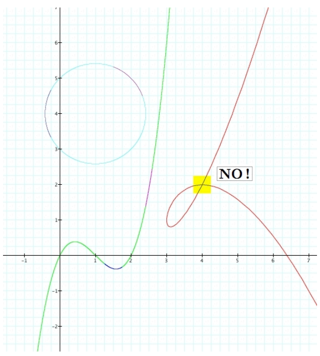
Indice

Cos'è una varietà ?

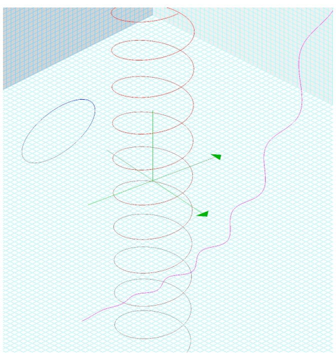
Un sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}^n$ è una varietà di dimensione m (con $m \leq n$) se, all'intorno dei suoi punti, esso *assomiglia* ad un aperto di $\mathbb{R}^m$.

Attenzione però: visto nella sua interezza, X potrebbe non *assomigliare* a $\mathbb{R}^m$!

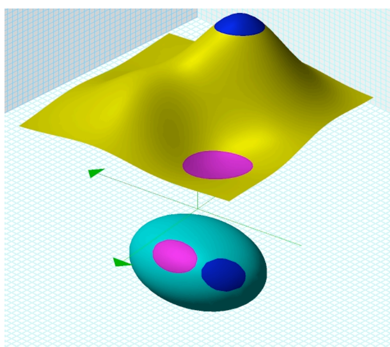
Per capirci... *"Assomigliare"* è un modo familiare per dire *"essere diffeomorfo"* !



Tre curve (varietà di dim. 1) in $\mathbb{R}^2$



Tre curve (varietà di dim. 1) in $\mathbb{R}^3$



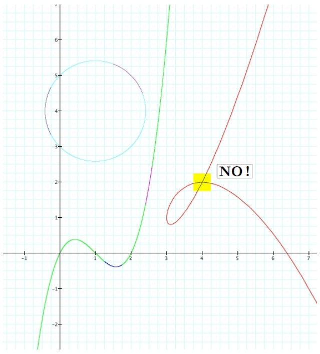
Due superfici (varietà di dim. 2) in $\mathbb{R}^3$

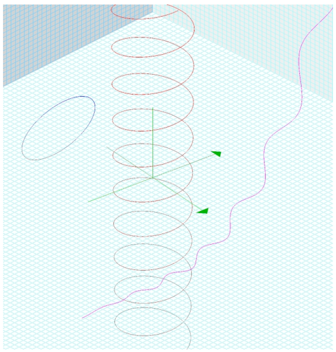
Una varietà può essere descritta in tre modi equivalenti...

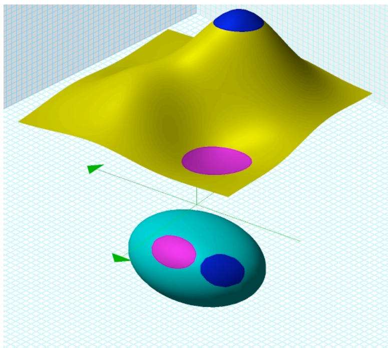
Varietà in forma parametrica

Una varietà $X \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione m si può descrivere localmente con una BUONA parametrizzazione $\gamma : V \to \mathbb{R}^n$, con V aperto di $\mathbb{R}^m$

(dunque esprimendo $\boxed{\underline{x} = \gamma(\underline{t})}$ al variare di m parametri $\underline{t} = (t_1, \dots, t_m) \in V$)







- $\gamma(\theta) = (1 + \sqrt{2}\cos\theta, 4 + \sqrt{2}\sin\theta)$
- $\gamma(x) = (x, x(x-1)(x-2))$
- $\gamma(t) = (4 + t(t-2), 2 + t^2(t-2))$
  (NON È BUONA per $t = 0$, $t = 2$)

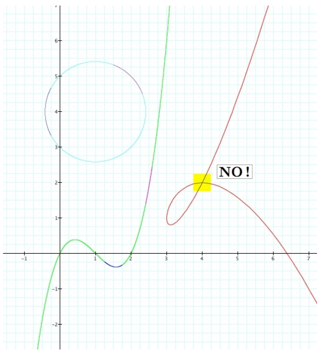
- $\gamma(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta, \theta)$
- $\gamma(\alpha) = (-1 + 2\cos\alpha,\ \sin\alpha,$
  $1 + 2\cos\alpha - \sin\alpha)$
- $\gamma(y) = (8 + y\cos y, y, (y-1)^3)$

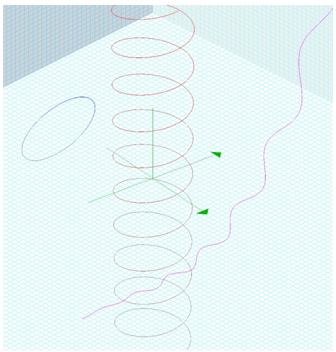
- $\gamma(x, y) = (x, y, f(x, y))$
- $\gamma(\theta, \varphi) = (a\cos\theta\sin\varphi, b\sin\theta\cdot$
  $\cdot\sin\varphi, -k + c\cos\varphi)$
  (semiassi a, b, c; abbassata di k)

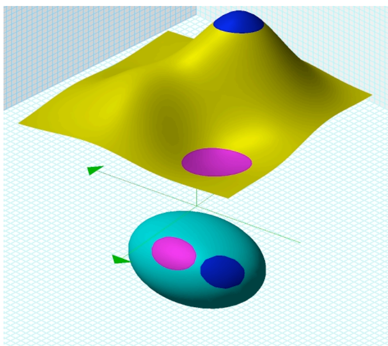
Varietà in forma grafico

Una varietà $X \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione m si può descrivere localmente come grafico di una funzione $\phi : V \to \mathbb{R}^{n-m}$, con V aperto di $\mathbb{R}^m$

(dunque esprimendo $x''_1, \dots, x''_{n-m}$ in funzione delle restanti $x'_1, \dots, x'_m$)







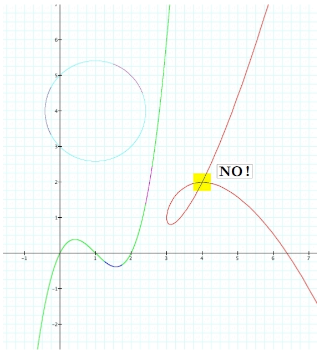
- $y = 4 + \sqrt{1 + 2x - x^2}$ (oppure...)
- $y = x(x-1)(x-2)$ (tutta!)
- $y = \phi(x) = x - 2 + (x-4)\sqrt{x-3}$
  (ramo ascendente, $x > 3$ e $x \neq 4$)

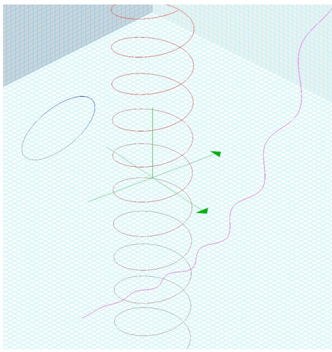
- $(x, y) = (R\cos z, R\sin z)$
- Da $\begin{cases} (\frac{x+1}{2})^2 + y^2 = 1 \\ z = x - y + 2 \end{cases}$
  $\rightsquigarrow (y, z) = (\phi_1(x), \phi_2(x))$
- $(x, z) = (8 + y\cos y, (y-1)^3)$

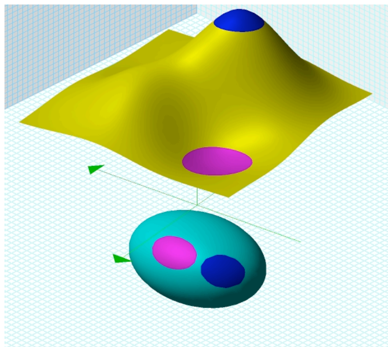
- $z = f(x, y)$
- Da $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z+k}{c})^2 = 1$
  $\rightsquigarrow z = -k + c\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2}$
  (oppure...)

Varietà in forma cartesiana

Una varietà $X \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione m si può descrivere localmente come insieme di livello di una sommersione $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, $U \subset \mathbb{R}^n$
(dunque, dentro U, X è data da $\{\underline{x} \in U : g_1(\underline{x}) = \alpha_1, \ldots, g_{n-m}(\underline{x}) = \alpha_{n-m}\}$)







- $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 2$
- $y - x(x-1)(x-2) = 0$
- Posto $\xi = x - 4$ e $\eta = y - 2$, si ha $\xi^3 - \eta^2 + 2\xi\eta = 0$

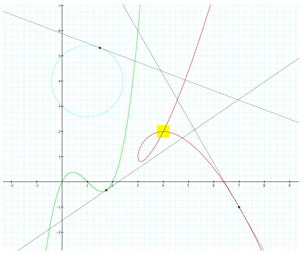
- $\begin{cases} x - R\cos z = 0 \\ y - R\sin z = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} (\frac{x+1}{2})^2 + y^2 = 1 \\ z = x - y + 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x - (8 + y\cos y) = 0 \\ z - (y-1)^3 = 0 \end{cases}$

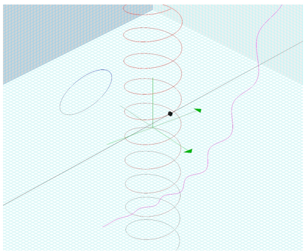
- $z - f(x,y) = 0$
- $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z+k}{c})^2 = 1$

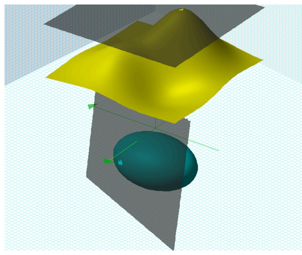
Sono tutte descrizioni globali !

Cosa si studierà sulle varietà ?

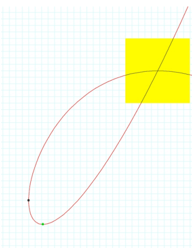
- Strutture tangenti. Calcolo dello spazio affine tangente a X in un suo punto $\underline{x}_0$ a partire da una qualsiasi delle tre forme (parametrica, grafico, cartesiana).





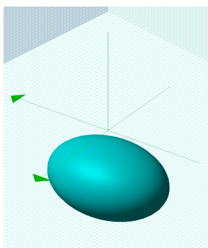


- Estremi vincolati. Data $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, ove A è aperto di $\mathbb{R}^n$ con $X \subset A$, calcolare gli estremi locali di $f|_X$ (se X è compatta, anche gli estremi assoluti)



Trovare le estremità a ovest e a sud della curva.

Significa trovare i punti della curva che sono *di minimo locale*, rispettivamente, per $f_1(x,y) = x$ e per $f_2(x,y) = y$ (il punto di minimo locale di $f_1(x,y)$ sarà anche di minimo assoluto)



In quali punti dell'ellissoide la funzione $f(x,y,z) = xyz - 2e^x$ diventa massima e minima?

f non ha estremi locali in $\mathbb{R}^3$, ma...
f è continua e l'ellissoide compatto, dunque limitandosi ai soli suoi punti gli *estremi assoluti* di f esistono !