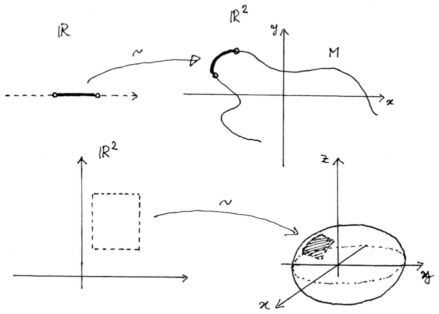
In questo documento pdf si troveranno:

- *Varietà differenziali affini* (note pagg. 75–96; totale n. 22 pagine);
- *Indice delle note del corso* (note pagg. 1–2; n. 02 pagine).

6 Calcolo differenziale sulle varietà

Una *varietà di dimensione m in $\mathbb{R}^n$* (ove $m \le n$) è un sottoinsieme M di $\mathbb{R}^n$ che "se guardato vicino ad ogni suo punto, assomiglia ad un aperto di $\mathbb{R}^m$", ovvero se ogni suo punto ha un intorno aperto (cioè della forma $U \cap \mathrm{M}$, con U aperto di $\mathbb{R}^n$) diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^m$.[75]



Esempi. (1) Una retta, una conica nel piano cartesiano sono due esempi di varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$. **(2)** L'elica cilindrica, sostegno di $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, t)$, è una varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^3$. **(3)** Il sottoinsieme del piano cartesiano formato dai punti tali che $xy = 0$ (ovvero, l'unione dei due assi coordinati), se guardato all'intorno del suo punto $(0,0)$ non è diffeomorfo ad un intervallo aperto[76]; lo è, invece, all'intorno di un qualsiasi altro suo punto. **(4)** Un piano affine, il paraboloide $z = x^2+y^2$, il cilindro $x^2+y^2 = 1$, la superficie sferica $x^2+y^2+z^2 = r^2$ sono quattro esempi di varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$.

Il primo familiare esempio di varietà è costituito da quelle di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$, dette anche *curve piane regolari*: partiamo dunque introducendo brevemente ed informalmente questo caso particolare, per passare poi a trattare con precisione il caso generale.

6.1 Curve piane regolari

Si dice che un sottoinsieme Γ del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ è una *curva (piana) regolare* in un suo punto (x_0, y_0) se è soddisfatta una delle seguenti tre condizioni equivalenti:

(1) *Forma parametrica*: vicino (x_0, y_0), Γ è diffeomorfo ad un intervallo aperto di $\mathbb{R}$.

Esistono un intorno $U \subset \mathbb{R}^2$ di (x_0, y_0), un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ ed un diffeomorfismo $\varphi : \Gamma \cap U \xrightarrow{\sim} I$ (detto *carta locale di* Γ *in* (x_0, y_0)); l'inversa $\gamma = \varphi^{-1} : I \xrightarrow{\sim} \Gamma \cap U$, che è ciò con cui si ha normalmente a che fare in pratica, è detta *parametrizzazione locale di* Γ *attorno* (x_0, y_0)).

(2) *Forma grafico*: vicino (x_0, y_0), Γ è il grafico di una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Esistono intorni $A \subset \mathbb{R}$ di x_0 e $B \subset \mathbb{R}$ di y_0, ed una funzione $\phi : A \to B$ (oppure $\psi : B \to A$) tali che, posto $U = A \times B$, si ha $\Gamma \cap U = \{(x,y) \in U : y = \phi(x)\}$ (oppure $\Gamma \cap U = \{(x,y) \in U : x = \psi(y)\}$).

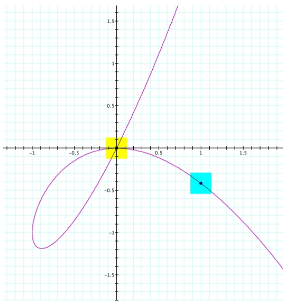
(3) *Forma cartesiana*: vicino (x_0, y_0), Γ è insieme di livello di una sommersione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$.

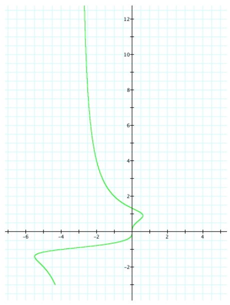
Esistono un intorno $U \subset \mathbb{R}^2$ di (x_0, y_0) ed una funzione $g : U \to \mathbb{R}$ col gradiente mai nullo in U tali che, posto $\alpha = g(x_0, y_0)$, si ha $\Gamma \cap U = \{(x,y) \in U : g(x,y) = \alpha\}$.

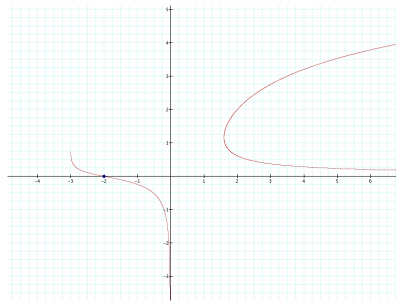
[75] Si badi bene: non si chiede che il sottoinsieme M sia *globalmente* (nella sua interezza) diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^m$, ma basta che lo sia *localmente*, cioè all'intorno di ogni suo punto.

[76] In un intorno di $(0,0)$, tale insieme è l'unione C di due segmenti ortogonali, e tale unione non può essere diffeomorfa ad un intervallo aperto I di $\mathbb{R}$: infatti un eventuale diffeomorfismo $\varphi : C \to I$ dovrebbe indurre un diffeomorfismo tra $C \setminus \{(0,0)\}$ e $I \setminus \{\varphi(0,0)\}$, ma ciò è assurdo (infatti $C \setminus \{(0,0)\}$ ha quattro componenti connesse, mentre $I \setminus \{\varphi(0,0)\}$ ne ha solo due).

Illustriamo ora queste condizioni con tre esempi concreti, nei quali mostriamo che un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ che soddisfa una di esse, soddisfa anche le altre due.







Esempi. (1) (*Curva in forma parametrica*) Come già detto, nella pratica anziché ad un diffeomorfismo $\varphi : \Gamma \cap U \xrightarrow{\sim} I$ ci si trova di fronte ad una parametrizzazione $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ tipo quelle del Capitolo 3. Se il vettore derivato $\gamma'(t)$ non è mai nullo, tale γ è un'immersione e dunque (Teorema delle Immersioni 5.6.2(i)) per ogni $t \in I$ essa induce un diffeomorfismo tra un certo intorno J di t in I e la sua immagine $\gamma(J)$ in $\mathbb{R}^2$. Il problema è: anche se ciò accade per ogni $t \in I$, *chi ci assicura che γ induca un diffeomorfismo tra tutto I e tutta la sua immagine $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^2$?* Ad esempio, si abbia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = \big(t(t-2), t^2(t-2)\big)$ (Figura 1). Il vettore $\gamma'(t) = (2(t-1), t(3t-4))$ non è mai nullo, ma è chiaro che γ non induce un diffeomorfismo tra tutto $I = \mathbb{R}$ e tutta la sua immagine $\Gamma = \gamma(I)$: a dare problemi è il punto $\gamma(0) = \gamma(2) = (0,0)$, in cui il sostegno $\gamma(I)$ si "autointerseca" (si veda quanto detto a pag. 71 a proposito della curva otto). In altre parole, Γ non è una curva regolare in $(0,0)$. Vicino a tutti gli altri suoi punti, invece, Γ è una curva regolare: ad esempio, lo è in $(x_0, y_0) = (1, 1-\sqrt{2}) = \gamma(t_0)$ con $t_0 = 1 - \sqrt{2}$ (vedi ancora Figura 1). Come passare ad una descrizione locale di Γ vicino a (x_0, y_0) in forma di grafico? Essendo $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) = (-2\sqrt{2}, 5-2\sqrt{2})$, vicino a t_0 si può invertire sia la funzione $x(t)$ che la funzione $y(t)$: invertendo ad esempio la $x(t)$, si potrà scrivere localmente $t = t(x)$, da cui la forma grafico $y = y(t(x)) = \phi(x)$. Qui si possono fare i conti fino in fondo: infatti da $x = t(t-2)$ si ricava $t = 1 \pm \sqrt{x+1}$, e attorno a t_0 (che è < 1) si avrà dunque $t = 1 - \sqrt{x+1}$, da cui $y = \phi(x) = t(x)^2(t(x)-2) = x(1-\sqrt{x+1})$. Da $y = x(1-\sqrt{x+1})$ si ricava subito una forma cartesiana locale scrivendo $y - x(1-\sqrt{x+1}) = 0$; cercando una funzione razionale, da $x\sqrt{x+1} = x - y$ si ricava $x^2(x+1) = (x-y)^2$, ovvero $g(x,y) = x^3 - y^2 + 2xy = 0$. Si noti che, guarda caso, $\nabla g(x,y) = (3x^2 + 2y, 2(x-y))$ si annulla nei soli punti $(0,0)$ e $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$: di questi sta in Γ solo il primo, già noto come punto singolare. **(2)** (*Curva in forma grafico*) Nell'esempio precedente, si è notato come il passaggio da una forma parametrica ad una forma grafico o a una forma cartesiana sia piuttosto delicato, perché la parametrizzazione potrebbe fare qualche scherzo. Se invece si ha da subito una forma grafico, ad esempio se Γ è il grafico della funzione $x = \psi(y) = \frac{y^3(4-3y)}{\sqrt{y^8+2}}$ con $y > -3$ (Figura 2), si ha subito una forma parametrica tramite $\gamma :]-3, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(y) = (\psi(y), y)$ (si noti che tale parametrizzazione induce un diffeomorfismo tra $I =]-3, +\infty[$ e $\Gamma = \gamma(I)$, con inversa $\varphi : \Gamma \to I$ data da $\varphi(x,y) = y$). Quanto alla forma cartesiana, si ha ad esempio $g(x,y) = x - \psi(y) = 0$. **(3)** (*Curva in forma cartesiana*) Consideriamo la curva Γ data in forma cartesiana da $g(x,y) = \log(x+3) - 2xy + e^y = 1$, ed il suo punto $(x_0, y_0) = (-2, 0)$ (Figura 3). Si ha $\nabla g(x,y) = (\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)) = (\frac{1}{x+3} - 2y, -2x + e^y)$, da cui $\nabla g(-2,0) = (\frac{\partial g}{\partial x}(-2,0), \frac{\partial g}{\partial y}(-2,0)) = (-1, 5)$: per il Teorema del Dini, all'intorno di $(-2,0)$ da $g(x,y) - 1 = 0$ si può pertanto esplicitare a piacere una delle due variabili x e y in funzione dell'altra. Se ad esempio scegliamo di esplicitare $x = x(y)$, otteniamo una forma grafico (che non è però calcolabile in modo diretto), da cui si può ottenere una forma parametrica come visto prima, ovvero $\gamma(y) = (x(y), y)$.

Consideriamo ora una curva in forma cartesiana, ovvero una curva di livello $g(x, y) = \alpha$ regolare all'intorno di un suo punto (x_0, y_0) (dunque $g(x_0, y_0) = \alpha$, e $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$). Se g è di classe $\mathcal{C}^n$, sappiamo che la funzione polinomiale $P_{g,n}(x, y)$ di grado n che meglio approssima $g(x, y)$ all'intorno di (x_0, y_0) —nel senso che $|g(x, y) - P_{g,n}(x, y)| = o(||(x - x_0, y - y_0)||^n)$— è il suo sviluppo di Taylor fino all'ordine n (vedi (5.2)). Come conseguenza, la curva polinomiale di grado n che meglio approssima la curva di livello $g(x, y) = \alpha$ all'intorno di (x_0, y_0) (si parla anche di *curva polinomiale osculatrice*[77] in (x_0, y_0)) è la curva di livello α di $P_{g,n}(x, y)$: essendo $g(x_0, y_0) = \alpha$, tale curva polinomiale è dunque

Curva polinomiale osculatrice

$$\sum_{\substack{k=1,\dots,n \\ j=0,\dots,k}} \tfrac{1}{(k-j)!j!} \left(\tfrac{\partial^k g}{\partial x^{k-j} \partial y^j}(x_0, y_0) \right) (x - x_0)^{k-j} (y - y_0)^j = 0.$$

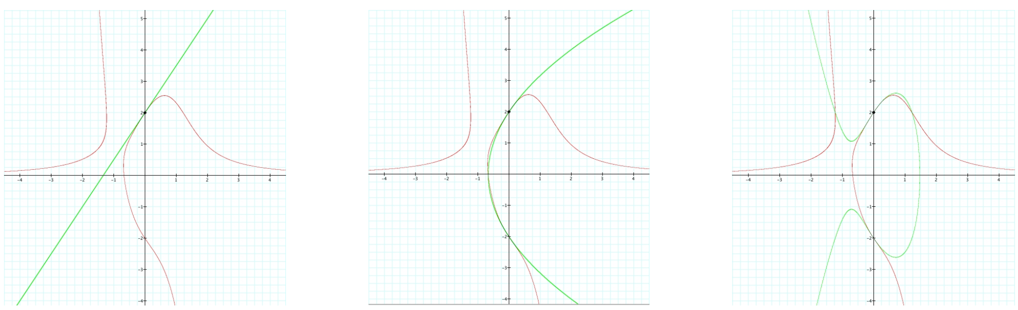
Per $n = 1$ otteniamo l'equazione della *retta tangente affine* (che ritroveremo più tardi)

$$\tfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) \;+\; \tfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) = 0\ ,$$

e per $n = 2$ l'equazione della *conica osculatrice*

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \tfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0, y_0)\,(x - x_0)^2 + \\ +2\tfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\,(x - x_0)(y - y_0) + \tfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0, y_0)\,(y - y_0)^2\big) = 0.\end{aligned}$$

Esempio. Sia $g(x, y) = 2x^3 y - 6x + y^2$, e sia Γ la curva di livello di g passante per il punto $(x_0, y_0) = (0, 2)$: essendo $g(0, 2) = 4$, la curva Γ è dunque espressa dall'equazione cartesiana $2x^3 y - 6x + y^2 = 4$. Il gradiente $\nabla g(x, y) = (6(x^2 y - 1), 2(x^3 + y))$ si annulla quando $6x^2 y - 6 = 2x^3 + 2y = 0$, ovvero solo nel punto $(-1, 1)$ che appartiene all'insieme di livello $g(x, y) = g(-1, 1) = 5$. Dunque tutti gli insiemi di livello $g(x, y) = \alpha$ con $\alpha \neq 5$ (e tra questi Γ) sono curve regolari. Le uniche derivate di g di ordine ≤ 3 a non essere nulle in $(0, 2)$ sono $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 2) = -6$, $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 2) = 4$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0, 2) = 2$ e $\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(0, 2) = 24$: pertanto la retta tangente affine a Γ in $(0, 2)$ è $-6(x - 0) + 4(y - 2) = 0$ (ovvero $y = \frac{3}{2}x + 2$), la conica osculatrice a Γ in $(0, 2)$ è la parabola $-6(x - 0) + 4(y - 2) + \frac{1}{2}2(y - 2)^2 = 0$ (ovvero $x = \frac{1}{6}(y^2 - 4)$), mentre la cubica osculatrice a Γ in $(0, 2)$ è $-6(x - 0) + 4(y - 2) + \frac{1}{2}2(y - 2)^2 + \frac{1}{6}24(x - 0)^3 = 0$ (ovvero $4x^3 + y^2 - 6x - 4 = 0$). Poiché la stessa g è un polinomio di grado 4, essa ovviamente coincide con le curve polinomiali osculatrici di grado ≥ 4.



Retta, conica e cubica osculatrici in $(0, 2)$ (in verde) alla curva Γ data da $2x^3 y - 6x + y^2 = 4$ (in rosso).

[77] dal latino *osculare*, che significa "baciare".

6.2 Varietà differenziali nello spazio affine

Un insieme affine $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^n$ è una *varietà differenziale*[78] $\mathcal{C}^k$ *di dimensione* m nello "spazio ambiente" $\mathbb{R}^n$ (ove $0 \leq k \leq \infty$ e $0 \leq m \leq n$) se ammette una delle seguenti tre descrizioni. **Varietà differenziale**

(1) (*Forma parametrica*: M è localmente $\mathcal{C}^k$-diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^m$)

Per ogni $\underline{x}_0 \in \mathrm{M}$ esistono un intorno aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ di $\underline{x}_0$, un aperto $V \subset \mathbb{R}^m$ ed un $\mathcal{C}^k$-diffeomorfismo $\varphi : U \cap \mathrm{M} \xrightarrow{\sim} V$.

Il $\mathcal{C}^k$-diffeomorfismo $\varphi : U \cap \mathrm{M} \xrightarrow{\sim} V$ viene detto *carta locale* o *sistema di coordinate locali* di M in $\underline{x}_0$. **Carta locale, atlante** Una famiglia di carte locali $\{\varphi_i : U_i \cap \mathrm{M} \xrightarrow{\sim} V_i : i = 1, 2, \dots\}$ tali che gli aperti $U_1, U_2, \dots$ formano un ricoprimento di M (cioè $M \subset \bigcup_i U_i$) si dirà *atlante* di M, con evidente simbologia del linguaggio. Se φ è una carta locale di M, la funzione inversa $\gamma = \varphi^{-1} : V \to U \cap \mathrm{M} \subset U$ è detta *parametrizzazione locale* di M in $\underline{x}_0$. **Parametrizzazione locale** Nella pratica, è molto più conveniente lavorare con la parametrizzazione γ che con la carta locale φ, perché γ ha come dominio un aperto di $\mathbb{R}^m$ (e codominio $\mathbb{R}^n$), dunque può essere differenziata nel senso usuale. È fondamentale notare (Proposizione 5.6.3) che γ *è un'immersione*, ovvero il suo differenziale $d\gamma_{\underline{v}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è iniettivo per ogni $\underline{v} \in V \subset \mathbb{R}^m$.
Questa descrizione "raddrizza localmente M", descrivendolo come un sottoinsieme di uno spazio affine di dimensione più piccola. Essa è dunque l'enunciazione più fedele del concetto di varietà come di "insieme localmente isomorfo ad uno spazio affine di dimensione inferiore", ed è indispensabile ricorrervi in diverse occasioni.

(2) (*Forma grafico*: M è localmente il grafico di una funzione $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ di classe $\mathcal{C}^k$)

Per ogni $\underline{x}_0 \in \mathrm{M}$ esistono un intorno aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ di $\underline{x}_0$ ed m variabili $\underline{x}' = (x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ tali che, scritte le rimanenti variabili come $\underline{x}'' = (x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-m}})$ e denotata con $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la proiezione $\pi(\underline{x}) = \underline{x}'$, si ha $U \cap \mathrm{M} = \{\underline{x} \in U : \underline{x}'' = \phi(\underline{x}')\}$ per un'opportuna funzione $\phi = (\phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_{n-m}}) : \pi(U) \to \mathbb{R}^{n-m}$ di classe $\mathcal{C}^k$.

Si tratta di un caso particolare del precedente, nel senso che esprimere localmente M come grafico fornisce automaticamente una parametrizzazione locale di M. Passando poi da "parametri qualsiasi" in (1) a "parametri coordinate", la descrizione (2) costituisce un ponte tra (1) e la prossima (3): per chiarimenti, si veda la dimostrazione della Proposizione 6.2.1.

(3) (*Forma cartesiana*: M è localmente insieme degli zeri di una sommersione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ di classe $\mathcal{C}^k$)

Per ogni $\underline{x}_0 \in \mathrm{M}$ esistono un intorno aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ di $\underline{x}_0$ ed una funzione $g = (g_1, \dots, g_{n-m}) : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ di classe $\mathcal{C}^k$ tale che $U \cap \mathrm{M} = g^{-1}(\underline{0}_{n-m}) = \{\underline{x} \in U : g_1(\underline{x}) = \dots = g_{n-m}(\underline{x}) = 0\}$ e che, in tali punti, g sia sommersiva.

Questa descrizione, in cui M è esibita (localmente, ma nella pratica spesso globalmente) come insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ che soddisfano una data famiglia di $n - m$ *condizioni indipendenti* $g_1(\underline{x}) = 0$, ..., $g_{n-m}(\underline{x}) = 0$, è la più comunemente usata. La funzione vettoriale g è detta *funzione di definizione* di M, e le sue componenti $g_1, \dots, g_{n-m}$ sono dette *vincoli*, con evidente riferimento alla Meccanica. **Funzione di definizione, vincoli**

Se M è varietà di dimensione m in $\mathbb{R}^n$, il numero $n - m$ è detto *codimensione* di M in $\mathbb{R}^n$.

[78] In inglese: *differentiable manifold*.

Proposizione 6.2.1. *Le descrizioni* (1), (2) *e* (3) *sono equivalenti, ovvero un sottoinsieme* $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^n$ *soddisfa una di esse se e solo se soddisfa una delle altre due.*

Dimostrazione. Mostreremo come la descrizione (2) sia equivalente sia a (1) che a (3).
Supponiamo che M soddisfi (1), ovvero che la parametrizzazione locale $\gamma : V \to U$ induca un diffeomorfismo tra V e la sua immagine $\gamma(V)$, e che inoltre quest'ultima sia proprio $U \cap \mathrm{M}$. Sia $\underline{v}_0 \in U$ tale che $\gamma(\underline{v}_0) = \underline{x}_0$: per il solo fatto di indurre un diffeomorfismo tra V e la sua immagine $\gamma(V)$, sappiamo che γ è un'immersione attorno $\underline{v}_0$, in particolare è immersiva in $\underline{v}_0$. Esiste perciò un minore nonsingolare di ordine m della matrice $\mathsf{J}_\gamma(\underline{v}_0) \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, diciamo (solo per comodità di notazione) quello delle prime m righe: per il Teorema 5.5.4, la funzione vettoriale con componenti le prime m tra tra le n funzioni $x_i = \gamma_i(v_1, \dots, v_m)$ (con $i = 1, \dots, n$), è localmente invertibile vicino a $\underline{v}_0$, e dunque (indicando $\underline{x}' = (x_1, \dots, x_m)$ e $\underline{x}'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$), vicino a $\underline{x}'_0$ si ottengono funzioni inverse $v_\ell = \psi_\ell(\underline{x}')$ (con $\ell = 1, \dots, m$), da cui, inserendo le funzioni $\psi_1, \dots, \psi_m$ al posto delle variabili $v_1, \dots, v_m$ nelle restanti $n - m$ funzioni $x_r = \gamma_r(v_1, \dots, v_m)$ (con $r = m+1, \dots, n$) si riesce ad esprimere le variabili $\underline{x}''$ in funzione delle $\underline{x}'$. In altre parole si è riusciti così ad esprimere $\gamma(V)$ nella forma grafico $\underline{x}'' = \phi(\underline{x}')$, ma in questo caso sappiamo anche che $\gamma(V) = U \cap \mathrm{M}$: dunque M soddisfa (2).**(79)**
Se M soddisfa (2) allora si può scrivere (sempre per comodità) $x_r = \phi_r(\underline{x}')$ (con $r = m+1, \dots, n$), e dunque M soddisfa (1) con parametrizzazione $\gamma(\underline{x}') = (\underline{x}', \phi(\underline{x}'))$ (si noti che le prime m righe della matrice jacobiana $\mathsf{J}_\gamma(\underline{x}') \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ formano la matrice identica $\mathbf{1}_m$, dunque γ è immersiva) e soddisfa anche (3) con $g_r(\underline{x}) = x_r - \phi_r(\underline{x}')$ (si noti che, posta $g = (g_1, \dots, g_{n-m})$, ovvero $g(\underline{x}) = \underline{x}'' - \phi(\underline{x}')$, le colonne di indice $m+1, \dots, n$ della matrice jacobiana $\mathsf{J}_g(\underline{x}) \in M_{n-m,n}(\mathbb{R})$ formano la matrice identica $\mathbf{1}_{n-m}$, dunque g è sommersiva).
Infine, se M soddisfa (3) allora la matrice jacobiana $\mathsf{J}_g(\underline{x}) \in M_{n-m,n}(\mathbb{R})$ è sommersiva, e dunque, applicando il Teorema del Dini per i sistemi, dall'equazione vettoriale $g(x_1, \dots, x_n) = \underline{0}_{n-m}$, che è il sistema $g_1(x_1, \dots, x_n) = \cdots = g_{n-m}(x_1, \dots, x_n) = 0$, si possono esplicitare $n - m$ variabili tra le $x_1, \dots, x_n$ in funzione delle restanti m, e dunque M soddisfa (2). □

Come già detto nelle descrizioni fatte in precedenza, e come è apparso chiaramente dalla dimostrazione della Proposizione 6.2.1, la *forma grafico* (2) media tra la *forma parametrica* (1) e la *forma cartesiana* (3). Mentre il passaggio da (2) ad una delle altre due forme è immediato (perché la forma grafico fornisce al tempo stesso sia una descrizione parametrica che una cartesiana), sono i passaggi inversi ad esigere attenzione, perché richiedono rispettivamente di "esprimere gli m parametri $v_1, \dots, v_m$ rispetto a m tra le n coordinate cartesiane $x_1, \dots, x_n$ (per andare da (1) a (2)) o di "esplicitare $n - m$ tra le n coordinate cartesiane $x_1, \dots, x_n$ rispetto alle rimanenti m (per andare da (3) a (2)). Vale allora la pena di sottolineare nuovamente come avvengono questi due passaggi.

Proposizione 6.2.2. *Sia* M *una varietà differenziale di dimensione* m *in* $\mathbb{R}^n$, *e si scriva* $\underline{x} = (\underline{x}', \underline{x}'') \in \mathbb{R}^n$ *con* $\underline{x}' = (x_1, \dots, x_m)$ *e* $\underline{x}'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$.**(80)**

---

(79) Questo ragionamento è più delicato di quanto possa sembrare. L'esempio fatto nel paragrafo precedente, dato da $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ con $\gamma(t) = \big(t(t-2), t^2(t-2)\big)$ dovrebbe infatti aver suggerito prudenza: se in esso si considera $\underline{x}_0 = (0,0)$ e $v_0 = t_0 = 0$ (oppure $v_0 = t_0 = 2$) tutti i ragionamenti della dimostrazione sembrerebbero funzionare anche lì (in effetti, un intorno di V di t_0 in $\mathbb{R}$ viene identificato diffeomorficamente con la sua immagine $\gamma(V)$), peccato che in quel caso si abbia $\gamma(V) \neq U \cap \Gamma$ (infatti $U \cap \Gamma$ è una "ics" centrata in $(0,0)$ tipo quella ottenuta nella figura intersecando Γ con il rettangolo giallo, mentre $\gamma(V)$ è solo uno dei due tratti di tale "ics") e dunque non si può trasferire a $U \cap \Gamma$ quanto si riesce ad affermare per $\gamma(V)$. Di questi problemi riparleremo tra breve a proposito della "curva otto".

(80) Quanto si dirà nel seguito a proposito della decomposizione $\underline{x} = (\underline{x}', \underline{x}'')$ potrà essere ovviamente applicato, a seconda dei casi, ad un'altra decomposizione delle n coordinate $x_1, \dots, x_n$ in due gruppi disgiunti $\underline{x}' = (x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ e $\underline{x}'' = (x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-m}})$.

(i) (Dalla forma parametrica alla forma grafico) *Sia* $\gamma : V \to \mathbb{R}^n$ *(con* V *aperto di* $\mathbb{R}^m$*) una parametrizzazione locale di* M*, e si scriva* $\gamma(\underline{v}) = (\underline{x}'(\underline{v}), \underline{x}''(\underline{v}))$ *con* $\underline{x}'(\underline{v}) = (\gamma_1(\underline{v}), \dots, \gamma_m(\underline{v}))$ *e* $\underline{x}''(\underline{v}) = (\gamma_{m+1}(\underline{v}), \dots, \gamma_n(\underline{v}))$*. Se* $\det \mathsf{J}_{\underline{x}'}(\underline{v}) \neq 0$ *per un certo* $\underline{v} \in V$*, si ottiene una descrizione locale di* M *come grafico attorno a* $\underline{x} = \gamma(\underline{v})$ *invertendo localmente le funzioni* $\underline{x}'(\underline{v})$ *ottenendo* $\underline{v}(\underline{x}')$*, da cui*

$$\underline{x}'' = \phi(\underline{x}') = \underline{x}''\big(\underline{v}(\underline{x}')\big), \qquad \text{con} \quad \mathsf{J}_\phi(\underline{x}') = \mathsf{J}_{\underline{x}''}(\underline{v})\, \mathsf{J}_{\underline{x}'}(\underline{v})^{-1}_{\ \underline{v}=\underline{v}(\underline{x}')}.$$

(ii) (Dalla forma cartesiana alla forma grafico) *Sia* $g : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ *(con* U *aperto di* $\mathbb{R}^n$*) una funzione di definizione locale di* M*, e si scriva* $\mathsf{J}_g(\underline{x}) = (\mathsf{J}_{g,\underline{x}'}(\underline{x}), \mathsf{J}_{g,\underline{x}''}(\underline{x}))$*, ove* $\mathsf{J}_{g,\underline{x}'}(\underline{x})$ *e* $\mathsf{J}_{g,\underline{x}''}(\underline{x})$ *rappresentano le matrici jacobiane di* g *rispetto alle sole variabili* $\underline{x}'$ *e* $\underline{x}''$*.*[81] *Se* $\det \mathsf{J}_{g,\underline{x}''}(\underline{x}) \neq 0$ *per un certo* $\underline{x} \in U$*, si ottiene una descrizione locale di* M *come grafico esplicitando localmente le variabili* $\underline{x}''$ *rispetto alle* $\underline{x}'$*, da cui*

$$\underline{x}'' = \phi(\underline{x}'), \qquad \text{con} \quad \mathsf{J}_\phi(\underline{x}') = -\mathsf{J}_{g,\underline{x}''}(\underline{x})^{-1}\, \mathsf{J}_{g,\underline{x}'}(\underline{x})_{\ \underline{x}=(\underline{x}',\phi(\underline{x}'))}.$$

Dimostrazione. Vanno dimostrate solo le affermazioni riguardanti le matrici jacobiane. (i) Differenziando la funzione composta $\phi(\underline{x}') = \underline{x}''\big(\underline{v}(\underline{x}')\big)$ si ottiene $\mathsf{J}_\phi(\underline{x}') = \mathsf{J}_{\underline{x}''}(\underline{v}(\underline{x}'))\mathsf{J}_{\underline{v}}(\underline{x}')$; si ricordi poi che, per la Proposizione 5.3.5, $\mathsf{J}_{\underline{v}}(\underline{x}') = \mathsf{J}_{\underline{x}'}(\underline{v})^{-1}_{\ \underline{v}=\underline{v}(\underline{x}')}$. (ii) Segue dal Teorema del Dini per i sistemi (vedi (5.12)). □

Mettiamo in evidenza gli esempi più frequenti di varietà.

(a) **Grafici.** Se V è un aperto di $\mathbb{R}^m$ e $\phi : V \to \mathbb{R}^p$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^k$, posto $n = m + p$ si ha che il *grafico* di ϕ

$$\Gamma_\phi = \{(\underline{x}', \phi(\underline{x}')) : \underline{x}' \in V\} \ \subset \mathbb{R}^n \tag{6.1}$$

è una varietà $\mathcal{C}^k$ di dimensione m in $\mathbb{R}^n$, come discende subito da (2). Una parametrizzazione (globale) di $\mathrm{M} = \Gamma_\phi$ è la funzione $V \to \mathbb{R}^n$ tale che $\underline{x}' \mapsto (\underline{x}', \phi(\underline{x}'))$ (in effetti, $\mathrm{M} = \Gamma_\phi$ è $\mathcal{C}^k$-diffeomorfo a V); una funzione di definizione (globale) per $\mathrm{M} = \Gamma_\phi$ è $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ data da $g(\underline{x}', \underline{x}'') = \underline{x}'' - \phi(\underline{x}')$.

(b) **Insiemi di livello di funzioni sommersive.** Sia W un aperto di $\mathbb{R}^n$, e si abbiano una funzione $G : W \to \mathbb{R}^p$ di classe $\mathcal{C}^k$, e un fissato $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$. L'*insieme di livello* di G al valore $\underline{\alpha}$ è

$$\mathrm{X}_{G,\underline{\alpha}} \ = \ G^{-1}(\underline{\alpha}) \ = \ \{\underline{x} \in W : G(\underline{x}) = \underline{\alpha}\} \ \subset \mathbb{R}^n \ : \tag{6.2}$$

si tratta dunque dell'insieme delle soluzioni $\underline{x}$ in W del sistema

$$\begin{cases} G_1(\underline{x}) = \alpha_1, \\ \quad \vdots \\ G_p(\underline{x}) = \alpha_p \end{cases}$$

[81] dunque con $n - m$ righe e, rispettivamente, m e $n - m$ colonne.

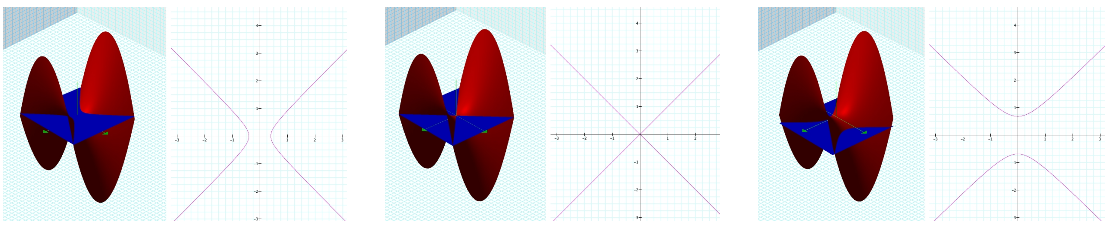
(ove si intende, naturalmente, che se $p = 1$ si ha una sola equazione). Se $\mathrm{X}_{G,\underline{\alpha}} \neq \varnothing$ e G è sommersiva in tutti i punti di $\mathrm{X}_{G,\underline{\alpha}}$[(82)] allora, posto $m = n - p$, si ha che $\mathrm{M} = \mathrm{X}_{G,\underline{\alpha}}$ è una varietà $\mathcal{C}^k$ di dimensione m in $\mathbb{R}^n$, come discende subito da (3) (una funzione di definizione globale è $g : W \to \mathbb{R}^p$ data da $g(\underline{x}) = G(\underline{x}) - \underline{\alpha}$). Come detto nella dimostrazione della Proposizione 6.2.1, la sommersività di G nei punti di $\mathrm{M} = \mathrm{X}_{G,\underline{\alpha}}$ permette poi di esplicitare localmente, dal sistema $G(\underline{x}) = \underline{\alpha}$, una qualche famiglia di p tra le variabili $x_1, \dots, x_n$ di $\mathbb{R}^n$ in funzione delle rimanenti m, e dunque di ottenere in questo modo una parametrizzazione locale di $\mathrm{M} = \mathrm{X}_{G,\underline{\alpha}}$.

Si noti che (a) e (b) sono i casi in cui M è espressa in modo globale rispettivamente come *forma grafico* (2) e *forma cartesiana* (3). Una definizione globale in *forma parametrica* (1), invece, può non dare luogo ad una varietà nel senso dato in precedenza, ma ad un oggetto più generale detto *varietà parametrica*, in cui possono accadere fenomeni singolari come quelli incontrati con la curva-otto: per il momento non ce ne occupiamo, ma ne riparleremo tra breve (vedi pag. 84).

Esaminiamo ora da vicino i casi di varietà di dimensione 0, 1, 2, $n-1$ e n in $\mathbb{R}^n$, e introduciamo infine la nozione più debole di "varietà parametrica".

• Nei casi estremi, le varietà di dimensione 0 in $\mathbb{R}^n$ sono i sottoinsiemi *discreti* di $\mathbb{R}^n$, cioè quelli formati da punti isolati; e le varietà di dimensione n in $\mathbb{R}^n$ sono gli *aperti* di $\mathbb{R}^n$.

• Le varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^n$ (con $n \geq 2$), ovvero i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che sono localmente diffeomorfi ad un intervallo aperto di $\mathbb{R}$, sono detti *curve (regolari)* di $\mathbb{R}^n$.[(83)] **Curve regolari**
Le curve regolari di $\mathbb{R}^n$ sono dunque (almeno localmente) delle curve parametriche nel senso detto nel Capitolo 3; è invece il viceversa a non essere sempre vero, come si vedrà negli esempi.



Curve di livello di $G(x, y) = x^2 - y^2$ visualizzate con l'intersezione tra il grafico di G (paraboloide iperbolico) ed i piani orizzontali $z = \alpha$.

Esempi. (1) Da (6.1) discende che, se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto, il grafico di una qualsiasi funzione $\phi : I \to \mathbb{R}^{n-1}$ di classe $\mathcal{C}^k$ è una curva regolare in $\mathbb{R}^n$. Ad esempio la parabola $y = x^2$, grafico di

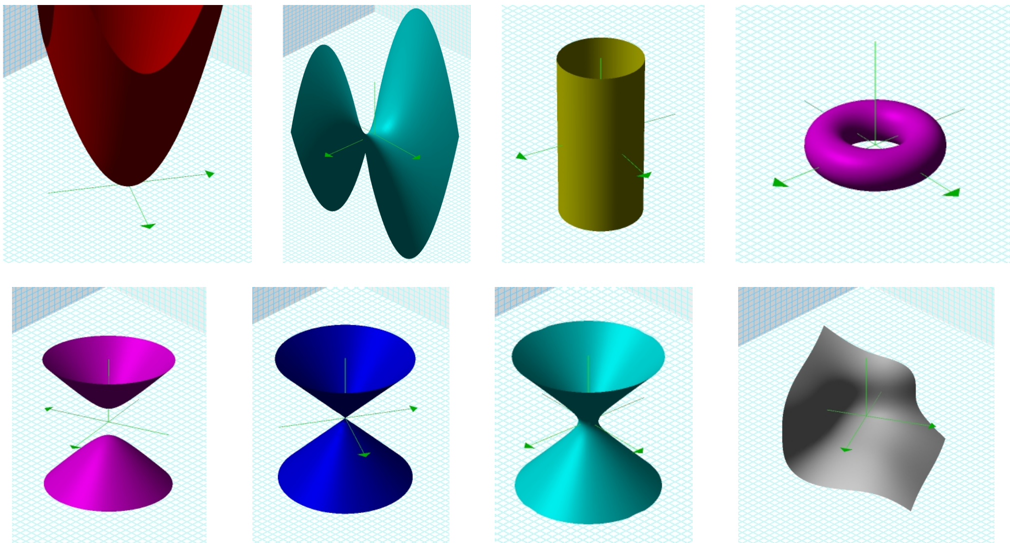
[(82)] $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^p$ si dice *valore regolare per* G se $\mathrm{X}_{G,\underline{\alpha}} = \varnothing$ oppure se $\mathrm{X}_{G,\underline{\alpha}} \neq \varnothing$ e G è sommersiva in tutti i punti di $\mathrm{X}_{G,\underline{\alpha}}$, altrimenti si dirà *valore critico*. Un noto teorema, dovuto a Sard, assicura che "quasi tutti" (ovvero —per chi conosce l'integrale di Lebesgue— tutti tranne un insieme Lebesgue-trascurabile) gli $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^p$ sono valori regolari per G.

[(83)] Nel paragrafo precedente ci siamo occupati delle curve piane regolari, ovvero del caso $n = 2$.

$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $\phi(t) = t^2$, è una curva $\mathcal{C}^\infty$ di $\mathbb{R}^2$; la curva $\phi(t) = |t|$ è una curva $\mathcal{C}^0$ di $\mathbb{R}^2$ (e $\mathcal{C}^\infty$ fuori da $(0,0)$); l'elica cilindrica $(x, y, z) = (r \cos t, r \sin t, t)$, vista come grafico di $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\phi(t) = (r \cos t, r \sin t)$, è una curva $\mathcal{C}^\infty$ di $\mathbb{R}^3$. **(2)** *(Curve di livello)* La funzione $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $G(x, y, z) = x^2 - y^2$ ha gradiente $\nabla G = (2x, -2y)$, dunque è sommersiva ovunque tranne che in $(0, 0)$. Ne segue che gli insiemi di livello $\mathrm{X}_{G,\alpha} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : G(x, y) = \alpha\}$ sono varietà di dimensione $2 - 1 = 1$ (ovvero curve) $\mathcal{C}^\infty$ di $\mathbb{R}^2$ per ogni $\alpha \neq 0$: in effetti per $\alpha \neq 0$ l'insieme $\mathrm{X}_{G,\alpha}$ è un'iperbole equilatera, mentre per $\alpha = 0$ l'insieme $\mathrm{X}_{G,0}$, definito da $x^2 - y^2 = 0$, è l'unione delle due bisettrici $y = \pm x$ (che, se privato di $(0, 0)$, è anch'esso una curva regolare). Nella figura si comprende l'evoluzione di tali curve di livello tramite l'intersezione del grafico di G (il paraboloide iperbolico $z = x^2 - y^2$) con i piani orizzontali $z = \alpha$. **(3)** La circonferenza $\mathbb{S}^1$ di centro l'origine e raggio 1 nel piano cartesiano, è una curva regolare $\mathcal{C}^\infty$: essa infatti è l'insieme di livello 1 della funzione $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $G(x, y) = x^2 + y^2$, che è sommersiva ovunque tranne che in $(0, 0)$ che però non sta in $\mathbb{S}^1$. Per una parametrizzazione locale di $\mathbb{S}^1$ attorno un suo punto (x_0, y_0) basta, come detto, esplicitare localmente da $x^2 + y^2 - 1 = 0$ una delle due variabili rispetto all'altra usando il Teorema del Dini: ad esempio, se $y_0 < 0$ si può esplicitare y scrivendo $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (con parametrizzazione locale $\gamma :]-1, 1[\to \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (t, -\sqrt{1 - t^2})$), mentre attorno $(1, 0)$ si può esplicitare x scrivendo $x = \sqrt{1 - y^2}$ (con parametrizzazione locale $\gamma :]-1, 1[\to \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (\sqrt{1 - t^2}, t)$). Un'altra parametrizzazione locale consueta di $\mathbb{S}^1$ è $\gamma_{\theta_0} :]0, 2\pi[\to \mathbb{S}^1$ data da $\gamma_{\theta_0}(\theta) = (\cos(\theta + \theta_0), \sin(\theta + \theta_0))$, che però lascia fuori il punto $(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$. Se $\underline{N} = (0, 1)$ rappresenta il "polo Nord" di $\mathbb{S}^1$, una carta locale di $\mathbb{S}^1$ è data dalla *proiezione stereografica* $\varphi_{\underline{N}} : \mathbb{S}^1 \setminus \{\underline{N}\} \to \mathbb{R}$ data da $\varphi_{\underline{N}}(x_0, y_0) = \frac{x_0}{1-y_0}$ (si considera la semiretta uscente da $\underline{N}$ e passante per (x_0, y_0), e $\varphi_{\underline{N}}(x_0, y_0)$ è l'ascissa del punto in cui tale semiretta incontra l'asse x); la sua inversa $\varphi_{\underline{N}}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \setminus \{\underline{N}\}$ (che risulta $\varphi_{\underline{N}}^{-1}(t) = (\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1})$) è una parametrizzazione locale di $\mathbb{S}^1$, che però lascia fuori il punto $\underline{N}$. Come visto, di tutte le parametrizzazioni viste nessuna è globale (resta sempre fuori qualche punto di $\mathbb{S}^1$), ed in effetti una parametrizzazione globale di $\mathbb{S}^1$ non esiste: se per assurdo ve ne fosse una, diciamo $\gamma : I \to \mathbb{S}^1$ (con $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto), poiché γ è un omeomorfismo, preso un punto $t_0 \in A$ bisognerebbe che $A \setminus \{t_0\}$ fosse omeomorfo a $\mathbb{S}^1 \setminus \{\gamma(t_0)\}$, ma ciò è impossibile perché il secondo è connesso mentre il primo non lo è. Dunque un atlante sarà formato da(lle inverse di) più parametrizzazioni locali, e per $\mathbb{S}^1$ ne bastano due (ad esempio γ_0 e γ_π, oppure le due carte $\varphi_{\underline{N}}$ e $\varphi_{\underline{S}}$, ove la seconda è la proiezione stereografica dal "polo Sud" $\underline{S} = (0, -1)$). **(4)** Dato il sistema $\begin{cases} y = 2x^2 + z^2 \\ 3x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases}$, mostriamo che esso definisce una curva regolare l in $\mathbb{R}^3$. Infatti, definendo $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ come $g(x, y, z) = (2x^2 - y + z^2, 3x^2 + y^2 + 2z^2 - 1)$ è $l = g^{-1}(0, 0)$. Si ha $dg_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 4x & -1 & 2z \\ 6x & 2y & 4z \end{pmatrix}$, dunque il rango del differenziale non è massimo nei punti che risolvono il sistema $x(4y + 3) = xz = z(y + 1) = 0$, ovvero quelli della forma $(0, \lambda, 0)$, $(0, -1, \mu)$, $(\nu, -\frac{3}{4}, 0)$ con $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$; ma nessuno di questi punti sta su l (verificare). Dunque l è una curva regolare di $\mathbb{R}^3$. Volendo poi determinare una parametrizzazione della varietà l attorno al punto $Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, essendo $dg_Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ notiamo che il primo minore di ordine 2 (relativo ad x e y) è non singolare: usando il Teorema del Dini possiamo pertanto esplicitare x e y in funzione di z in un intorno aperto $J \subseteq \mathbb{R}$ di $z = 0$, con la condizione $(x(0), y(0)) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. La funzione $\psi : J \to l$ data da $\psi(z) = (x(z), y(z), z)$ è una parametrizzazione di l attorno Q. **(5)** Il sostegno $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ della *curva otto* non è una curva regolare: infatti, come mostrato a pag. 71, se $V \subset \mathbb{R}^2$ è un intorno aperto sufficientemente piccolo di $(0, 0)$ allora $\Gamma \cap V$ non può essere diffeomorfo ad un intervallo aperto di $\mathbb{R}$. Va sottolineato che ciò non dipende dalla non iniettività di γ, ma proprio dalla conformazione di Γ vicino al suo punto *singolare* $(0, 0)$ (in effetti, $\Gamma \setminus \{(0, 0)\}$ è una curva regolare): infatti, usando le identità trigonometriche $\cos t = \frac{2\tau}{\tau^2+1}$ e $\sin t = \frac{\tau^2-1}{\tau^2+1}$ (con $\tau = \operatorname{tg}(\frac{t+\frac{\pi}{2}}{2})$), si può trovare una parametrizzazione globalmente iniettiva $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, data da $\tilde{\gamma}(\tau) = (\frac{2\tau}{\tau^2+1}, \frac{2\tau(\tau^2-1)}{(\tau^2+1)^2})$ (si noti che $\tilde{\gamma}(\tau)$ "proviene asintoticamente" da $(0, 0)$ per $\tau \to -\infty$, vi passa per

$\tau = 0$, e infine vi "tende asintoticamente" per $\tau \to +\infty$), ma i problemi in $(0,0)$ rimangono. La singolarità di $(0,0)$ emerge più chiaramente dalla forma "vincolare" di Γ. Infatti da $x(t) = \cos t$ e $y(t) = \sin t \cos t$ si ricava $y^2 = (1-x^2)x^2$, ovvero Γ è il luogo degli zeri di $g(x,y) = (x^2-1)x^2 + y^2$; dal sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ si ricavano le soluzioni $(0,0)$ (che sta in Γ) e $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ (che non stanno in Γ), dunque g è sommersiva in tutti i punti di Γ tranne $(0,0)$.

• Le varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^n$ (con $n \geq 3$), ovvero i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ localmente diffeomorfi ad un aperto di $\mathbb{R}^2$, sono dette *superfici (regolari)* di $\mathbb{R}^n$. **Superfici regolari**



Esempi di superfici in $\mathbb{R}^3$. **(a-b)** Paraboloidi ellittico ed iperbolico. **(c)** Cilindro. **(d)** Toro. **(e-f-g)** Il luogo $z^2 - x^2 - y^2 = \alpha$ è un iperboloide a una/due falde se $\alpha \lessgtr 0$; un cono bilatero se $\alpha = 0$. **(h)** La superficie $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - xy + 4 = 0$ dell'esercizio.

Esempi. (1) Da (6.1) discende che, se $A \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto, il grafico di una qualsiasi funzione $\phi : A \to \mathbb{R}^{n-2}$ di classe $\mathcal{C}^k$ è una superficie regolare in $\mathbb{R}^n$. Ad esempio il paraboloide ellittico $z = ax^2 + by^2 + c$ o il paraboloide iperbolico $z = ax^2 - by^2 + c$ (con $a, b > 0$) sono superfici $\mathcal{C}^\infty$ di $\mathbb{R}^2$. Essendo già in forma di grafico, una parametrizzazione (globale) del paraboloide è data da $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(x,y) = (x, y, ax^2 + by^2 + c)$; in alternativa, se ad esempio $a = b$ si possono usare le coordinate cilindriche (ρ, θ, z) ottenendo $\gamma : \mathbb{R}_{>0} \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$, $\gamma(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, a\rho^2 + c)$ (che non comprende i punti del paraboloide che stanno sul semipiano (x,z) con $x \geq 0$). **(2)** *(Superfici di livello)* La funzione $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da $G(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2$ ha gradiente $\nabla G = (-2x, -2y, 2z)$, dunque è sommersiva ovunque tranne che in $(0,0,0)$. Ne segue che gli insiemi di livello $\mathrm{X}_{G,\alpha} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : G(x,y,z) = \alpha\}$ sono varietà di dimensione $3 - 1 = 2$ (ovvero superfici) $\mathcal{C}^\infty$ di $\mathbb{R}^3$ per ogni $\alpha \neq 0$: per $\alpha > 0$, $\mathrm{X}_{G,\alpha}$ è un iperboloide di rotazione a due falde, e per $\alpha < 0$ a falda unica. Invece per $\alpha = 0$ l'insieme $\mathrm{X}_{G,0}$, definito da $z^2 = x^2 + y^2$, è un cono bilatero col vertice in $(0,0,0)$: al di fuori del vertice, anche il cono è una varietà $\mathcal{C}^\infty$. **(3)** La superficie sferica $\mathbb{S}^2$ dei punti di $\mathbb{R}^3$ posti a distanza unitaria dall'origine è una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$. Per essa si possono svolgere considerazioni del tutto analoghe a quelle di $\mathbb{S}^1$; in più, usando le coordinate sferiche (ρ, θ, φ), una parametrizzazione locale è $\gamma :]0, 2\pi[\times]0, \pi[\to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi)$ (anche qui, i punti di $\mathbb{S}^2$ sul semipiano (x,z) con $x \geq 0$ non sono compresi). **(4)** Fissati due numeri $R > r > 0$, nel piano (x,z) consideriamo la circonferenza c di raggio r centrata in $(R, 0, 0)$, e facciamola ruotare di un giro completo attorno all'asse z: la superficie così descritta è detta *toro*[(84)]. Usando l'angolo θ delle coordinate cilindriche di $\mathbb{R}^3$ e il consueto angolo α che descrive la posizione del punto su c, si ottiene una parametrizzazione del toro tramite $\gamma :]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma(\theta, \alpha) = \big(x(\theta, \alpha), y(\theta, \alpha), z(\theta, \alpha)\big) = \big((R + r\cos\alpha)\cos\theta, (R + r\cos\alpha)\sin\theta, r\sin\alpha\big)$, dalla quale restano fuori i punti del toro sul semipiano (x, z) con $x > 0$ e quelli interni sul piano (x, y). **(5)** Mostriamo che l'equazione $g(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + 4z^3 - xy + 4 = 0$ definisce una superficie regolare X in $\mathbb{R}^3$: in effetti, risolvendo il sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0$ si ottengono i punti $(0, 0, 0)$ e $(\frac{\sqrt[3]{4}}{6}, \frac{\sqrt[3]{2}}{6}, 0)$, ma nessuno dei due giace su X (ovvero soddisfa l'equazione $g(x, y, z) = 0$). Dunque g è sommersiva in ogni punto di X. Determiniamo ora una parametrizzazione della varietà X attorno al suo punto $P(0, 0, -1)$. Si noti che in P si annullano $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$, mentre $\frac{\partial g}{\partial z}(P) = 12 \neq 0$: per il Teorema del Dini esiste allora un intorno aperto U di $(0, 0)$ nel piano (x, y) ed un'unica funzione $z(x, y)$ definita e derivabile in U che soddisfa l'equazione $f(x, y, z(x, y)) = 0$ e tale che $z(0, 0) = -1$. Dunque $\gamma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to X$ data da $\gamma(x, y) = (x, y, z(x, y))$ è una parametrizzazione locale di X attorno P.

• Le varietà di dimensione $n - 1$ in $\mathbb{R}^n$ sono dette anche *ipersuperfici (regolari)* di $\mathbb{R}^n$: nel piano $\mathbb{R}^2$ sono le curve regolari, nello spazio $\mathbb{R}^3$ le superfici regolari. Esse sono dunque localmente *grafico di una funzione scalare di $n - 1$ variabili*, o *insiemi di livello di funzioni scalari $g(x_1, \dots, x_n)$*.

• Gli esempi della "curva otto" (vedi pag. 71 e gli esempi di pag. 81 e seguenti) e della curva piana $\gamma(t) = \big(t(t - 2), t^2(t - 2)\big)$ (vedi pag. 76) mostrano che una curva parametrica affine nel senso del Capitolo 3 può non essere una curva regolare. Notiamo che le parametrizzazioni usate in entrambi i casi sono immersioni (infatti il vettore derivato non è mai nullo), dunque per il Teorema delle Immersioni 5.6.2 esse sono "localmente iniettive": ma non basta, perché nella definizione di varietà si pone l'accento sull'insieme, non sulle sue parametrizzazioni. Vale la pena allora di introdurre una nozione che generalizza in più dimensioni quella delle curve parametriche affini.

Varietà parametrica, parametrizzazione

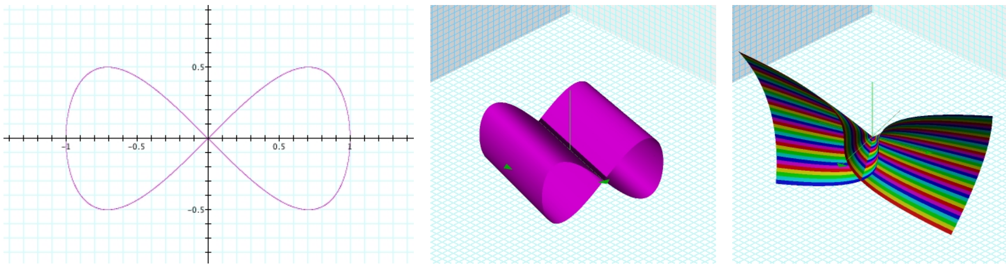
Un insieme affine $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^n$ si dirà una *varietà parametrica $\mathcal{C}^k$ di dimensione m* nello "spazio ambiente" $\mathbb{R}^n$ se esiste un'immersione (detta *parametrizzazione*) $\gamma : V \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^k$, ove V è un aperto di $\mathbb{R}^m$, tale che $\mathrm{M} = \gamma(V)$.

È chiaro che le varietà parametriche di dimensione 1 sono (i sostegni del)le curve parametriche affini del Capitolo 3 "ben parametrizzate", ovvero da $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ con $\gamma'(t) \neq \underline{0}$ per ogni $t \in I$: come già detto a pag. 71 ciò equivale all'essere un'immersione.
Ogni varietà è anche (localmente) una varietà parametrica, mentre il viceversa non è sempre vero, come accade per la "curva otto": a causa della definizione data non localmente in $\mathbb{R}^n$, non è detto che una varietà parametrica sia localmente diffeomorfa ad un aperto di $\mathbb{R}^m$ vicino a tutti i suoi punti: in qualcuno di essi la parametrizzazione $\gamma(\underline{v})$, durante l'evoluzione del parametro $\underline{v} \in V$, potrebbe "ritornare sopra o arbitrariamente vicino", creando situazioni topologicamente anomale.

Esempi. (1) La curva otto (ed altre curve a lei omeomorfe, come la *lemniscata di Bernoulli*) è l'esempio più classico, in dimensione uno, di varietà parametrica singolare: rimandiamo a quanto già detto a pag. 71 e negli esempi di pag. 81 e seguenti. Muovendo la curva otto (disegnata nel piano (y, z)) lungo l'asse y

[(84)] Il nome "toro" significa "anello, cordone" (deriva dal latino *torum*, e non da *taurus*, l'animale toro).

si ottiene un esempio immediato di superficie parametrica che non è regolare nei punti dell'asse y: essa è parametrizzata da $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) = (\sin u, v, \cos u \sin u)$. **(2)** La funzione $\gamma : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma(u,v) = (u^2, 4u+v^3, 3uv)$ è un'immersione (verificare), ma la sua immagine è una superficie parametrica in $\mathbb{R}^3$ a forma di farfalla (vedi figura precedente), che non è regolare nei punti in cui si autointerseca.



(a) La curva otto, che **(b)**, traslata, dà luogo a una superficie parametrica singolare. **(c)** Un'altra superficie parametrica singolare.

6.3 Spazio tangente e campi vettoriali

Sia $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^n$ una varietà $\mathcal{C}^1$ di dimensione m, e si consideri $\underline{x}_0 \in \mathrm{M}$. Si dirà *spazio tangente a* M *in* $\underline{x}_0$ il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$: **Spazio tangente in $\underline{x}_0$**

$$\mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M} \;=\; \{\alpha'(t_0) \;:\; \alpha :]a,b[\to \mathrm{M} \text{ curva derivabile con } \alpha(t_0) = \underline{x}_0\}\ ,$$

cioè l'insieme dei vettori tangenti in $\underline{x}_0$ di curve parametriche affini su M passanti per $\underline{x}_0$.

Proposizione 6.3.1. *Siano g una qualsiasi funzione di definizione di classe $\mathcal{C}^1$ di* M *all'intorno di $\underline{x}_0$, e $\gamma : V \to \mathrm{M}$ una qualsiasi parametrizzazione locale di classe $\mathcal{C}^1$ di* M *all'intorno di $\underline{x}_0$, con V aperto di $\mathbb{R}^m$ e $\underline{v}_0 \in V$ tale che $\gamma(\underline{v}_0) = \underline{x}_0$. Allora*

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M} &= \ker dg_{\underline{x}_0} = \{\underline{u} \in \mathbb{R}^n : dg_{\underline{x}_0}(\underline{u}) = \underline{0}_{n-m}\} \\ &= \operatorname{im} d\gamma_{\underline{v}_0} = \{d\gamma_{\underline{v}_0}(\underline{v}) : \underline{v} \in \mathbb{R}^m\}. \end{aligned}$$

In particolare $\mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M}$ è un $\mathbb{R}$-sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m, esprimibile come il sottospazio ortogonale agli $n-m$ gradienti linearmente indipendenti $\nabla g_1(\underline{x}_0)$, ..., $\nabla g_{n-m}(\underline{x}_0)$, oppure come il sottospazio generato dagli m vettori tangenti linearmente indipendenti $\frac{\partial\gamma}{\partial v_1}(\underline{v}_0)$, ..., $\frac{\partial\gamma}{\partial v_m}(\underline{v}_0)$:

$$\mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M} \;=\; \langle \nabla g_1(\underline{x}_0), \dots, \nabla g_{n-m}(\underline{x}_0)\rangle^\perp \;=\; \langle \tfrac{\partial\gamma}{\partial v_1}(\underline{v}_0), \dots, \tfrac{\partial\gamma}{\partial v_m}(\underline{v}_0)\rangle\ .$$

Dimostrazione. Poniamo $W_1 = \operatorname{im} d\gamma_{\underline{v}_0}$ e $W_2 = \ker dg_{\underline{x}_0}$. Se mostriamo che (a) $W_1 \subset \mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M}$ e (b) $\mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M} \subset W_2$, abbiamo terminato: infatti ne discende che $W_1 \subset W_2$, e poiché sia W_1 che W_2 sono sottospazi vettoriali di dimensione m di $\mathbb{R}^n$ (infatti γ è immersiva in $\underline{v}_0$, e g sommersiva in $\underline{x}_0$), non può che essere $W_1 = W_2$ $(= \mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M})$. Il resto delle affermazioni è una spiegazione delle conseguenze immediate di tale fatto.
(a) Preso un qualsiasi $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$, poiché V è aperto esiste un $\varepsilon > 0$ tale che il segmento $\{\underline{v}_0 + t\underline{v} : t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\}$ sia contenuto in V. Consideriamo allora la curva parametrica affine $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ data da $\varphi(t) = \gamma(\underline{v}_0 + t\underline{v})$: allora φ è una curva derivabile a valori in M (è la restrizione di γ al segmento), e vale $\varphi(0) = \underline{x}_0$; essendo

poi $\varphi'(t) = d\gamma_{\underline{v}_0+t\underline{v}}(\underline{v})$ si ricava $d\gamma_{\underline{v}_0}(\underline{v}) = \varphi'(0) \in \mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M}$. Ciò mostra che $W_1 \subset \mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M}$.
(b) Sia ora $\alpha :]a, b[\to \mathrm{M}$ una qualsiasi curva derivabile con $\alpha(t_0) = \underline{x}_0$. Poiché g è nulla sui punti di M, ne ricaviamo che $g \circ \alpha \equiv 0$; in particolare, differenziando in t_0, si ottiene che $dg_{\underline{x}_0}(\alpha'(t_0)) = 0$, ovvero $\alpha'(t_0) \in \ker dg_{\underline{x}_0}$. Dunque $\mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M} \subset W_2$. □

$\mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M}$ è, in sostanza, il sottospazio vettoriale di dimensione m in $\mathbb{R}^n$ parallelo allo *spazio tangente affine a* M *in* $\underline{x}_0$ (di dimensione m) ; quest'ultimo sarà allora

$$\underline{x}_0 + \mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M} \;=\; \{\underline{x}_0 + d\gamma_{\underline{v}_0}(\underline{v}) : \underline{v} \in \mathbb{R}^m\} \;=\; \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \left| \begin{array}{l} \nabla g_1(\underline{x}_0)\cdot(\underline{x}-\underline{x}_0) = 0 \\ \quad\vdots \\ \nabla g_{n-m}(\underline{x}_0)\cdot(\underline{x}-\underline{x}_0) = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

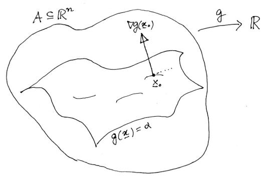
A tale proposito, mostriamo una cosa lasciata in sospeso in precedenza.

Proposizione 6.3.2. *Se* M *è il grafico di una funzione* $\phi : A \to \mathbb{R}^{n-m}$ *di classe* $\mathcal{C}^1$ *(ove* A *è un aperto di* $\mathbb{R}^m$*) e* $\underline{x}_0 = (\underline{x}'_0, \phi(\underline{x}'_0)) \in \mathrm{M}$*, allora lo spazio tangente affine a* M *in* $\underline{x}_0$ *è il grafico della "funzione affine approssimante"* (vedi pag. 55)

$$\phi(\underline{x}'_0) + \mathsf{J}_\phi(\underline{x}'_0)(\underline{x}' - \underline{x}'_0)\ .$$

Dimostrazione. Mostriamo in due modi quanto affermato. (i) La funzione $\gamma : A \to \mathbb{R}^n$ data da $\gamma(\underline{x}') = (\underline{x}', \phi(\underline{x}'))$ è una parametrizzazione globale di M, e vale $\mathsf{J}_\gamma(\underline{x}'_0) = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1}_m \\ \mathsf{J}_\phi(\underline{x}'_0)\end{smallmatrix}\right)$: dunque $\underline{x}_0 + \mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M} \;=\; \{\underline{x}_0 + d\gamma_{\underline{x}'_0}(\underline{u}) : \underline{u} \in \mathbb{R}^m\} \;=\; \left\{\left(\begin{smallmatrix}\underline{x}'\\ \underline{x}''\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\underline{x}'_0\\ \phi(\underline{x}'_0)\end{smallmatrix}\right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\begin{smallmatrix}\underline{e}_j \\ \frac{\partial\phi}{\partial x'_j}(\underline{x}'_0)\end{smallmatrix}\right) : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\right\}$. Dalle prime m equazioni si ha $\lambda_j = x_j - x_{0,j}$ (con $j = 1, \dots, m$), che messe nelle ultime $n - m$ danno $\underline{x}'' = \phi(\underline{x}'_0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial\phi}{\partial x'_j}(\underline{x}'_0)\,(x_j - x_{0,j}) = \phi(\underline{x}'_0) + \mathsf{J}_\phi(\underline{x}'_0)(\underline{x}' - \underline{x}'_0)$, come si voleva. (ii) Una funzione di definizione globale per M è $g : A \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{n-m}$ data da $g(\underline{x}', \underline{x}'') = \underline{x}'' - \phi(\underline{x}')$, e vale $\mathsf{J}_g(\underline{x}'_0, \phi(\underline{x}'_0)) = (-\mathsf{J}_\phi(\underline{x}')\,,\, \mathbf{1}_{n-m})$: dunque $\underline{x}_0 + \mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M} \;=\; \left\{\underline{x} = \left(\begin{smallmatrix}\underline{x}'\\ \underline{x}''\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^n : (-\mathsf{J}_\phi(\underline{x}')\,,\,\mathbf{1}_{n-m})\left(\begin{smallmatrix}\underline{x}' - \underline{x}'_0 \\ \underline{x}'' - \phi(\underline{x}'_0)\end{smallmatrix}\right) = \underline{0}_{n-m}\right\} \;=\; \left\{\underline{x} = \left(\begin{smallmatrix}\underline{x}'\\ \underline{x}''\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^n : -\mathsf{J}_\phi(\underline{x}')(\underline{x}' - \underline{x}'_0) + \underline{x}'' - \phi(\underline{x}'_0) = \underline{0}_{n-m}\right\}$, cioè nuovamente $\underline{x}'' = \phi(\underline{x}'_0) + \mathsf{J}_\phi(\underline{x}'_0)(\underline{x}' - \underline{x}'_0)$. □

Esempi. (1) Supponiamo che M sia una superficie in $\mathbb{R}^3$ grafico di una funzione $\phi(x, y)$, ovvero che $\mathrm{M} = \{(x, y, z) : z = \phi(x, y)\}$. Preso un punto $\underline{x}_0 = (x_0, y_0, \phi(x_0, y_0)) \in \mathrm{M}$ si ricava allora $\mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M} = \{(u, v, w) : (\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial\phi}{\partial y}(x_0, y_0), -1)\cdot(u, v, w) = 0\} = \{(u, v, w) : w = \frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial\phi}{\partial y}(x_0, y_0)v\ ;\ u, v \in \mathbb{R}\}$, e dunque il piano tangente affine a M in $\underline{x}_0$ è $\underline{x}_0 + \mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M} = \{(x_0 + u, y_0 + v, \phi(x_0, y_0) + \frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial\phi}{\partial y}(x_0, y_0)v) : u, v \in \mathbb{R}\}$. Se si eliminano i parametri u e v si ritrova la nota equazione cartesiana del piano tangente al grafico, ovvero $z = \phi(x_0, y_0) + \frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$. **(2)** Consideriamo l'insieme $\mathrm{M} = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\}$ di $\mathbb{R}^3$, e mostriamo che si tratta di una superficie di $\mathbb{R}^3$: in effetti, posto $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ si ha $\nabla g(x, y, z) = (2x, 4y, 6z)$, dunque l'unico punto in cui $\nabla g(x, y, z) = (0, 0, 0)$ è l'origine $(0, 0, 0)$ che però non sta in M. (È facile rendersi conto che M è un ellissoide.) Il punto $(1, 2, 2)$ sta in M, dunque $\mathsf{T}_{(1,2,2)}\mathrm{M} = \ker dg_{(1,2,2)} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : \nabla g(1, 2, 2)\cdot(u, v, w) = 0\} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u + 4v + 6w = 0\}$: si tratta del sottospazio generato ad esempio dai vettori $(0, 3, -2)$ e $(6, 0, -1)$. Lo spazio tangente affine sarà $\{(1, 2, 2) + \lambda(0, 3, -2) + \mu(6, 0, -1) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(1 + 6\mu, 2 + 3\lambda, 2 - 2\lambda - \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, o anche $\{(x, y, z) : \nabla g(1, 2, 2)\cdot(x - 1, y - 2, z - 2) = 0\} = \{(x, y, z) : x + 4y + 6z = 21\}$. **(3)** Consideriamo l'insieme $\mathrm{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = -5,\ xy + xz + yz = 8\}$. M è una curva regolare in $\mathbb{R}^3$: infatti, se $g(x, y, z) = (x + y + z - 5, xy + xz + yz - 8)$ si ha che $dg_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}$ ha sempre rango 2 nei punti di M (per avere rango 1 dovrebbe aversi $x = y = z$, impossibile in M). Determiniamo $\mathsf{T}_{(-2,-1,-2)}\mathrm{M}$: esso è $\{(u,v,w) : dg_{(-2,-1,-2)}(u,v,w) = (0,0)\} = \{(u,v,w) : u+v+w = 0, -3u-4v-3w = 0\} = \{(u,0,-u) : u \in \mathbb{R}\}$, dunque la retta tangente a M in $(-2,-1,-2)$ è $\{(-2,-1,-2)+(u,0,-u) : u \in \mathbb{R}\} = \{(u-2,-1,-u-2) : u \in \mathbb{R}\}$ o anche $\{(x,y,z) : dg_{(-2,-1,-2)}(x+2,y+1,z+2) = (0,0)\} = \{(x,y,z) : x+y+z+6 = 0,\ 3x+4y+3z+16 = 0\}$.



La Proposizione 6.3.1 illustra il *significato geometrico del gradiente*: se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\underline{x}_0 \in A$ e $g : A \to \mathbb{R}$ è una funzione scalare differenziabile con $\nabla g(\underline{x}_0) \neq \underline{0}_n$, posto $\alpha = g(\underline{x}_0)$ si ha che l'insieme di livello $g(\underline{x}) = \alpha$ è un'ipersuperficie regolare di A all'intorno di $\underline{x}_0$, ed il gradiente $\nabla g(\underline{x}_0)$ rappresenta il *vettore ortogonale* a tale ipersuperficie nel punto $\underline{x}_0$, orientato nel verso dei valori crescenti di g. **Significato geometrico del gradiente**

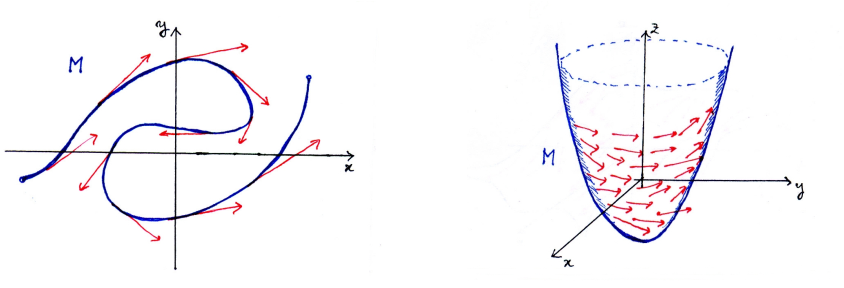
Si dirà *fibrato* (ingl. *bundle*) *tangente ad* M il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$: **Fibrato tangente**

$$\mathsf{T}\mathrm{M} = \{(\underline{x},\underline{u}) : \underline{x} \in \mathrm{M},\ \underline{u} \in \mathsf{T}_{\underline{x}}\mathrm{M}\}\ .$$

Proposizione 6.3.3. *Il fibrato tangente* $\mathsf{T}\mathrm{M}$ *è una varietà in* $\mathbb{R}^{2n}$ *di dimensione* $2m$.

Di solito, il fibrato tangente $\mathsf{T}\mathrm{M}$ è presentato con la proiezione naturale $\pi_{\mathrm{M}} : \mathsf{T}\mathrm{M} \to \mathrm{M}$ data da $\pi_{\mathrm{M}}(\underline{x},\underline{u}) = \underline{x}$. Un *campo vettoriale* su M è una "sezione" di π, ovvero una funzione $\underline{X} : \mathrm{M} \to \mathsf{T}\mathrm{M}$ tale che $\pi_{\mathrm{M}} \circ \underline{X} = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$: in altre parole, trascurando la prima componente, $\underline{X}$ associa ad ogni punto $\underline{x}$ di M un vettore $\underline{X}(\underline{x})$ scelto nello spazio tangente $\mathsf{T}_{\underline{x}}\mathrm{M}$ ad M in $\underline{x}$. Il campo $\underline{X}$ avrà una certa regolarità, che non potrà superare quella di M. **Campo vettoriale**

Esempi. (1) Si consideri la circonferenza $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$. Se $(x_0,y_0) \in \mathbb{S}^1$, allora $\mathsf{T}_{(x_0,y_0)}\mathbb{S}^1 = \{(u,v) : (2x_0,2y_0)\cdot(u,v) = 0\} = \{(u,v) : x_0u+y_0v = 0\} = \{\lambda(y_0,-x_0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Dunque, se $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ è una qualunque funzione, si ottiene un campo vettoriale $\underline{X}_\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathsf{T}\mathbb{S}^1$ ponendo $\underline{X}_\varphi(x,y) = \varphi(x,y)\,(y,-x)$ (ovvero il vettore $(y,-x)$ moltiplicato per il numero $\varphi(x,y)$). **(2)** In generale, se $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una qualsiasi funzione sommersiva e si considera l'ipersuperficie $\mathrm{M} = g^{-1}(0)$ di $\mathbb{R}^n$, allora per $\underline{x}_0 \in \mathrm{M}$ si ha $\mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M} = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^n : \nabla g(\underline{x}_0)\cdot\underline{v} = 0\}$, dunque un campo vettoriale su M è una qualsiasi funzione $\underline{X} : \mathrm{M} \to \mathbb{R}^n$ tale che $\nabla g(\underline{x})\cdot\underline{X}(\underline{x}) = 0$ per ogni $\underline{x} \in \mathrm{M}$.



Considerare un campo vettoriale su una varietà significa assegnare un vettore tangente per ogni punto della varietà.

Se $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^n$ ed $\mathrm{N} \subset \mathbb{R}^q$ sono varietà $\mathcal{C}^k$, una funzione $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ di classe $\mathcal{C}^k$ tra esse si dice anche *morfismo di varietà* $\mathcal{C}^k$: come visto dalla definizione generale di "funzione di **Morfismo di varietà** classe $\mathcal{C}^k$", ciò significa che f è in realtà (almeno localmente, attorno ad ogni punto di M) la restrizione a M di una funzione $U \to \mathbb{R}^q$ di classe $\mathcal{C}^k$, ove U è un aperto di $\mathbb{R}^n$, funzione che continueremo ad indicare con f (e allora sarà $f(U \cap \mathrm{M}) \subset \mathrm{N}$). Questo ci permette, in particolare, di considerare il differenziale $df_{\underline{x}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ di f in ogni punto $\underline{x} \in \mathrm{M}$.

Proposizione 6.3.4. *Se $\underline{x} \in \mathrm{M}$, allora $df_{\underline{x}}(\mathsf{T}_{\underline{x}}\mathrm{M}) \subset \mathsf{T}_{f(\underline{x})}\mathrm{N}$.*

Dimostrazione. Sia $\gamma : V \to \mathrm{M}$ una qualsiasi parametrizzazione locale di M attorno al punto $\underline{x}$ (ove V è un aperto di $\mathbb{R}^{\dim \mathrm{M}}$), e indichiamo con $\underline{v} \in V$ il punto tale che $\gamma(\underline{v}) = \underline{x}$; sia inoltre $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^{q-\dim \mathrm{N}}$ una qualsiasi funzione di definizione di N attorno al punto $f(\underline{x})$. Poiché chiaramente vale $g \circ f \circ \gamma \equiv 0$, differenziando in $\underline{v}$ si ottiene $dg_{f(\underline{x})} \circ df_{\underline{x}} \circ d\gamma_{\underline{u}} \equiv 0$, ovvero $df_{\underline{x}}(\mathrm{im}\, d\gamma_{\underline{u}}) \subset \ker dg_{f(\underline{x})}$. Ma questo è ciò che si voleva dimostrare. □

La Proposizione 6.3.4 mostra che un morfismo di varietà "preserva anche gli spazi tangenti", ovvero manda lo spazio tangente in un punto della varietà-dominio dentro lo spazio tangente del punto immagine nella varietà-codominio. In altre parole, per ogni $\underline{x} \in \mathrm{M}$ il morfismo f induce una funzione lineare

$$\mathsf{T}_{\underline{x}} f : \mathsf{T}_{\underline{x}}\mathrm{M} \to \mathsf{T}_{f(\underline{x})}\mathrm{N}$$

dato da $\mathsf{T}_{\underline{x}} f(\underline{u}) = df_{\underline{x}}(\underline{u})$.[85] La funzione $\mathsf{T}_{\underline{x}} f$ si dirà *differenziale* o *funzione tangente di f in $\underline{x}_0$*, e coincide con $df_{\underline{x}_0}$ se M è un aperto di $\mathbb{R}^n$. **Morfismo tangente**

Proposizione 6.3.5. *Un morfismo $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ di varietà $\mathcal{C}^k$ induce un* morfismo tangente *tra i rispettivi fibrati, dato da*

$$\mathsf{T}f : \mathsf{T}\mathrm{M} \to \mathsf{T}\mathrm{N}, \qquad \mathsf{T}f(\underline{x}, \underline{u}) = (f(\underline{x}), \mathsf{T}_{\underline{x}} f(\underline{u})) \ .$$

I teoremi delle Immersioni, delle Sommersioni e della Funzione Inversa possono essere ora enunciati, più in generale, sulle varietà. Nelle notazioni precedenti, se $\underline{x}_0 \in \mathrm{M}$ si dirà che f è *immersiva* (risp. *sommersiva*) in $\underline{x}_0$ se $\mathsf{T}_{\underline{x}_0} f : \mathsf{T}_{\underline{x}}\mathrm{M} \to \mathsf{T}_{f(\underline{x}_0)}\mathrm{N}$ è iniettiva (risp. suriettiva); e che è un'*immersione* (risp. *sommersione*) se è immersiva (risp. sommersiva) ovunque.

Proposizione 6.3.6. *I Teoremi delle Immersioni e delle Sommersioni* (Teorema 5.6.2(i)-(ii)) *e della Funzione Inversa* (Teorema 5.5.4) *valgono anche per morfismi di varietà.*[86]

Dimostrazione. Se $\underline{x}_0 \in \mathrm{M}$, esistono un intorno aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ di $\underline{x}_0$, un intorno aperto $U' \subset \mathbb{R}^q$ di $f(\underline{x}_0) \in \mathrm{N}$ ed una funzione $f : U \to U'$ che induce $f|_{U\cap \mathrm{M}} : U \cap \mathrm{M} \to U' \cap \mathrm{N}$. A meno di restringere U e U', possiamo inoltre supporre di avere parametrizzazioni locali $\gamma : V \to U$ e $\gamma' : V' \to U'$ con V aperto di $\mathbb{R}^{\dim \mathrm{M}}$ e V' aperto di $\mathbb{R}^{\dim \mathrm{N}}$: pertanto, se $\underline{v}_0 \in V$ e $\underline{v}_0' \in V'$ sono i valori dei parametri tali che $\gamma(\underline{v}_0) = \underline{x}_0$ e $\gamma'(\underline{v}_0') = f(\underline{x}_0)$, le funzioni lineari $d\gamma_{\underline{v}_0} : \mathbb{R}^{\dim \mathrm{M}} \to \mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M}$ e $d\gamma'_{\underline{v}_0'} : \mathbb{R}^{\dim \mathrm{N}} \to \mathsf{T}_{f(\underline{x}_0)}\mathrm{N}$ sono isomorfismi. Considerando allora $F : V \to V'$ data da $F = \gamma'^{-1} \circ f|_{U\cap\mathrm{M}} \circ \gamma$, tutti i risultati per f seguono da quelli per F. Ad esempio, verifichiamo il Teorema delle Immersioni (in questo caso sarà naturalmente $\dim \mathrm{M} \le \dim \mathrm{N}$): se $\mathsf{T}_{\underline{x}_0} f : \mathsf{T}_{\underline{x}}\mathrm{M} \to \mathsf{T}_{f(\underline{x}_0)}\mathrm{N}$ è iniettiva, allora lo è anche $dF_{\underline{v}_0} = (d\gamma'_{\underline{v}_0'})^{-1} \circ \mathsf{T}_{\underline{x}_0} f \circ d\gamma_{\underline{v}_0}$, e dunque il Teorema 5.6.2(i) si applica a F in $\underline{v}_0$: esiste un intorno aperto $V_1 \subset V$ di $\underline{v}_0$ in $\mathbb{R}^{\dim \mathrm{M}}$ tale che $F|_{V_1}$ sia un diffeomorfismo tra V_1 e $F(V_1) \subset V'$. Se $U_1 = \gamma(V_1) \subset U$, si ha allora che $f|_{U_1} = \gamma' \circ F|_{V_1} \circ (\gamma|_{V_1})^{-1}$ è un un diffeomorfismo tra U_1 e $f(U_1) \subset U'$. □

---

[85] Nei termini intrinseci di derivate di curve, se $\underline{u} = \gamma'(t_0) \in \mathsf{T}_{\underline{x}}\mathrm{M}$ con $\gamma :]a, b[\to \mathrm{M}$ curva derivabile, allora $f \circ \gamma :]a, b[\to \mathrm{N}$ è pure una curva derivabile, e vale proprio $\mathsf{T}_{\underline{x}} f(\underline{u}) = df_{\underline{x}}(\gamma'(t_0)) = (f \circ \gamma)'(t_0)$.

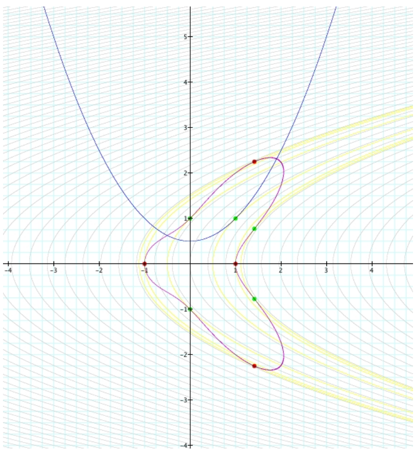
[86] Nel senso delle nozioni illustrate a pag. 70.

Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f(x,y,z) = (xz-y, z, z^2-y)$, e si consideri il piano $\mathrm{M} = \{(x,y,z) : z = x+y+1\}$. Si verifica facilmente che vale $\mathrm{N} = f(\mathrm{M}) = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = x+y^3-yz+y-z = 0\}$ (eliminare i parametri α e β da $(x,y,z) = f(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1)$), e che N è una superficie regolare (infatti è il grafico $x = x(y,z) = -(y^3-yz+y-z)$). In questo caso si ha $\mathsf{T}_{\underline{x}}\mathrm{M} = \{(a,b,a+b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ per ogni $\underline{x} \in \mathrm{M}$. Ad esempio, se $\underline{x} = (2,-1,2) \in \mathrm{M}$ allora $f(\underline{x}) = (5,2,5) \in \mathrm{N}$, e si calcola che $\mathsf{T}_{f(\underline{x})}\mathrm{N} = \{\underline{u} \in \mathbb{R}^3 : \nabla g(5,2,5) \cdot \underline{u} = 0\} = \{(u,v,w) : u+8v-3w = 0\}$; d'altra parte, si ha $df_{\underline{x}}(\mathsf{T}_{\underline{x}}\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} z & -1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2z \end{pmatrix}_{(2,-1,2)} \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+b \\ a+b \\ 4a+3b \end{pmatrix}$. Poiché tutti i vettori della forma $(4a+b, a+b, 4a+3b)$ soddisfano l'equazione $u+8v-3w = 0$, abbiamo dimostrato direttamente che $df_{\underline{x}}(\mathsf{T}_{\underline{x}}\mathrm{M}) \subset \mathsf{T}_{f(\underline{x})}\mathrm{N}$. Inoltre è chiaro che $df_{\underline{x}} : \mathsf{T}_{\underline{x}}\mathrm{M} \to \mathsf{T}_{f(\underline{x})}\mathrm{N}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali per ogni $\underline{x} \in \mathrm{M}$ (infatti $df_{\underline{x}}$ è isomorfismo di $\mathbb{R}^3$ in sè), dunque $f|_{\mathrm{M}} : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ è diffeomorfismo locale in ogni punto di M. (In realtà, in questo caso si può mostrare che si tratta di un diffeomorfismo globale.)

6.4 Estremi locali vincolati sulle varietà

Sia $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^n$ una varietà $\mathcal{C}^1$ di dimensione m, e sia $f : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ una funzione. Ci occupiamo di come ricercare eventuali *punti di estremo locale* di f su M; se f è continua e M è compatta, il Teorema di Weierstrass (Teorema 4.3.4) assicura inoltre la presenza di *punti di estremo assoluto.*

Nel caso favorevole in cui si possano rappresentare sia la varietà M che gli insiemi di livello della funzione scalare f della quale si stanno cercando gli estremi su M, si ha una naturale "visualizzazione grafica" delle soluzioni di tale problema: saranno i punti di M che, localmente o globalmente in M, stanno su insiemi di livello di f a quota minima o massima. Che questa visualizzazione sia possibile o meno, è chiaro che resta comunque il problema di come calcolare precisamente le coordinate in $\mathbb{R}^n$ di questi punti.



Esempio. Si cerchino eventuali estremi della funzione $f(x,y) = 2x - y^2$ sulla parabola M_1 data da $x^2 + 1 - 2y = 0$ (blu) e sulla curva cartesiana M_2 definita da $x^4+y^4-4xy^2 = 1$ (porpora). Le curve di livello di f sono del tipo $f(x,y) = 2x - y^2 = k$ per $k \in \mathbb{R}$: si tratta di un fascio di parabole (rappresentato in grigio) tra loro parallele con asse coincidente con l'asse x , che rappresentano valori crescenti di f man mano che si spostano verso destra. Il semplice esame dalle posizioni reciproche di ciascuna delle due curve e e delle curve di livello di f (quelle notevoli sono in giallo) ci permette di individuare i punti delle curve M_1 e M_2 che sono di estremo locale per f , anche se per ora non li sappiamo calcolare. Appare così evidente che su M_1 c'è un unico punto (verde) di massimo locale –anzi assoluto– e nessun punto di minimo locale per f. Quanto a M_2, i punti verdi (risp. rossi) sono di massimo (risp. minimo) locale per f su M_2; poiché inoltre M_2 è compatta, siamo certi che f vi assumerà estremi assoluti, e la figura suggerisce che il minimo assoluto sia assunto nel punto rosso più a sinistra di M_2, e il massimo assoluto nei due punti verdi più a destra. Tra poco saremo in grado di effettuare il calcolo dei punti, che confermerà questi pronostici qualitativi.

Se un punto $\underline{x}_0 \in \mathrm{M}$ è un estremante locale per f in M, e $\varphi : I \to \mathrm{M}$ è una qualsiasi curva derivabile passante per $\underline{x}_0$ (diciamo con $\varphi(t_0) = \underline{x}_0$), è chiaro che t_0 sarà un estremante locale per la restrizione $f \circ \varphi$: in particolare si avrà $(f \circ \varphi)'(t_0) = df_{\underline{x}_0}(\varphi'(t_0)) = 0$, ovvero $\varphi'(t_0) \in \ker df_{\underline{x}_0}$. È dunque naturale dire che un punto $\underline{x}_0 \in \mathrm{M}$ è *stazionario* per f in M se

$$\mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M} \subset \ker df_{\underline{x}_0}, \qquad \text{ovvero} \qquad \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{u} = 0 \quad \text{per ogni } \underline{u} \in \mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M}\,.$$

Si noti che, se M è un aperto di $\mathbb{R}^n$ (ovvero una varietà di dimensione massima n), allora vale $\mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M} = \mathbb{R}^n$, e si ritrova la definizione di stazionarietà per funzioni definite su aperti (ovvero che $df_{\underline{x}_0} = 0$).

Proposizione 6.4.1. *Gli estremanti locali per f in M sono stazionari per f in M.*

Dimostrazione. La definizione di stazionarietà è stata costruita appositamente su questo fatto, già dimostrato nelle righe precedenti. □

Si tratta dunque di determinare innanzitutto i punti stazionari per f in M.

Trattandosi di un problema locale, possiamo supporre che M sia definita (a) da una sola parametrizzazione , oppure (b) da una sola funzione di definizione.

(a) Se M è definita da una sola parametrizzazione $\gamma : V \to \mathrm{M} \subset \mathbb{R}^m$ con V aperto in $\mathbb{R}^m$, il problema è immediatamente ricondotto a quello noto della ricerca di estremanti locali per funzioni definite su aperti di spazio affine:

Proposizione 6.4.2. *Sia $\underline{x}_0 = \gamma(\underline{v}_0)$ un punto di* M*. Allora $\underline{x}_0$ è un punto stazionario per f se e solo se $\underline{v}_0$ lo è per $f \circ \gamma$; ed è un punto di massimo* (o minimo) *locale per f se e solo se $\underline{v}_0$ lo è per $f \circ \gamma$.*

Dimostrazione. Da $d(f \circ \gamma)_{\underline{v}_0} = df_{\underline{x}_0} \circ d\gamma_{\underline{v}_0}$ si ha che $d(f \circ \gamma)_{\underline{v}_0} = 0$ (cioè $\underline{v}_0$ è stazionario per $f \circ \gamma$) se e solo se $\mathsf{T}_{\underline{x}_0}\mathrm{M} = \operatorname{im} d\gamma_{\underline{u}_0} \subset \ker df_{\underline{x}_0}$ (cioè $\underline{x}_0$ è stazionario per f). Il resto è ovvio. □

Esempio. La parabola M_1 di equazione $x^2 + 1 - 2y = 0$, incontrata nell'esempio precedente, è facimente parametrizzabile come grafico da $\gamma(x) = (x, \frac{1}{2}(x^2 + 1))$ con $x \in \mathbb{R}$: pertanto, cercare gli estremi di $f(x, y) = 2x - y^2$ su M_1 equivale a cercare gli estremi di $F(x) := (f \circ \gamma)(x) = f(x, \frac{1}{2}(x^2+1)) = 2x - \frac{1}{4}(x^2 + 1)^2$ in $\mathbb{R}$. Derivando si ha $F'(x) = 2 - x^3 - x = -(x - 1)(x^2 + x + 2)$: essendo $F'(x) = 0$ per $x = 1$ e $F'(x) > 0$ per $x < 1$, si ha che $x = 1$ è un punto di massimo assoluto stretto per $F(x)$, con valore $F(1) = 1$, e dunque il punto $\gamma(1) = (1, 1)$ è di massimo assoluto per f su M_1 (con $f(1, 1) = F(1) = 1$), come la figura dava a vedere.

(b) Supponiamo invece che M sia descritta come insieme degli zeri di una funzione di definizione $g : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ con U aperto di $\mathbb{R}^n$ contenente M, ovvero che si abbia $\mathrm{M} = \{\underline{x} \in U : g_1(\underline{x}) = \cdots = g_{n-m}(\underline{x}) = 0\}$ con g sommersiva su M.

Assumeremo d'ora in poi che $f : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ sia di classe $\mathcal{C}^1$, il che significa che localmente f è indotta da una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ su un aperto in $\mathbb{R}^n$. A meno di restringere l'aperto, possiamo dunque supporre che f sia definita su tutto U. In particolare, si possono operare le derivate parziali di f, e per ogni $\underline{x}_0 \in \mathrm{M}$ si può considerare il differenziale $df_{\underline{x}_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Teorema 6.4.3. (Moltiplicatori di Lagrange)[87] *Un punto $\underline{x} \in \mathrm{M}$ è stazionario per f in M se e solo se il gradiente $\nabla f(\underline{x})$ è generato dagli $n-m$ gradienti $\nabla g_1(\underline{x})$, ..., $\nabla g_{n-m}(\underline{x})$, cioè se e solo se esistono $n-m$ numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m}$ tali che la $(2n-m)$-upla $(\underline{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-m})$ soddisfi il sistema vettoriale*

$$\begin{cases} \nabla f(\underline{x}) & = & \lambda_1 \nabla g_1(\underline{x}) + \cdots + \lambda_{n-m} \nabla g_{n-m}(\underline{x}) \\ g(\underline{x}) & = & 0 \ , \end{cases}$$

che equivale al sistema di $(2n-m)$ equazioni scalari

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}) & = & \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\underline{x}) + \cdots + \lambda_{n-m} \frac{\partial g_{n-m}}{\partial x_1}(\underline{x}) \\ \quad \vdots & & \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}) & = & \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\underline{x}) + \cdots + \lambda_{n-m} \frac{\partial g_{n-m}}{\partial x_n}(\underline{x}) \\ g_1(\underline{x}) & = & 0 \\ \quad \vdots & & \\ g_{n-m}(\underline{x}) & = & 0 \ . \end{cases}$$

Dimostrazione. Un punto $\underline{x} \in \mathrm{M}$ è stazionario per f in M se e solo se $\mathsf{T}_{\underline{x}}\mathrm{M} \subset \ker df_{\underline{x}}$, ovvero se e solo se il gradiente $\nabla f(\underline{x})$ è un vettore ortogonale al sottospazio $\mathsf{T}_{\underline{x}}\mathrm{M}$, ovvero se e solo se $\nabla f(\underline{x})$ è contenuto nel sottospazio ortogonale $\mathsf{T}_{\underline{x}}\mathrm{M}^{\perp} = \{\underline{w} \in \mathbb{R}^n : \underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \text{ per ogni } \underline{v} \in \mathsf{T}_{\underline{x}}\mathrm{M}\}$. Ma $\mathsf{T}_{\underline{x}}\mathrm{M}^{\perp}$ ha dimensione $n-m$,[88] dunque esso è generato dagli $n-m$ vettori linearmente indipendenti $\nabla g_1(\underline{x}), \dots, \nabla g_{n-m}(\underline{x})$ che come noto vi sono contenuti: pertanto un punto $\underline{x} \in \mathrm{M}$ è stazionario per f in M se e solo se il gradiente $\nabla f(\underline{x})$ è generato dagli $n-m$ gradienti $\nabla g_1(\underline{x})$, ..., $\nabla g_{n-m}(\underline{x})$, che è esattamente quanto si voleva dimostrare. $\square$

L'esistenza di una tale $(n-m)$-upla di numeri $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m}$ equivale a chiedere che la matrice di $M_{n-m+1,n}(\mathbb{R})$ (ovvero, con $n-m+1$ righe e n colonne) le cui righe siano formate da $\nabla f(\underline{x})$ e da $\nabla g_1(\underline{x}), \dots, \nabla g_{n-m}(\underline{x})$, abbia rango $\le n-m$ (e dunque rango $= n-m$, perché per sommersività i gradienti $\nabla g_1(\underline{x}), \dots, \nabla g_{n-m}(\underline{x})$ sono indipendenti), ovvero che *tutti i suoi minori di ordine $n-m+1$ siano singolari*: questo dà il vantaggio di ridurre le $2n-m$ incognite alle n coordinate di $\underline{x}$, che sono le sole cose interessanti.[89]

[87] Se M è un aperto in $\mathbb{R}^n$ (ovvero se $m = n$), il Teorema 6.4.3 si riduce alla Proposizione 5.4.1.

[88] In generale vale il seguente risultato, per il quale rimandiamo ad un corso di algebra lineare: *Sia b una forma bilineare su $\mathbb{R}^n$, e per un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^n$ si definisca il sottospazio b-ortogonale $V^{\perp_b} = \{\underline{w} \in \mathbb{R}^n : b(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \text{ per ogni } \underline{v} \in V\}$. Se b è nondegenerata, ovvero se $(\mathbb{R}^n)^{\perp_b} = \{\underline{0}\}$, allora per ogni sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^n$ vale* $\dim V + \dim V^{\perp_b} = n$.

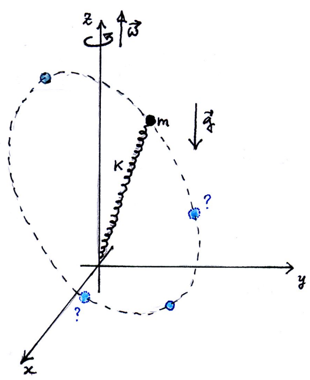
[89] Sembrerebbe che sostituire le n equazioni scalari $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}) = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_j}(\underline{x}) + \cdots + \lambda_{n-m} \frac{\partial g_{n-m}}{\partial x_j}(\underline{x})$ (ove si intende $j = 1, \dots, n$) riguardanti i moltiplicatori $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m}$ con le equazioni che esprimono il fatto che tutti i minori di ordine $n-m+1$ della matrice di $M_{n-m+1,n}(\mathbb{R})$ le cui righe siano formate da $\nabla f(\underline{x})$ e da $\nabla g_1(\underline{x}), \dots, \nabla g_{n-m}(\underline{x})$ siano singolari faccia aumentare a dismisura il numero di equazioni: in effetti, a priori, da una matrice in $M_{n-m+1,n}(\mathbb{R})$ si possono estrarre ben $\binom{n}{n-m+1}$ minori di ordine $n-m+1$. Tuttavia poiché, come detto, già si sa che tale matrice ha rango $n-m$, non è difficile dimostrare che in realtà solo $n-(n-m) = m$ di queste equazioni sono indipendenti, che unite alle $n-m$ equazioni "di vincolo" $g_1(\underline{x}) = \cdots = g_{n-m}(\underline{x}) = 0$ danno un totale di n equazioni, opportunamente destinato a determinare le n componenti del punto $\underline{x}$.

Determinati i punti stazionari per f in M, per determinare il carattere di ciascuno di essi è necessario ricondursi al caso di funzioni su aperti (per poter usare ad esempio il criterio dell'Hessiano nel Teorema 5.4.2 nel caso di regolarità $\mathcal{C}^2$), e dunque sarà necessaria una parametrizzazione locale attorno a ciascun punto stazionario.

Esempi. **(1)** Trattiamo, per iniziare, il problema (incontrato nella visualizzazione grafica di poco fa) dello studio degli estremi della funzione $f(x,y) = 2x-y^2$ sulla curva cartesiana M_2 definita da $x^4+y^4-4xy^2 = 1$. Verifichiamo innanzitutto che M_2 è una curva regolare: se $g(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy^2$ vale $\mathrm{M}_2 = g^{-1}(1)$, e g è sommersiva nei punti di M_2 (infatti $dg(x,y) = (4(x^3 - y^2), 4y(y^2 - 2x)) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ non è suriettiva solo in $(0,0)$ e in $(\sqrt{2}, \mp\sqrt[4]{8})$, nessuno dei quali sta in M_2). Il metodo di Lagrange dà luogo al sistema dato dalle equazioni $\det\begin{pmatrix} 4(x^3-y^2) & 4y(y^2-2x) \\ 2 & -2y \end{pmatrix} = 0$ (ovvero $xy(2-x^2) = 0$) e $x^4 + y^4 - 4xy^2 = 1$: se $x = 0$ si ottiene $y = \mp 1$ (dunque i punti $A_1(0,1)$ e $A_2(0,-1)$); se $y = 0$ si ottiene $x = \mp 1$ (dunque i punti $B_1(1,0)$ e $B_2(-1,0)$); se $x = \sqrt{2}$ si ottiene $y^4 - 4\sqrt{2}\,y^2 + 3 = 0$, ovvero $y = \mp\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ oppure $y = \mp\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ (dunque i punti $C_1(\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{5}})$, $C_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{5}})$, $C_3(\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{5}})$ e $C_4(\sqrt{2}, -\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{5}})$); infine, se $x = -\sqrt{2}$ si ottiene $y^4 + 4\sqrt{2}\,y^2 + 3 = 0$, privo di soluzioni reali. Per capire la natura di ciascuno di questi otto punti basta ricorrere ad una carta locale di M_2 attorno ad essi: ad esempio, vediamo la natura di $A_2(0,-1)$. Si ha $dg(0,-1) = (-4,-4)$, dunque da $g(x,y) \equiv 1$ si può esplicitare ad esempio $y(x)$ con $y(0) = -1$; derivando rispetto a x l'identità $g(x, y(x)) = 1$ si ha $4x^3 + 4y^3y' - 4y^2 - 8xyy' \equiv 0$, da cui (ponendo $x = 0$) si ottiene $-4y'(0) - 4 = 0$, da cui $y'(0) = -1$; derivando nuovamente si ha $12x^2 + 12y^2(y')^2 + 4y^3y'' - 8yy' - 8yy' - 8x(y')^2 - 8xyy'' \equiv 0$, da cui (ponendo $x = 0$) si ottiene $12 - 4y''(0) - 16 = 0$, da cui $y''(0) = -1 < 0$. Pertanto A_2 è un punto di massimo locale per f su M_2, come appariva nella figura. **(2)** Determiniamo gli estremi di $f(x,y) = xy$ su $\mathrm{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 = 1\}$ (mostrando anche che f ha estremi assoluti su M). Verifichiamo che M è una curva regolare: se $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 1$ vale $\mathrm{M} = g^{-1}(0)$, e g è sommersiva nei punti di M (infatti $dg(x,y) = (2x+y, x+2y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ non è suriettiva solo in $(0,0) \notin \mathrm{M}$). Il metodo di Lagrange dà luogo alle soluzioni $(x,y) = (\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3})$ e $(\pm 1, \mp 1)$. Per avere una carta locale attorno (ad esempio) $A(1,-1)$, essendo $\frac{\partial g}{\partial y}(A) = -1 \neq 0$ si può esplicitare $y = y(x)$: si ha allora $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y(x)) = 2x + y(x) + xy'(x) + 2y(x)y'(x) \equiv 0$ (da cui, essendo $y(1) = -1$, si ricava $y'(1) = 1$) e $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y(x)) = 2 + 2y'(x) + xy''(x) + 2(y'(x))^2 + 2y(x)y''(x) \equiv 0$ (da cui $y''(1) = 6$). Considerando allora $\psi(x) := f(x, y(x)) = xy(x)$, si ha $\psi'(x) = y(x) + xy'(x)$ (da cui $\psi'(1) = 0$, come previsto essendo A stazionario) e $\psi''(x) = 2y'(x) + xy''(x)$, da cui $\psi''(1) = 8 > 0$: dunque $x = 1$ è un punto di minimo locale stretto per ψ, e ne consegue che A è un punto di minimo locale stretto per f su M. Notiamo altresì che D è compatta: essa infatti è chiusa, ed è anche limitata perché l'equazione (in x) $x^2 + yx + (y^2 - 1) = 0$ ammette soluzioni reali se e solo se $|y| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$, e idem per x. Dunque f ammette estremi *assoluti* su M, che saranno proprio $f(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{3}$ e $f(\pm 1, \mp 1) = -1$. **(3)** Determiniamo gli estremi di $f(x,y,z) = x^2 - yz$ su $\mathrm{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 5,\ xy + xz + yz = 8\}$ che, come visto, è una curva regolare in $\mathbb{R}^3$. Il metodo di Lagrange (che qui impone che il determinante della matrice fatta con $\nabla f(x,y,z) = (2x, -z, -y)$, $\nabla g_1(x,y,z) = (1,1,1)$ e $\nabla g_2(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$ sia nullo, oltre a $g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0$) dà le soluzioni $A(1,2,2)$ e $B(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. Osservando $dg(A)$, all'intorno di A dal sistema $g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0$ si possono esplicitare x e y in funzione di z, con $x(2) = 1$ e $y(2) = 2$; derivando due volte l'identità $g_1(x(z), y(z), z) = g_2(x(z), y(z), z) \equiv 0$ rispetto a z e ponendo $z = 2$ si ottiene $x'(2) = 0$, $y'(2) = -1$, $x''(2) = 2$ e $y''(2) = -2$. Posta allora $\psi(z) := f(x(z), y(z), z)$ (funzione della variabile z, definita in un intorno di $z = 2$ in $\mathbb{R}$), si tratta di capire quale sia il carattere di $z = 2$ per ψ. Derivando si ottiene $\psi'(z) = 2xx' - y'z - y$ e $\psi''(z) = 2(x')^2 + 2xx'' - y''z - 2y'$, da cui $\psi'(2) = 0$ (ovviamente) e $\psi''(2) = 10$. Ne deduciamo che $z = 2$ è minimo locale stretto per ψ, e dunque A è punto di minimo locale stretto per f su M. Procedendo analogamente, si ottiene che anche B è punto di minimo locale stretto per f su M. **(4)** Determiniamo gli estremi di $f(x,y,z) = 2y + z$ su $\mathrm{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\}$. M è una varietà di dimensione 2 (cioè, una *superficie liscia*) in $\mathbb{R}^3$: infatti, se $g(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2-21$ si ha che $dg(x,y,z) = (2x, 4y, 6z)$ ha sempre rango 1 nei punti di M (per avere rango 0 dovrebbe essere $x = y = z = 0$, impossibile in M). È anche evidente che M è compatta (si tratta di un ellissoide), dunque f vi ammetterà estremi assoluti. Il metodo di Lagrange (che qui porge $(0,2,1) = \lambda(2x, 4y, 6z)$ e $g(x,y,z) = 0$) dà le soluzioni $\pm D$, con $D = (0,3,1)$. Essendo $f(D) = 7 = -f(-D)$, si è già capito che gli estremi di f in M sono ± 7. Giusto per esercizio, verifichiamo che D è un massimo, usando una carta. Essendo $dg(D) = (0,12,6)$, da $g(x,y,z) = 0$ posso esplicitare $y = y(x,z)$ localmente in D, con $y(0,1) = 3$; derivando parzialmente l'identità $g(x, y(x,z), z) \equiv 0$ rispetto a x e z ottengo $2x+4y\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, $4y\frac{\partial y}{\partial z}+6z = 0$, $2+4(\frac{\partial y}{\partial x})^2+4y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, $4(\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial x}+y\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}) = 0$ e $4(\frac{\partial y}{\partial z})^2+4y\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}+6 = 0$, da cui $\frac{\partial y}{\partial x}(0,1) = 0$, $\frac{\partial y}{\partial z}(0,1) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}y(0,1) = -\frac{1}{6}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}(0,1) = 0$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}(0,1) = -\frac{1}{3}$. Posta $\psi(x,z) := f(x, y(x,z), z) = 2y(x,z) + z$ (funzione di (x,z), definita in un intorno di $(x,z) = (0,1)$ in $\mathbb{R}^2$), studiamo il carattere di $(0,1)$ per ψ. Derivando si ottiene $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 2\frac{\partial y}{\partial z} + 1$ (da cui $\nabla\psi(0,1) = (0,0)$, come previsto), $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = 2\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}$ e $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 2\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$: pertanto $\mathsf{H}_\psi((0,1))$ è definito negativo, confermando che D è un massimo.

Prima di concludere l'argomento, è inevitabile parlare del problema fisico che ha portato Lagrange ad occuparsi di come individuare i punti stazionari di funzioni su varietà cartesiane.

Il metodo di Lagrange e gli equilibri di un sistema a vincoli lisci e fissi. In Meccanica Analitica, se $\underline{x}$ rappresenta la configurazione di un sistema meccanico sottoposto ad un certo numero di vincoli indipendenti fissi nel tempo (la cosiddetta *varietà vincolare* $g_1(\underline{x}) = \cdots = g_{n-m}(\underline{x}) = 0$ con $dg_{\underline{x}}$ sommersiva —ovvero $\nabla g_1(\underline{x}), \dots, \nabla g_{n-m}(\underline{x})$ linearmente indipendenti— per ogni $\underline{x}$ che soddisfa al vincolo) e lisci, cioè capaci di reazioni vincolari solo normali ai vincoli (si escludono insomma gli attriti etc.), e $f(\underline{x})$ rappresenta l'energia potenziale derivante da forze conservative agenti sul sistema, il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange dice che gli equilibri (ovvero i punti stazionari dell'energia soddisfacenti ai vincoli) si hanno dove la forza attiva $\underline{F}(\underline{x}) = -\nabla f(\underline{x})$ è normale ai vincoli, ovvero si lascia esprimere come combinazione lineare dei gradienti $\nabla g_1(\underline{x}), \dots, \nabla g_{n-m}(\underline{x})$: infatti tale forza è esattamente bilanciata dalla reazione vincolare, e non resta alcuna sollecitazione attiva residua. Tali equilibri saranno poi instabili o stabili a seconda che risultino punti di massimo o minimo locale dell'energia rispetto ai vincoli. • Ad esempio, pensiamo ad un punto materiale (x,y,z) di massa m vincolato a muoversi senza attriti sulla curva (ellisse) individuata dall'intersezione tra il paraboloide $g_1(x,y,z) = 2z - x^2 - y^2 = 0$ e il piano $g_2(x,y,z) = x+y+z-1 = 0$, e soggetto alla forza di gravità, ad una forza di richiamo elastico di coefficiente k imperniata in $(0,0,0)$ e ad una forza centrifuga apparente dovuta ad una rotazione uniforme attorno all'asse z con velocità angolare ω: l'energia potenziale è allora $f(x,y,z) = mgz+\frac{1}{2}kz^2+\frac{1}{2}(k-m\omega^2)(x^2+y^2)$. La condizione di Lagrange in questo caso si esprime dicendo che il determinante della matrice fatta



da ∇f, ∇g_1 e ∇g_2 deve essere nullo, ovvero $(kz + mg + k - m\omega^2)(x - y) = 0$. Se $x = y$, dai vincoli $g_1 = g_2 = 0$ si ricava $(x, y, z) = (\mp\sqrt{2} - 1, \mp\sqrt{2} - 1, 3 \pm 2\sqrt{2})$, gli ovvi equilibri E_- e E_+ nelle estremità inferiore e superiore dell'ellisse. D'altra parte, il fattore $kz + mg + k - m\omega^2$ può annullarsi se e solo se $z_{\min} = 3-2\sqrt{2} \le \frac{m\omega^2-mg-k}{k} \le z_{\max} = 3+2\sqrt{2}$, che equivale a $\omega_- \le \omega \le \omega_+$ con $\omega_\pm := \sqrt{g + (4 \pm 2\sqrt{2})\frac{k}{m}}$ (rotazione "equilibrata", in un intervallo opportuno): in tal caso si ha $z = z_0 = \frac{m(\omega^2-g)}{k} - 1$, e dai vincoli si ricavano altri due equilibri E_1 e E_2, simmetrici rispetto al piano $x = y$. Lo studio della stabilità degli equilibri richiede di capire la natura di questi punti stazionari: a tal fine notiamo che il vincolo si proietta sulla circonferenza $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$, di centro $(-1, -1)$ e raggio 2, dunque si può parametrizzare con $\gamma(\theta) = (-1 + 2\cos\theta, -1 + 2\sin\theta, 3 - 2(\cos\theta + \sin\theta))$. Componendo l'energia $f(x, y, z)$ con $\gamma(\theta)$ si ottiene $F(\theta) = (mg + k - m\omega^2)(3 - 2(\cos\theta + \sin\theta)) + \frac{1}{2}k(3 - 2(\cos\theta + \sin\theta))^2$, la cui derivata $F'(\theta) = 2(\sin\theta - \cos\theta)(mg + k - m\omega^2 + 3k - 2k(\cos\theta + \sin\theta))$ come previsto si annulla per $\sin\theta = \cos\theta$ (ovvero $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{5\pi}{4}$, corrispondenti risp. agli equilibri E_- e E^+), ed eventualmente per $\cos\theta+\sin\theta = \frac{m(g-\omega^2)}{2k} + 2$ (ovvero per $\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{m(g-\omega^2)}{2\sqrt{2}k} + \sqrt{2}$, gli altri due valori θ_1, θ_2 di θ simmetrici rispetto a $\frac{\pi}{4}$, corrispondenti agli equilibri E_1 e E_2 che, come visto, esistono se e solo se $\omega_- \le \omega \le \omega_+$). Derivando ancora si ha $F''(\theta) = 2\big[(\cos\theta + \sin\theta)\big(mg - m\omega^2 + 4k - 2k(\cos\theta + \sin\theta)\big) + 2k(\sin\theta - \cos\theta)^2\big]$: essendo $F''(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}(mg - m\omega^2 + (4 - 2\sqrt{2})k)$, $F''(\frac{5\pi}{4}) = -2\sqrt{2}(mg - m\omega^2 + (4 + 2\sqrt{2})k)$ e $F''(\theta_j) = 4k(\sin\theta_j - \cos\theta_j)^2 \ge 0$ (per $j = 1, 2$), si scopre che per $\omega < \omega_-$ (rotazione "lenta") E_- è stabile, E_+ instabile mentre E_1 e E_2 non esistono; per $\omega_- \le \omega \le \omega_+$ (rotazione "equilibrata") sia E_- che E_+ diventano instabili mentre E_1 e E_2 esistono e sono stabili; infine per $\omega > \omega_+$ (rotazione "veloce") E_- è instabile, E_+ diventa stabile e E_1 e E_2 non esistono. Si invita a completare lo studio della stabilità nei valori critici $\omega = \omega_\mp$, in cui gli equilibri E_1 e E_2 si sovrappongono a E_- e E_+.

Ricerca di estremi assoluti su compatti

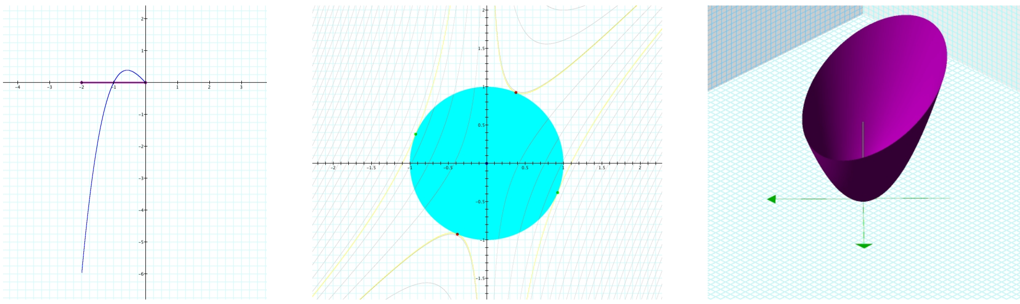
Una situazione frequente è quella in cui si ha una funzione $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ con dominio $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^n$ compatto, e si cercano il massimo e minimo assoluti di f su D, la cui esistenza è assicurata dal Teorema di Weierstrass. Se f è differenziabile e D si può decomporre in un'*unione disgiunta finita* $D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_r$ *di varietà di classe* $\mathcal{C}^1$, un metodo efficace è di *cercare, con i metodi appresi, i punti stazionari di* f *su ciascuna delle varietà* $D_1, \dots, D_r$*, e poi confrontare i valori di* f *su tali punti*: infatti, se un punto $\underline{x} \in D$ è di estremo assoluto per f su D, esso lo sarà a maggior ragione per f sulla componente D_{j_0} sulla quale si trova, dunque apparirà di certo tra i punti stazionari di f su D_{j_0}.

Il caso più semplice di compatto decomponibile come indicato è quello di *varietà compatta con bordo*, ovvero un sottoinsieme compatto $X \subset \mathbb{R}^n$ localmente diffeomorfo o a un aperto di $\mathbb{R}^m$ (nei suoi "punti interni" $\dot{X}$, che costituiscono una varietà di dimensione m nel senso usuale) o a un aperto del semispazio chiuso $\mathbb{H}^m = \{(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m : v_m \ge 0\}$ (nei punti del suo "bordo" ∂X che, preso da solo, costituisce una varietà di dimensione $m - 1$).

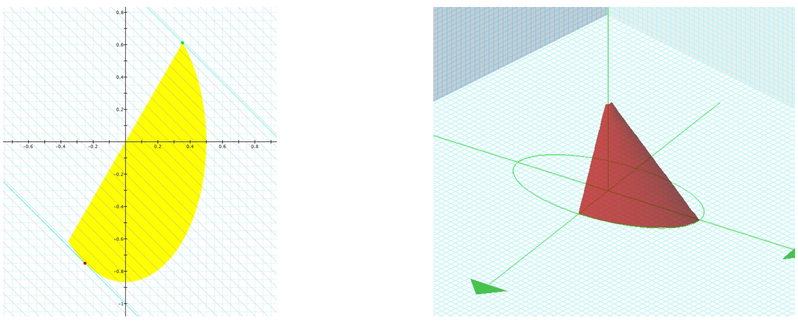
Esempi. I seguenti esempi di varietà compatta con bordo sono visualizzati in figura. **(1)** Cerchiamo gli estremi di $f(x) = x^3 - x$ sull'intervallo compatto $X = [-2, 0]$. X è una 1-varietà con bordo, con $\dot{X} =]-2, 0[$ (intervallo aperto, 1-varietà nel senso usuale) e $\partial X = \{-2, 0\}$ (insieme discreto, 0-varietà). Per trovare i punti stazionari di f su $\dot{X}$ basta derivare: essendo $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$ per $x = \mp\frac{\sqrt{3}}{3}$, l'unico punto stazionario in $\dot{X}$ è $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Invece tutti i punti di una 0-varietà sono stazionari per definizione, dunque nel nostro caso lo sono $x_2 = -2$ e $x_3 = 0$. Poiché $f(x_1) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$, $f(x_2) = -6$ e $f(x_3) = 0$, il minimo assoluto di f su X è -6 (assunto in $x_2 = -2$) mentre il massimo assoluto è $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ (assunto in $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$). **(2)** Cerchiamo gli estremi di $f(x,y) = x^2 - xy$ sul disco chiuso $\mathbb{D}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$. $\mathbb{D}^1$ è varietà con bordo, di dimensione 2: si noti che il disco aperto $\dot{\mathbb{D}}^1$ (un aperto di $\mathbb{R}^2$) è una 2-varietà nel senso usuale, mentre il bordo $\partial\mathbb{D}^1 = \mathbb{S}^1$ è una curva regolare. Nell'aperto $\dot{\mathbb{D}}^1$ i punti stazionari di f si trovano con le derivate parziali: da $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ si trova solo l'origine $O(0,0)$. Per il bordo $\partial\mathbb{D}^1$ possiamo usare la parametrizzazione $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ oppure il metodo di Lagrange, ma è meglio usare la prima (con Lagrange i conti risultano pesanti): si ha $F(\theta) := f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos^2\theta - \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta - \sin 2\theta + 1)$, da cui $F'(\theta) = -\sin 2\theta - \cos 2\theta$, dunque $F'(\theta) = 0$ per $\operatorname{tg} 2\theta = -1$, ovvero $2\theta = -\frac{\pi}{4} + \mathbb{Z}\pi$, ovvero $\theta = -\frac{\pi}{8} + \mathbb{Z}\frac{\pi}{2}$. Si hanno così i quattro punti A_1, A_2, A_3, A_4, della circonferenza unitaria di anomalie $\theta_1 = -\frac{\pi}{8}$, $\theta_2 = \frac{3\pi}{8}$, $\theta_3 = \frac{7\pi}{8}$ e $\theta_4 = \frac{11\pi}{8}$ Poiché gli unici punti sui quali gli estremi di f su $\mathbb{D}^1$ possono essere assunti sono i cinque trovati (ovvero O, A_1, A_2, A_3 e A_4), sui quali la funzione vale $f(O) = 0$, $f(A_1) = f(A_3) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1) > 0$ e $f(A_2) = f(A_4) = -\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) < 0$, il massimo assoluto di f su $\mathbb{D}^1$ è $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$ (assunto in A_1 e A_3) ed il minimo assoluto è $-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ (assunto in A_2 e A_4). **(3)** Cerchiamo i punti più in alto e più in basso di $X = \{(x,y,z) : z = x^2+y^2,\ x+y+2z-5 \le 0\}$: si tratta dell'insieme dei punti del solito paraboloide ellittico che stanno sotto o sul piano $x+y+2z-5 = 0$. Si noti che X che è compatto perché si proietta orizzontalmente sul disco $\{(x,y) : x^2+y^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{5}{2} \le 0\}$ (dunque x e y sono limitate, e così $z = x^2+y^2$). La domanda equivale ovviamente a cercare gli estremi assoluti di $f(x,y,z) = z$ su X, che è varietà con bordo con $\dot{X} = \{(x,y,z) : z = x^2+y^2,\ x+y+2z-5 < 0\}$ (punti del paraboloide che stanno sotto il piano, varietà di dimensione 2 nel senso usuale) e $\partial X = \{(x,y,z) : z = x^2+y^2,\ x+y+2z-5 = 0\}$ (l'ellisse di intersezione tra paraboloide e piano, curva regolare). $\dot{X}$ si può parametrizzare tramite la sua proiezione $D = \{(x,y) : x^2+y^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{5}{2} < 0\}$, con $\gamma(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$, pertanto si tratta di trovare i punti stazionari di $F(x,y) := f(x,y,x^2+y^2) = x^2+y^2$ che stanno in D: essendo $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ se e solo se $x = y = 0$, in $\dot{X}$ si trova l'origine $O(0,0,0)$. Per $\dot{X}$, usando Lagrange si ottiene il sistema dato da $2x-2y = 0$, $z = x^2+y^2$ e $x+y+2z-5 = 0$, che ha come soluzioni i punti $A(\frac{\sqrt{21}-1}{4}, \frac{\sqrt{21}-1}{4}, \frac{11-\sqrt{21}}{4})$ e $B(-\frac{\sqrt{21}+1}{4}, -\frac{\sqrt{21}+1}{4}, \frac{11+\sqrt{21}}{4})$. Poiché $f(O) = 0$, $f(A) = \frac{11-\sqrt{21}}{4} \sim 1{,}6$ e $f(B) = \frac{11+\sqrt{21}}{4} \sim 3{,}9$, il punto più in alto di X è B e quello più in basso è O.

Più in generale la decomposizione del compatto potrebbe essere in un numero maggiore di varietà ma il procedimento resta invariato, come mostrano i seguenti esempi.

Esempi. Anche i seguenti esempi sono visualizzati in figura. **(1)** Mostriamo che $\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2+\frac{4}{3}y^2 \le 1,\ \sqrt{3}x - y \ge 0\}$ è compatto, e calcoliamo gli estremi assoluti di $f(x,y) = x+y$ su D. In effetti, D è la parte di piano (bordo compreso) che sta dentro l'ellisse $4x^2+\frac{4}{3}y^2 = 1$ (centrata nell'origine, di semiassi $\frac{1}{2}$ lungo x e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ lungo y) e sotto la retta $y = \sqrt{3}x$, dunque è chiuso (vedi Corollario 4.3.2) e limitato (se $(x,y) \in \mathrm{D}$ allora $|x| \le \frac{1}{2}$ e $|y| \le \frac{\sqrt{3}}{2}$): pertanto è compatto, e dunque f vi ammette estremi assoluti. Ora, D si può decomporre nel suo interno $\dot{\mathrm{D}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2+\frac{4}{3}y^2 < 1,\ \sqrt{3}x-y > 0\}$ (aperto di $\mathbb{R}^2$, varietà di dimensione 2), nel segmento aperto $\mathrm{D}' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2+\frac{4}{3}y^2 < 1,\ \sqrt{3}x-y = 0\}$ (curva regolare, varietà di dimensione 1: si noti che è necessario rimuovere gli estremi per avere una varietà!), nell'arco ellittico $\mathrm{D}'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2+\frac{4}{3}y^2 = 1,\ \sqrt{3}x-y > 0\}$ (idem, altra varietà di dimensione 1), e nei due punti $\pm A$ con $A(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4})$ (che insieme formano una varietà di dimensione 0). Il solito metodo ($\dot{\mathrm{D}}$ è aperto) mostra che $\dot{\mathrm{D}}$ non contiene punti stazionari per f; parametrizzando D' con $\phi(t) = (t, \sqrt{3}t)$ (ove $t \in]-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}[$) si ha $(f \circ \phi)(t) = (\sqrt{3}+1)t$, priva di punti stazionari; per D'' il metodo di Lagrange dà $C(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$, con $f(C) = -1$; infine, vale $f(\pm A) = \pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Essendo $-1 < -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, ne deduciamo che il massimo per f su D è $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (assunto in A) ed il minimo è -1 (assunto in C). **(2)** Consideriamo il cono pieno di vertice $V(0,0,2)$ e base l'ellisse $x^2+\frac{1}{4}y^2 = 1$ sul piano (x,y), e sia X la sua porzione fatta dai punti con $x \ge 0$ e $y \ge 0$. Vogliamo determinare gli estremi assoluti di $f(x,y,z) = xy(z+1)$ su X, che è compatto (dimostrare). A tal fine, possiamo decomporre X nell'unione disgiunta di 12 varietà nel modo seguente: l'insieme discreto di punti $\{O(0,0,0), V(0,0,2), A(1,0,0), B(0,2,0)\}$ (una 0-varietà), i sei spigoli senza estremi di cui cinque rettilinei e un arco di ellisse X_1 (sei curve regolari, ovvero sei 1-varietà), le quattro facce senza spigoli di cui due triangoli, un quarto d'ellisse piena X_2' e un settore di superficie conica X_2'' (quattro superfici regolari, ovvero quattro 2-varietà) e la porzione X_3 di cono pieno senza superficie (un aperto di $\mathbb{R}^3$, ovvero una 3-varietà). Notiamo subito che su X la funzione è ≥ 0, e che si annulla su tutti e soli i punti che stanno sul piano $x = 0$ o sul piano $y = 0$: pertanto già siamo certi che il minimo assoluto di f su X è 0, assunto in tutti questi punti. Restano da controllare solo le varietà X_1, X_2', X_2'' e X_3, cui non a caso prima avevamo assegnato un nome. Sull'aperto X_3 basta studiare il sistema $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$, che però non ha ivi soluzione. X_2' può essere identificata all'aperto $U = \{x^2 + \frac{1}{4}y^2 < 1,\ x > 0,\ y > 0\}$ del piano (x, y), su cui f vale $F(x, y) := f(x, y, 0) = xy$: ma anche qui, da $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ non si trova nessuna soluzione in U. Per $X_1 = \{(x, y, z) : x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1,\ z > 0,\ x > 0,\ y > 0\}$ usiamo Lagrange, ottenendo il sistema dato da $(y^2 - 4x^2)(z + 1) = 0$ coi vincoli $z = 0$ e $4x^2 + y^2 = 4$ (con $x > 0$ e $y > 0$) che dà la sola soluzione $A(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, 0)$. Infine, parametrizziamo X_2 così: il punto generico del contorno di base (X_1) è come noto $P_\alpha = (\cos\alpha, 2\sin\alpha, 0)$ con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, e il segmento aperto che congiunge V con P_α è dato da $(0, 0, 2) + t\big((\cos\alpha, 2\sin\alpha, 0) - (0, 0, 2)\big) = (t\cos\alpha, 2t\sin\alpha, 2(1 - t))$ con $0 < t < 1$, dunque X_2 è parametrizzata da $\gamma :]0, 1[\times]0, 1[\to \mathbb{R}^3$ con $\gamma(t, \alpha) = (t\cos\alpha, 2t\sin\alpha, 2(1 - t))$ (eliminando i parametri (t, α) si trova facimente l'equazione cartesiana $(z - 2)^2 = 4x^2 + y^2$ con $0 < z < 2$). Posto $F(t, \alpha) := f(\gamma(t, \alpha)) = t^2(3 - 2t)\sin 2\alpha$, il sistema $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ non ha però soluzioni in $]0, 1[\times]0, 1[$. Pertanto il massimo assoluto di f su X non può che essere assunto nel punto A, e vale $f(A) = 1$.



(a) Il segmento chiuso $[-2, 0]$ ed il grafico di $f(x) = x^3 - x$. **(b)** Il disco chiuso $\mathbb{D}^1$ e le curve di livello di $f(x, y) = x^2 - xy$. **(c)** Il settore X del paraboloide $z = x^2 + y^2$ che sta sotto o sul piano $x + y + 2z - 5 = 0$.



(a) Il compatto D e le curve di livello di $f(x, y) = x + y$. **(b)** La porzione di cono pieno X.

Analisi Matematica II

Corrado Marastoni

Indice

1 Integrazione generalizzata **3**
1.1 Integrazione generalizzata delle funzioni positive 4
1.2 Integrazione generalizzata delle funzioni oscillanti 6
1.3 Nozioni ulteriori 8

2 Equazioni differenziali: primi elementi **10**
2.1 Nozioni generali 10
2.2 Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili 12
2.3 Equazioni differenziali lineari 14
- Equazioni differenziali lineari del primo ordine 16
- Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti 17
2.4 La meccanica newtoniana 19

3 Curve parametriche affini **23**
3.1 Preliminari 23
- Spazi vettoriali normati 23
- Sistemi di coordinate speciali nel piano e nello spazio tridimensionale 24
- Rette e coniche 25
3.2 Curve parametriche affini 31
3.3 Lunghezza, integrali al differenziale d'arco 34

4 Topologia degli spazi affini **38**
4.1 Nozioni generali 38
4.2 Limiti e continuità 40
4.3 Proprietà delle funzioni continue 44

5 Calcolo differenziale negli spazi affini **48**
5.1 Preliminari 48
- Spazi di funzioni lineari tra $\mathbb{R}$-spazi vettoriali 48
- Il caso di dimensione finita 50
5.2 Funzioni differenziabili 52
5.3 Derivabilità ulteriore 59
5.4 Estremi locali 62
5.5 Funzioni implicite, invertibilità locale 64
5.6 Immersioni e sommersioni 69
5.7 Complementi sulle funzioni integrali e sul problema di Cauchy 72

6 Calcolo differenziale sulle varietà **75**
6.1 Curve piane regolari 75
6.2 Varietà differenziali nello spazio affine 78
6.3 Spazio tangente e campi vettoriali 85
6.4 Estremi locali vincolati sulle varietà 89