\nabla g(-1, 2) \cdot (x - (-1), y - 2) = 0\}$, ovvero $(15, 1) \cdot (x + 1, y - 2) = 0$, che dà $15x + y + 13 = 0$. Passiamo ora ad una forma grafica. Da $\frac{\partial g}{\partial y}(-1, 2) = 1$, per il Teorema del Dini si può esplicitare $y(x)$ vicino a $x = -1$, con $y(-1) = 2$ e $y'(-1) = -\frac{15}{1} = -15$, e la consueta espressione della retta tangente $y = y(-1) + y'(-1)(x - (-1))$ dà il risultato precedente.



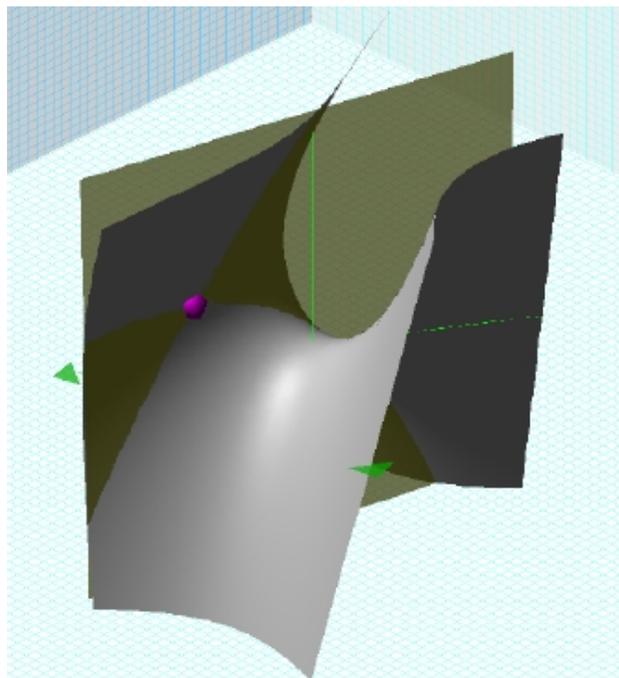
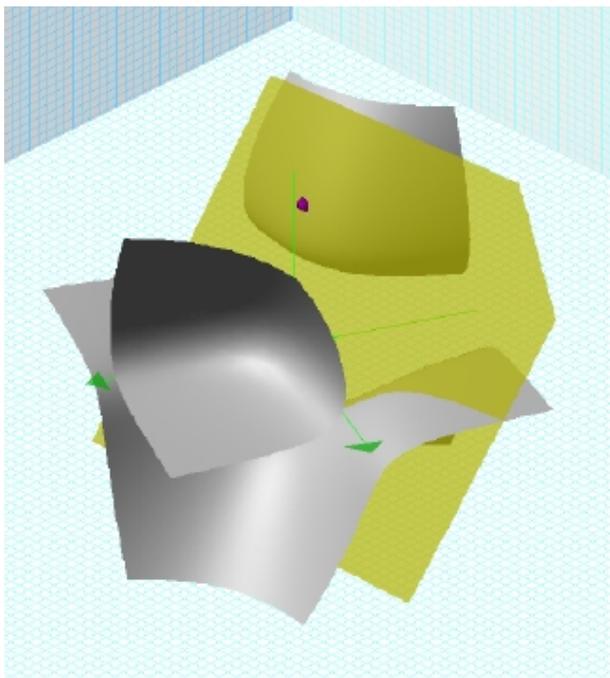
(2) Curve di livello $g(x, y) = \alpha$ di $g(x, y) = e^{xy} + x + 2y$: $\alpha = 3$ (porpora; in giallo la retta $x + y - 1 = 0$, tangente nel punto $(0, 1)$); $\alpha = -1$ (verde); $\alpha = \alpha_0$ (blu; singolare nel punto $(x_0, \frac{x_0}{2})$ tale che $e^{\frac{x_0^2}{2}} = -\frac{2}{x_0}$).



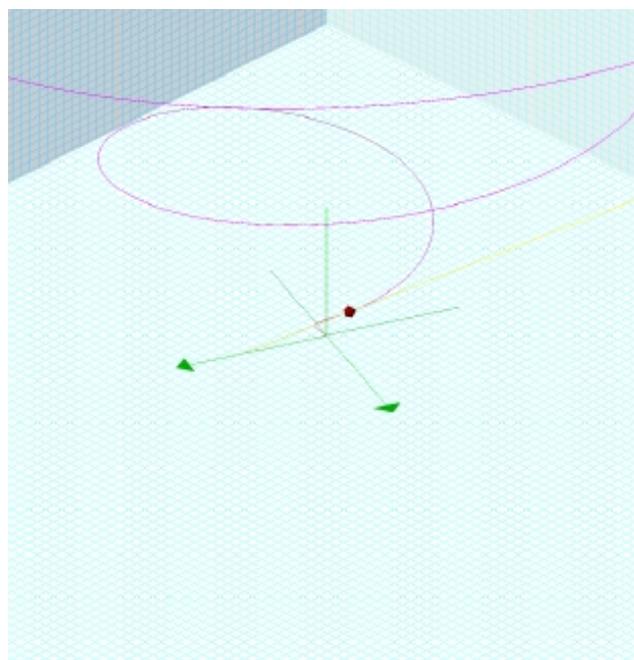
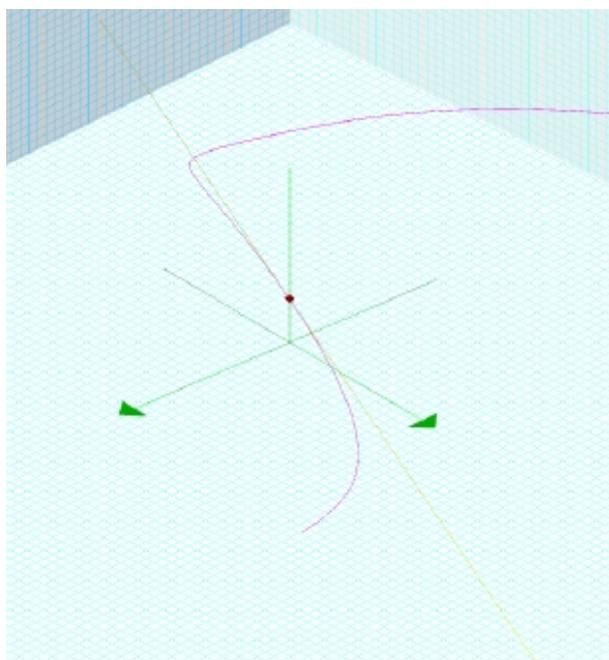
Superficie di \mathbb{R}^3 in forma parametrica. Superficie parametrica $\gamma(u, v) = (u^2, 4u + v^3, 3uv)$. Il solo punto (u, v) in cui γ non è immersiva (ovvero, in cui $d\gamma_{(u,v)}$ ha rango < 2) è $(u, v) = (0, 0)$, tuttavia la parametrizzazione non è iniettiva (la superficie si autointerseca) in tutti i punti corrispondenti ai parametri del tipo $(u, v) = \pm(u, -\sqrt[3]{4u})$, che stanno sulla curva $\begin{cases} y = 0 \\ z = -3(2x)^{2/3} \text{ (con } x \geq 0) \end{cases}$. Non è tra questi il punto $(1, 3, -3) = \gamma(1, -1)$ (porpora), in cui la superficie è regolare. Si ha $d\gamma_{(1,-1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, perciò il piano tangente alla superficie in $(1, 3, -3)$ (giallo) risulta, in forma parametrica, $\{(x, y, z) = (1, 3, -3) + \lambda(2, 4, -3) + \mu(0, 3, 3) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, ovvero $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 + 4\lambda + 3\mu \\ z = -3 - 3\lambda + 3\mu \end{cases}$: eliminando i parametri λ e μ si ottiene l'equazione cartesiana $7x - 2y + 2z + 5 = 0$.



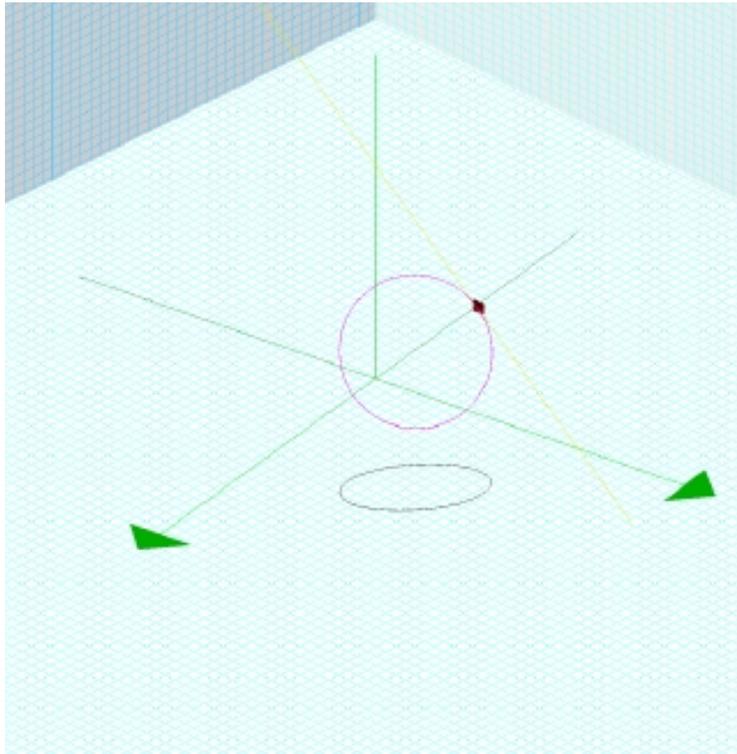
Superficie di \mathbb{R}^3 in forma grafico. (1) Grafico di $\phi(x, y) = \frac{x^3 - 2x^2y + 3}{4}$, e piano tangente $15x - 2y - 4z + 17 = 0$ (giallo) in $(-1, 3, -1)$ (porpora). (2) Grafico di $\phi(x, z) = x^2 - 2(z-1)^2$, e piano tangente $2x + y + 4z - 5 = 0$ (giallo) in $(-1, -1, 2)$ (porpora).



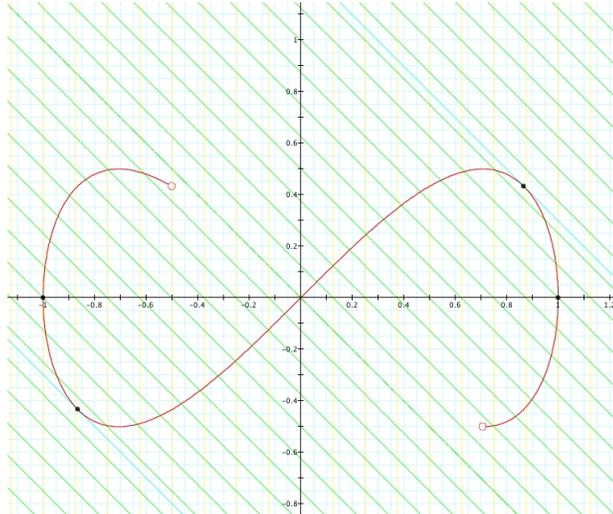
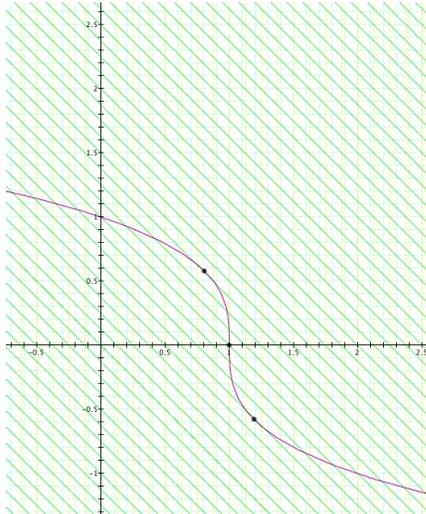
Superficie di \mathbb{R}^3 in forma cartesiana. (1) La superficie di livello $3xyz - z^3 = 4$, e il piano tangente $2x + y + z + 2 = 0$ (giallo) nel punto $(-1, -2, 2)$ (porpora). (2) La superficie di livello $\log(xy + z) - x + y - z = -3$, e il piano tangente $x - 3y - 2 = 0$ (giallo) nel punto $(2, 0, 1)$ (porpora).



Curve di \mathbb{R}^3 in forma parametrica e in forma grafico. (1) Curva in forma parametrica $\gamma(t) = (t - \log(1+t), t^2 - 3t, 2t + \cos t)$ (per $t > -1$), e retta tangente $\begin{cases} x = 0 \\ 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$ (gialla) nel punto $\gamma(0) = (0, 0, 1)$ (rosso). (2) Curva in forma grafico $(x, y) = (z \cos z, z \sin z)$, e retta tangente $\begin{cases} y = -\frac{\pi}{2}(z - \frac{\pi}{2}) \\ y = z \end{cases}$ (gialla) nel punto $(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (rosso).



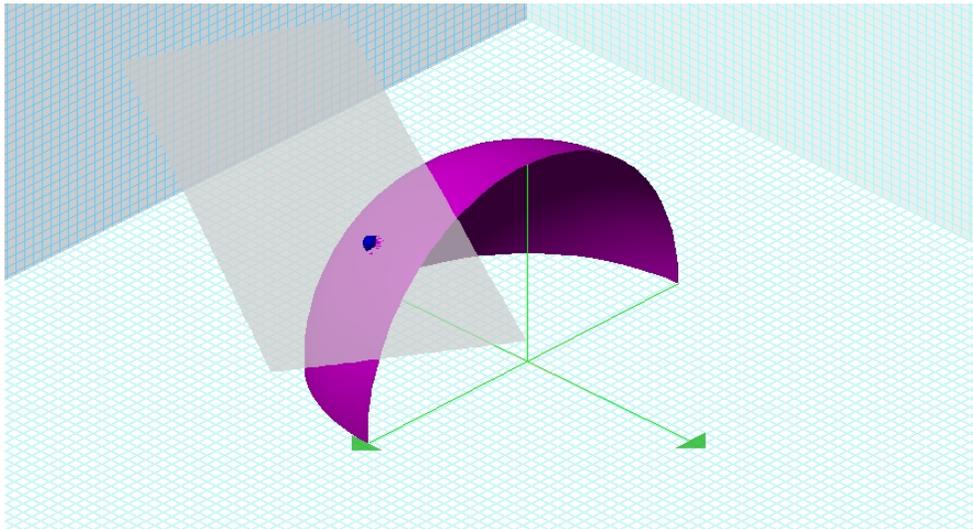
Curve di \mathbb{R}^3 in forma cartesiana. Curva cartesiana $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + xz + yz = 8 \end{cases}$ (porpora; la sua proiezione sul piano orizzontale $z = 0$, cioè l'ellisse $x^2 + xy + y^2 - 5x - 5y + 8 = 0$, è in nero), e retta tangente $\begin{cases} y + z = 4 \\ x = 1 \end{cases}$ (gialla) nel punto $(1, 2, 2)$ (rosso).



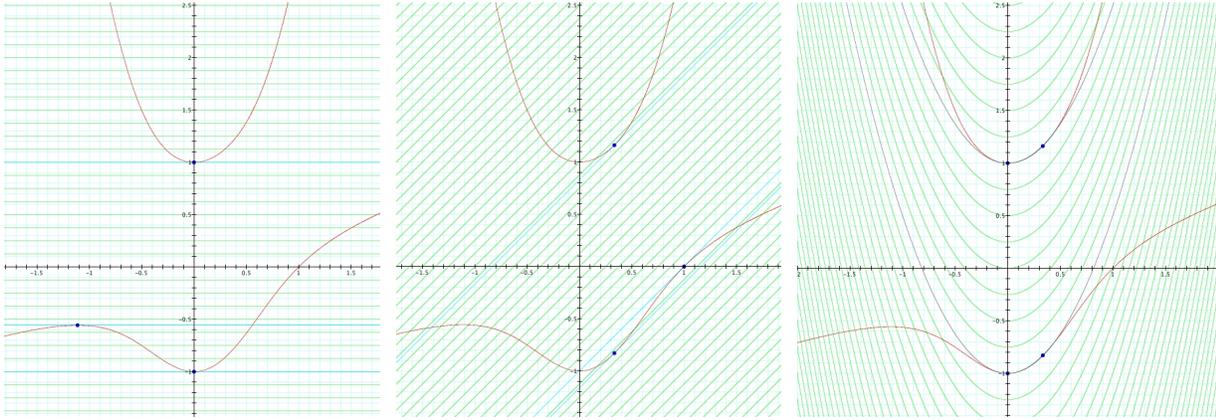
Estremi locali di una funzione scalare su una varietà in forma parametrica. Studiare gli estremi locali di una funzione scalare $f(x_1, \dots, x_n)$ su una varietà $X \subset \mathbb{R}^n$ in forma parametrica $\gamma : V \rightarrow X$ (con V aperto di \mathbb{R}^m) equivale a studiare gli estremi locali di $f \circ \gamma : V \rightarrow \mathbb{R}$: e per quest'ultima, definita su un aperto, si possono usare i metodi già noti (derivate parziali, Hessiano...).

(1) Le curve di livello $f(x, y) = k$ delle funzioni $f_1(x, y) = x + y$ e $f_2(x, y) = x$ sono rappresentate risp. in verde e in giallo. Il grafico X della funzione $x = 1 - y^3$ (porpora) è parametrizzato globalmente da $\gamma(y) = (1 - y^3, y)$ con $y \in \mathbb{R}$, dunque si ha $f_1 \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $(f_1 \circ \gamma)(y) = f_1(1 - y^3, y) = 1 - y^3 - y$, che ha massimo e minimo locale risp. per $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$: ne ricaviamo che i punti $\gamma(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = (1 + \frac{\sqrt{3}}{9}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ e $\gamma(\frac{\sqrt{3}}{3}) = (1 - \frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ sono risp. di massimo e minimo locale per f su X . Procedendo similmente per $f_2(x, y) = x$ si ottiene il solo punto $\gamma(0) = (1, 0)$, che però è una sella (è chiaro che cercare gli estremi locali della funzione x equivale a cercare i punti che sono localmente estremità est o ovest di X , ma non ce ne sono).

(2) Studiare gli estremi locali di una funzione $f(x, y)$ sul pezzo di curva-otto $\gamma(t) = (\sin t, \sin t \cos t)$ dato da $-\frac{5\pi}{6} < t < \frac{3\pi}{4}$ (rosso) equivale a studiare gli estremi locali di $F(t) := f(\sin t, \sin t \cos t)$ per $-\frac{5\pi}{6} < t < \frac{3\pi}{4}$. Per $f_1(x, y) = x + y$ si ha un massimo/minimo locale (in realtà globale) in $\gamma(\pm\frac{\pi}{3})$, mentre per $f_2(x, y) = x$ si ha un massimo/minimo locale (in realtà globale) in $\gamma(\pm\frac{\pi}{2})$.

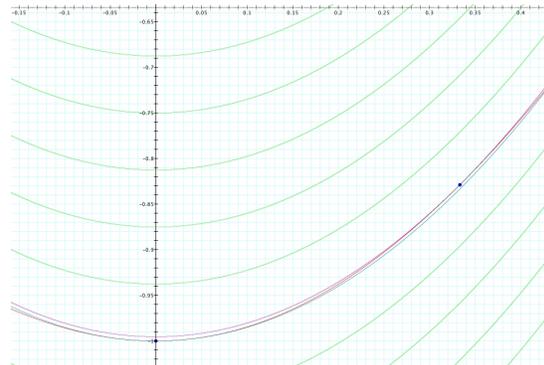
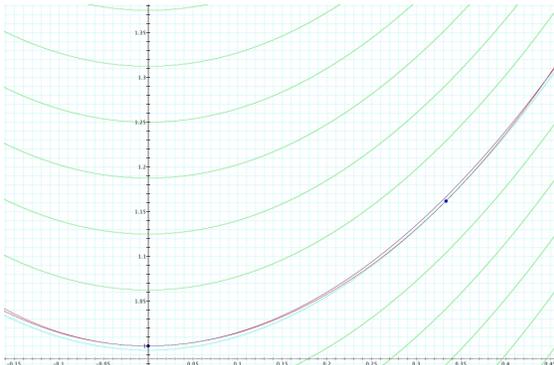


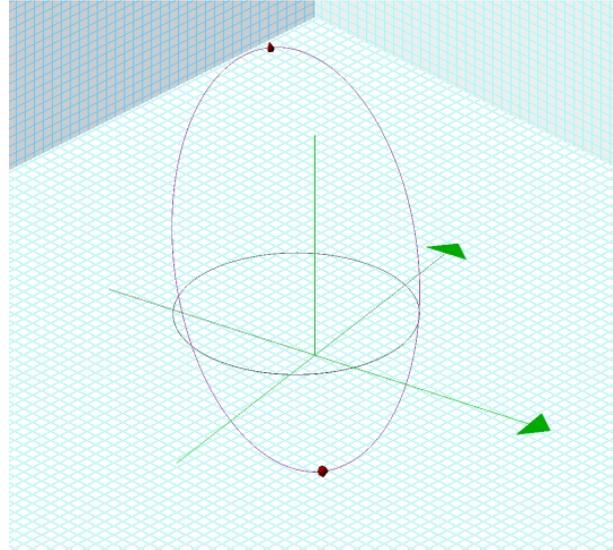
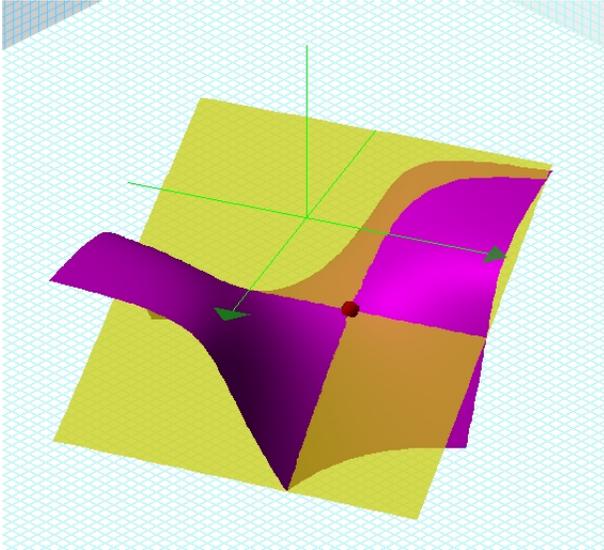
(3) Il settore S_0 (porpora) di superficie sferica di centro $(0, 0)$ e raggio R (privo di contorno) dato da $y < 0$ e $z > 0$ è parametrizzato globalmente dalle coordinate sferiche (θ, φ) tramite $\gamma(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi)$ con $-\pi < \theta < 0$ e $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Studiare gli estremi locali su S_0 di $f(x, y, z) = \sqrt{3}x - y + 2z$ equivale perciò a studiare gli estremi locali di $F(\theta, \varphi) = R(\sqrt{3} \cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \sin \varphi + 2 \cos \varphi)$ con $-\pi < \theta < 0$ e $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, e ciò si può fare con la consueta tecnica dell'Hessiano: si trova solo un massimo locale $2R\sqrt{2}$ (in realtà globale) per $(\theta, \varphi) = (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$, che dà il punto $(\frac{\sqrt{6}}{4}R, -\frac{\sqrt{2}}{4}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R)$ (in rosso; un pezzo della superficie di livello passante per esso è in grigio).



Estremi locali di una funzione scalare su una varietà in forma cartesiana. Per individuare i punti stazionari si usa il metodo dei *moltiplicatori di Lagrange*; una volta trovati, per capirne la natura (cioè se siano punti di massimo/minimo locale oppure selle) è ancora necessaria una parametrizzazione locale attorno a ciascuno di essi, con la quale ricondursi al caso precedente.

(1.a) Le curve di livello di $f(x, y) = y$ sono rappresentate in verde. La curva $X = \{(x, y) : x^3 - 3x^2y + y^2 = 1\}$ è regolare; cercare gli estremi locali di f su X equivale a trovarne i punti che sono localmente estremità nord o sud. Il metodo di Lagrange porge i punti stazionari $A(0, 1)$, $B(0, -1)$ e $C(2\alpha, \alpha)$, ove α è l'unica soluzione reale dell'equazione $4t^3 - t^2 + 1 = 0$ (vale $\alpha \sim -0,55$). Serve ora una parametrizzazione di X all'intorno di questi punti: posto $g(x, y) = x^3 - 3x^2y + y^2 - 1$ (dunque $X = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$), poiché $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y - 3x^2$ non si annulla in nessuno di essi, al loro intorno da $g(x, y) = 0$ si può sempre esplicitare $y = y(x)$. Ad esempio, attorno $A(0, 1)$ si ricava $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 3$, ed usiamo allora questa parametrizzazione locale per studiare cosa succede per $F(x) := f(x, y(x)) = y(x)$ vicino a $x = 0$. Da $F'(x) = y'(x)$ si ricava $F'(0) = y'(0) = 0$ (come prevedibile), e da $F''(x) = y''(x)$ si ricava $F''(0) = y''(0) = 3 > 0$, che ci dice che $x = 0$ è di minimo locale stretto per $F(x)$: pertanto A è di minimo locale stretto per $f(x, y) = y$ su X (con quota $f(A) = y_A = 1$). Calcoli analoghi mostrano che B e C sono risp. di minimo e massimo locale stretto, come conferma il disegno. **(1.b)** Sulla stessa curva X cerchiamo eventuali estremi locali di $f(x, y) = x - y$, le cui curve di livello $x - y = k$ sono ancora rappresentate in verde. Il metodo di Lagrange porge i punti stazionari $D(1, 0)$, $E(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}(1 + \sqrt{\frac{107}{3}}))$ e $L(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}(1 - \sqrt{\frac{107}{3}}))$ e, come prima, attorno ad essi da $g(x, y) = 0$ si può esplicitare $y = y(x)$. Ad esempio, attorno $D(1, 0)$ si ricava $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$ e $y''(1) = -\frac{4}{3}$, dunque considerando $F(x) := f(x, y(x)) = x - y(x)$ si ha $F'(x) = 1 - y'(x)$ e $F''(x) = -y''(x)$, da cui $F'(1) = 1$, $F'(1) = 0$ (ovvio) e $F''(1) = \frac{4}{3} > 0$: questo ci dice che $F(x)$ ha un minimo locale stretto per $x = 1$, dunque lo stesso accade per f su X nel punto D (con valore $f(A) = x_A - y_A = 1$). Calcoli analoghi mostrano che E e L sono entrambi di massimo locale stretto, come conferma il disegno. **(1.c)** Una ricerca analoga per $f(x, y) = 3x^2 - 2y$ dà i punti stazionari A, B, E e L già trovati nei casi precedenti, ma stavolta l'analisi della loro natura è piuttosto difficoltosa: infatti $F(x) = f(x, y(x)) = 3x^2 - 2y(x)$ ha la derivata seconda che si annulla in $x = 0$ e $x = \frac{1}{3}$, dunque bisogna andare oltre. Ad esempio, per A si trova $F(0) = -2$, $F'(0) = F''(0) = 0$ e $F'''(0) = 12 \neq 0$, da cui si deduce che $x = 0$ è una sella per $F(x)$ (dunque A è una sella per f su X). Lo stesso si trova per B , mentre E e L risultano risp. di massimo e minimo locale stretto. Il disegno conferma la difficoltà di comprendere la natura di questi punti stazionari: infatti, attorno ad essi, la curva X e le curve di livello di f sono osculanti, e solo un forte ingrandimento locale (qui sotto a sinistra per A e E , a destra per B e L) mostra la loro natura confermando quanto appena detto.





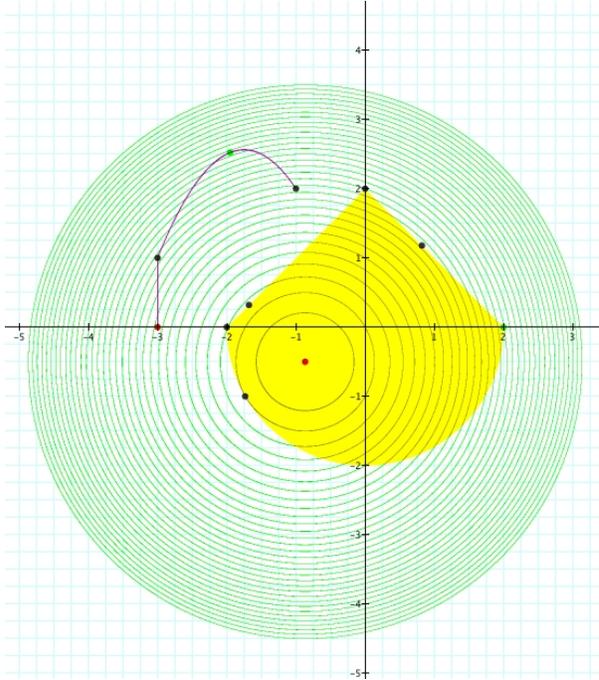
(2) La ricerca dei punti stazionari di $f(x, y, z) = x + 2z$ sulla superficie regolare $X = \{(x, y, z) : 3xyz - z^3 = 1\}$ (porpora) col metodo di Lagrange dà il solo punto $A(0, \frac{1}{2}, -1)$, di cui cerchiamo ora di comprendere la natura tramite una parametrizzazione locale. Posto $g(x, y, z) = 3xyz - z^3 - 1$, poiché $\frac{\partial g}{\partial z}(A) = 3x_A y_A - 3z_A^2 = -3 \neq 0$, da $g(x, y, z) = 0$ si può esplicitare $z = z(x, y)$ all'intorno di A con $z(0, \frac{1}{2}) = -1$; i calcoli danno poi $\nabla z(0, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, 0)$ e $H_z(0, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Considerando allora $F(x, y) := f(x, y, z(x, y)) = x + 2z(x, y)$ si ha $F(0, \frac{1}{2}) = f(0, \frac{1}{2}, -1) = -2$, $\nabla F(0, \frac{1}{2}) = (1 + 2\frac{\partial z}{\partial x}(0, \frac{1}{2}), 2\frac{\partial z}{\partial y}(0, \frac{1}{2})) = (0, 0)$ (ovvio) e $H_F(0, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, \frac{1}{2}) & 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, \frac{1}{2}) \\ 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, \frac{1}{2}) & 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, \frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$: essendo $H_F(0, \frac{1}{2})$ indefinita, il punto $(0, \frac{1}{2})$ è una sella per F (e perciò

lo stesso è A per f su X). Il disegno mostra chiaramente la correttezza di questa conclusione: la superficie di livello di f attraverso A (ovvero il piano $x + 2z = -2$, in giallo), all'intorno di A (punto rosso) sta parzialmente sopra e parzialmente sotto X .

(3) La curva X di \mathbb{R}^3 definita cartesianamente da $\{(x, y, z) : 2xy + z^2 = 3, x - y + z + 1 = 0\}$ è regolare (infatti la funzione di definizione $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $g(x, y, z) = (2xy + z^2 - 3, x - y + z + 1)$ è sommersiva in ogni punto di X); cerchiamone le estremità locali in alto e in basso, ovvero determiniamo gli estremi locali di $f(x, y, z) = z$ su X . Il metodo di Lagrange porge i punti $A(\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} + 1, -2\sqrt{2} + 1)$ e $B(-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1, 2\sqrt{2} + 1)$, di cui ora proviamo a comprendere la natura. Da $J_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 2z \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ si ricava $J_g(A) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} + 2 & 2\sqrt{2} - 2 & -4\sqrt{2} + 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, ed essendo $\det \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} - 2 & -4\sqrt{2} + 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -2\sqrt{2} \neq 0$ si può esplicitare localmente $(y, z) = (y(x), z(x))$ all'intorno di $x = x_A = \sqrt{2} - 1$, con $(y(x_A), z(x_A)) = (y_A, z_A)$, ed i conti danno $(y'(x_A), z'(x_A)) = (1, 0)$ e $(y''(x_A), z''(x_A)) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$: dunque, considerata $F(x) := f(x, y(x), z(x)) = z(x)$, essendo $F'(x) = z'(x)$ e $F''(x) = z''(x)$ si ha $F'(x_A) = 0$ (ovvio) e $F''(x_A) = \sqrt{2} > 0$, da cui $x = x_A = \sqrt{2} - 1$ è di minimo locale stretto per F (e lo stesso vale per f su X in A). Perciò A è un'estremità locale in basso per X , e calcoli simili dicono che B è un'estremità locale in alto per X . È il caso infine di fare due osservazioni.

- La varietà X è *compatta*: è infatti chiusa perché definita da equazioni continue, ed anche limitata, come vediamo ora. Sostituendo $z = y - x - 1$ in $2xy + z^2 = 3$ si ricava la proiezione di X sul piano orizzontale, ovvero la curva piana $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ che è la circonferenza di centro $(-1, 1)$ e raggio 2: si ha dunque $-3 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 3$ e dunque $-3 \leq z \leq 5$. Essendo f continua, il Teorema di Weierstrass assicura pertanto l'esistenza di massimo e minimo assoluti di f su X , che non sono altro che i valori assunti nei punti B e A , ovvero $f(A) = z_A = -2\sqrt{2} + 1$ e $f(B) = z_B = 2\sqrt{2} + 1$. Il disegno (in cui X è l'ellisse in porpora, la sua proiezione è in nero ed i punti A e B in rosso) mostra chiaramente quanto affermato.
- Grazie a quanto appena detto, volendo si può anche *parametrizzare* X come $\gamma(t) = (-1 + 2 \cos t, 1 + 2 \sin t, (1 + 2 \sin t) - (-1 + 2 \cos t) - 1) = (-1 + 2 \cos t, 1 + 2 \sin t, 1 - 2 \cos t + 2 \sin t)$, dunque la ricerca degli estremi di $f(x, y, z) = z$ su X può essere fatta tramite $F(t) := f(\gamma(t)) = z(t) = 1 - 2 \cos t + 2 \sin t$. Quest'ultima funzione ha massimo e minimo assoluti assunti risp. per $t = \frac{3\pi}{4}$ e $t = -\frac{\pi}{4}$, che corrispondono ai punti B e A di X : ciò conferma quanto trovato in precedenza.

Estremi assoluti di una funzione scalare su un compatto di \mathbb{R}^n . Per cercare gli estremi assoluti di una funzione scalare differenziabile $f(x_1, \dots, x_n)$ su un sottoinsieme compatto $X \subset \mathbb{R}^n$, può essere conveniente decomporre X come unione disgiunta di varietà $X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_p$ (ad esempio, ciò succede se X è una *varietà con bordo*: in tal caso $X = X_1 \sqcup X_2$, dove $\dim X_1 = \dim X$ (punti interni di X) e $\dim X_2 = \dim X - 1$ (punti del bordo di X).¹); fatto questo, basta cercare i punti stazionari su ciascuna delle singole varietà X_1, X_2, \dots, X_p usando i metodi appresi (in questo modo si individuano tutti e soli i candidati ad essere punti di estremo assoluto su X), e poi confrontare i valori di f in essi per vedere in quali diventa massima e minima.

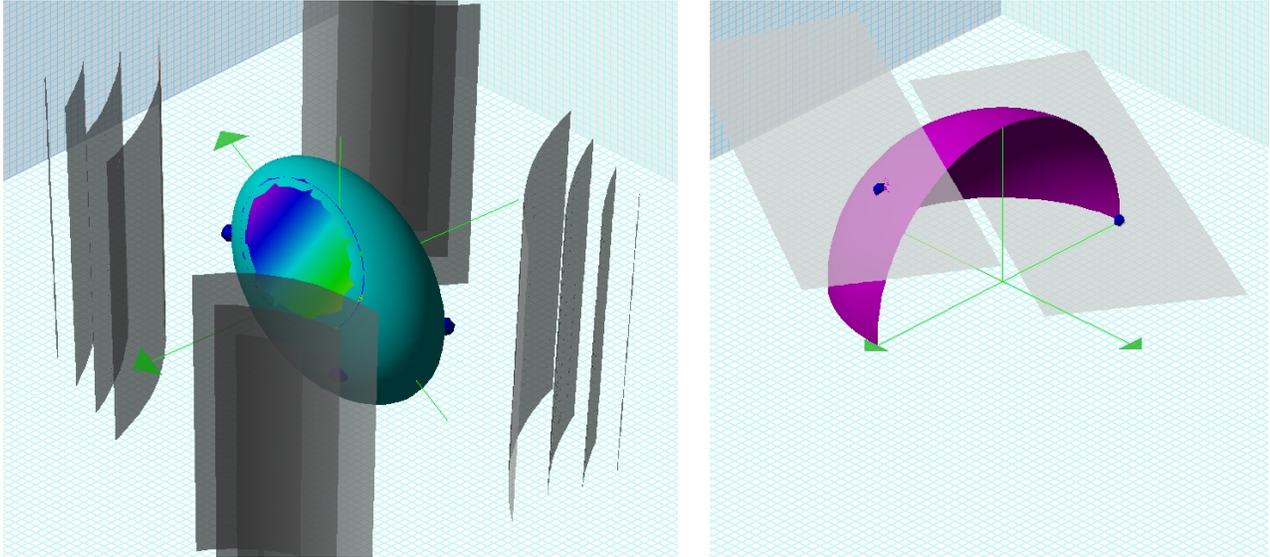


(1.a) Il sottoinsieme del piano cartesiano $X = \{(x, y) : y \leq 2 - |x|, x^2 + y^2 \leq 4\}$ (rappresentato in giallo) è compatto: infatti è chiuso perché definito da disuguaglianze continue larghe, e limitato perché contenuto nel cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 2. Per cercare gli estremi assoluti su X di $f(x, y) = x^2 + y^2 + \sqrt{3}x + y$ (le cui curve di livello –circonferenze centrate in $D(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ – sono in verde), decomponiamo X come unione disgiunta di $X_1 = \{(x, y) : y < 2 - |x|, x^2 + y^2 < 4\}$ (punti interni, varietà di dimensione 2), $X_2 = \{(x, y) : y = 2 - |x|, x^2 + y^2 < 4, x < 0\}$ (segmento aperto da $A(-2, 0)$ a $B(0, 2)$, varietà di dimensione 1), $X_3 = \{(x, y) : y = 2 - |x|, x^2 + y^2 < 4, x > 0\}$ (segmento aperto da B a $C(2, 0)$, varietà di dimensione 1), $X_4 = \{(x, y) : y = 2 - |x|, x^2 + y^2 = 4\}$ (arco di circonferenza da A a C , varietà di dimensione 1) e $X_5 = \{(-2, 0), (0, 2), (2, 0)\}$ (i tre punti A, B e C , varietà di dimensione 0). I punti stazionari di f sull'aperto X_1 si trovano con consueto metodo

dell'Hessiano, che dà il previsto centro $D(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$. Le curve X_2, X_3 e X_4 si parametrizzano facilmente, e su di esse si trovano i punti stazionari $E(-\frac{5+\sqrt{3}}{4}, \frac{3-\sqrt{3}}{4})$ (su X_2), $L(\frac{5-\sqrt{3}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4})$ (su X_3) e $M(-\sqrt{3}, -1)$ (su X_4). Infine, i punti dell'insieme discreto X_5 sono da considerarsi tutti stazionari. Essendo $f(A) = 4 - 2\sqrt{3}$, $f(B) = 6$, $f(C) = 4 + 2\sqrt{3}$, $f(D) = -1$, $f(E) = \frac{5(2-\sqrt{3})}{4}$, $f(L) = \frac{5(2+\sqrt{3})}{4}$ e $f(M) = 0$, il massimo e minimo assoluti di f su X sono risp. $4 + 2\sqrt{3}$ (assunto in C) e -1 (assunto in D).

(1.b) Anche il sottoinsieme $Y = \{(x, y) : 2x^2 + 7x + 2y + 1 = 0, -3 \leq x \leq -1\} \cup \{(-3, t) : 0 \leq t \leq 1\}$ (curva di estremi $P(-3, 0)$ e $Q(-1, 2)$ spezzata in $R(-3, 1)$, rappresentata in porpora) è un compatto del piano cartesiano. Per trovare gli estremi di f su esso conviene decomporlo in $Y_1 = \{(x, y) : 2x^2 + 7x + 2y + 1 = 0, -3 < x < -1\}$ (arco di parabola senza estremi, varietà di dimensione 1), $Y_2 = \{(-3, t) : 0 < t < 1\}$ (segmento senza estremi, varietà di dimensione 1) e $Y_3 = \{(-3, 0), (-3, 1), (-1, 2)\}$ (i tre punti P, Q e R , varietà di dimensione 0). Le curve Y_1 e Y_2 si parametrizzano facilmente; su Y_2 non si trova nessun punto stazionario (ragionando con Lagrange, ciò è sensato: in nessun punto di Y_1 il raggio uscente da D è ortogonale a Y_1 ...), mentre su Y_1 si ha la funzione $F(x) := f(x, -x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(4x^3 + 28x^2 + 53x - 1)$, che tra -3 e -1 ha un solo estremo locale α (studiando la derivata $F'(x)$ si nota che vale circa $\alpha \sim -1,9$ e che si tratta di un massimo locale con $F(\alpha) \sim 9,31$), corrispondente al punto stazionario $N(\alpha, -\alpha^2 - \frac{7}{2}\alpha - \frac{1}{2})$ di f su Y_1 , con $f(N) = F(\alpha)$. D'altra parte, per l'insieme discreto Y_3 vale $f(P) = 3(3 - \sqrt{3})$, $f(R) = 11 - 3\sqrt{3}$ e $f(Q) = 7 - \sqrt{3}$: essendo dunque $f(P) < f(Q) < f(R) < f(N)$, il massimo e minimo assoluti di f su X sono risp. $f(N) \sim 9,31$ (assunto in N) e $3(3 - \sqrt{3}) \sim 4$ (assunto in P).

¹Vediamo due esempi nel piano cartesiano. (a) Se $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ è il cerchio chiuso di centro $(0, 0)$ e raggio 1, si ha $X_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ (cerchio aperto) e $X_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ (circonferenza). (b) Se $X = \{(t, t+2) : -2 \leq t \leq 1\}$ è il segmento chiuso da $(-2, 0)$ a $(1, 3)$, si ha $X_1 = \{(t, t+2) : -2 < t < 1\}$ (segmento aperto) e $X_2 = \{(-2, 0), (1, 3)\}$ (i due soli estremi).



(2) Il sottoinsieme $X = \{(x, y, z) : x^2 + 3y^2 + 2z^2 \leq 2, y + z \leq 1\}$ (ellissoide pieno azzurro, segato dal piano traslucente) è un compatto di \mathbb{R}^3 . Per trovare gli estremi assoluti su esso della funzione $f(x, y, z) = xy$ (le cui superfici di livello sono grigie) conviene decomporre X nelle varietà $X_1 = \{(x, y, z) : x^2 + 3y^2 + 2z^2 < 2, y + z < 1\}$ (punti interni, aperto di \mathbb{R}^3), $X_2 = \{(x, y, z) : x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 2, y + z < 1\}$ (superficie dell'ellissoide senza bordo superiore, varietà di dimensione 2), $X_3 = \{(x, y, z) : x^2 + 3y^2 + 2z^2 < 2, y + z = 1\}$ (pezzo ellittico di piano senza bordo, varietà di dimensione 2) e $X_4 = \{(x, y, z) : x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 2, y + z = 1\}$ (l'ellisse ottenuta intersecando la superficie dell'ellissoide col piano, varietà di dimensione 1). Nell'aperto X_1 , usando il metodo consueto si trovano come punti stazionari quelli che stanno sull'asse z , che però possiamo già escludere perché l'Hessiano è ovunque indefinito (in particolare, non potranno essere estremanti assoluti per f). Su X_2 , il metodo di Lagrange dà i cinque punti stazionari $A(0, 0, -1)$, $B_{++} = (1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$, $B_{+-} = (1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$, $B_{-+} = (-1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ e $B_{--} = (-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ (gli ultimi quattro sono rappresentati in blu nel disegno); il pezzo di piano X_3 è facilmente parametrizzabile con le coordinate (x, y) (la sua proiezione orizzontale è l'aperto V ottenuto ponendo $z = 1 - y$ nella disequazione $x^2 + 3y^2 + 2z^2 < 2$, ovvero l'ellisse piena $V = \{(x, y) : x^2 + 5y^2 - 4y < 0\}$), ma $F(x, y) := f(x, y, 1 - y) = xy$ non ha punti stazionari in V ; infine, usando ancora Lagrange, sull'ellisse X_4 si trovano i punti stazionari $C(0, 0, 1)$, $D_+ = (\frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ e $D_- = (-\frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$. Essendo $f(A) = f(C) = 0$, $f(B_{++}) = f(B_{--}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $f(B_{+-}) = f(B_{-+}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $f(D_+) = \frac{3\sqrt{15}}{25}$ e $f(D_-) = -\frac{3\sqrt{15}}{25}$, ed essendo $\frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{3\sqrt{15}}{25}$, ne ricaviamo che il massimo e minimo assoluti di f su X sono risp. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (assunto in B_{++} e B_{--}) e $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (assunto in B_{+-} e B_{-+}).

(3) Consideriamo il settore S (porpora) di superficie sferica di centro $(0, 0)$ e raggio R dato da $y \leq 0$ e $z \geq 0$. Si tratta del settore S_0 già incontrato in precedenza, ma stavolta con i punti del bordo inclusi: questa novità fa sì che S diventi chiuso, dunque (essendo limitato) un compatto di \mathbb{R}^3 . La funzione $f(x, y, z) = \sqrt{3}x - y + 2z$ che avevamo considerato su S_0 assumerà perciò estremi assoluti su S , che ora andiamo a calcolare. Conviene decomporre S nell'unione della stessa S_0 (varietà di dimensione 2), della semicirconferenza S_1 sul piano orizzontale senza estremi (varietà di dimensione 1), della semicirconferenza S_2 sul piano verticale senza estremi (varietà di dimensione 1) e di $S_3 = \{A(R, 0, 0), B(-R, 0, 0)\}$ (i due punti singolari, varietà di dimensione 0). Su S_0 abbiamo già trovato il punto stazionario $C(\frac{\sqrt{6}}{4}R, -\frac{\sqrt{2}}{4}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R)$ (ricordiamo che C è di massimo locale -anzi, addirittura assoluto perlomeno su S_0^- , dunque è candidato solo ad essere punto di massimo assoluto per f su S). Parametrizzando S_1 con l'angolo θ (dunque $\gamma(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$ con $-\pi < \theta < 0$) si ottiene il punto stazionario $D(\frac{\sqrt{3}}{2}R, -\frac{1}{2}R, 0)$. Usando invece il metodo di Lagrange per S_2 (dato da $g(x, y, z) = (x^2 + z^2 - R^2, y) = (0, 0)$ con $z > 0$) si ottiene il punto $E(\frac{\sqrt{21}}{7}R, 0, \frac{\sqrt{14}}{7}R)$. Infine, entrambi i punti A e B di S_3 vanno considerati stazionari. Essendo allora $f(A) = R\sqrt{3}$, $f(B) = -R\sqrt{3}$, $f(C) = 2R\sqrt{2}$, $f(D) = 2R$ e $f(E) = R\sqrt{7}$, ne ricaviamo che il massimo e minimo assoluti di f su S sono risp. $2R\sqrt{2}$ (assunto in C , che si conferma dunque punto di massimo assoluto anche su tutto S) e $-R\sqrt{3}$ (assunto in B).