UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di martedì 01/10/2024

$\boxed{\text{www.math.unipd.it/\~{}maraston/Analisi3}}$

Sarà già presente il seguente materiale:

- Analisi 2 (note mie)
- note di Teoria sulle Varietà Differenziali
- Informazioni generali sul corso
  - Orario: 8:30-10:30 MAR (P300), GIO (C), VEN (P300)
  - Macroargomenti del corso:
    1. Varietà differenziali e estremi vincolati
    2. Integrazione multidimensionale (aree, volumi)
    3. Teoremi classici d'integrazione di campi vettoriali (Teorema della divergenza / Gauss, formula di Green, formula di Kelvin-Stokes)
    4. Equazioni differenziali ordinarie: teoria generale
    5. Equazioni differenziali ordinarie LINEARI

VARIETÀ DIFFERENZIALI

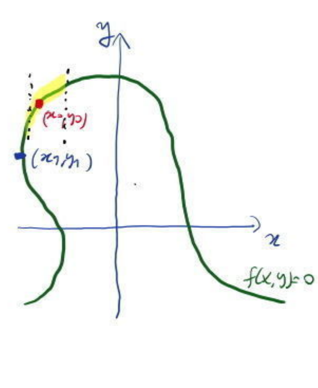
Iniziamo ricordando il TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA (Dini) in due variabili.

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ (x_0,y_0) \end{cases} \overset{?}{\rightsquigarrow} \begin{cases} y=\varphi(x) \\ y_0=\varphi(x_0) \end{cases} \quad \text{(ALMENO LOCALMENTE)}$$

$$\overset{?}{\rightsquigarrow} \begin{cases} x=\psi(y) \\ x_0=\psi(y_0) \end{cases} \quad (\text{"} \quad \text{"})$$

(f continua)

almeno in un intorno di x_0 (o di y_0)



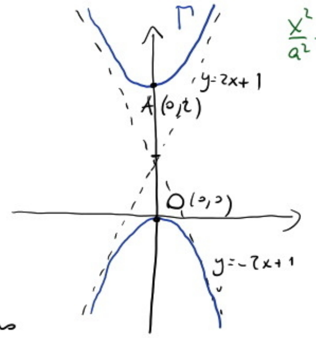
Quando è possibile questo, a seconda di chi è (x_0,y_0)?

Ex. $f(x,y) = 4x^2 - y^2 + 2y = 0$

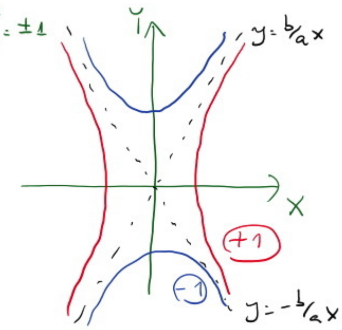
$4x^2 - y^2 + 2y - 1 + 1 = 0$

$4x^2 - (y-1)^2 = -1$

$\dfrac{x^2}{(1/2)^2} - \dfrac{(y-1)^2}{1^2} = -1$



$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$



Osservando Γ, pare che si possa esplicitare $y(x)$ attorno a ciascun punto di Γ, mentre invece la $x(y)$ si può trovare tranne che all'intorno di O e di A.

Teorema (DINI PER FUNZIONI DI DUE VARIABILI)

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f: A \to \mathbb{R}$ continua e $\mathcal{C}^1$ rispetto y.

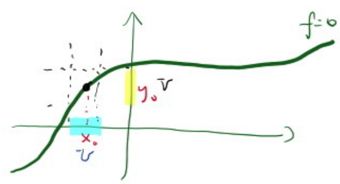
Sia $(x_0,y_0) \in A$ in cui $f(x_0,y_0) = 0$

Si assume che $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$.

Allora $\exists$ intorno $U \subseteq \mathbb{R}$ di x_0, intorno $V \subseteq \mathbb{R}$ di y_0 e un'unica funzione continua $\varphi: U \to V$ t.c. per $(x,y) \in U \times V$ si abbia che

$f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$

Inoltre se f è di classe $\mathcal{C}^k$ (oppure $\mathcal{C}^\infty$) tale è anche φ.



Dim. Supponiamo ad es. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) > 0$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ continua $\overset{\text{PERM. SEGNO}}{\Longrightarrow}$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} > 0$ IN TUTTO IL RETTANGOLO PICCOLO

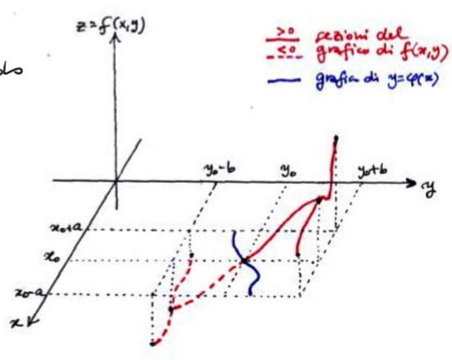
In particolare, $\forall x$ t.c. $|x - x_0| < a$ le x-sezione

$f_x:]y_0 - b, y_0 + b[\to \mathbb{R}$, $f_x(y) := f(x,y)$

è strettamente crescente $\left(f_x' = \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

Poi $f(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x_0 - b, y_0) < 0 \\ f(x_0 + b, y_0) > 0 \end{cases}$

$\overset{\text{PERM. SEGNO}}{\Longrightarrow}$ tutte le sezioni f_x partono < 0 e arrivano > 0



$\xrightarrow[\text{CRESCENTI}]{\text{ESSENDO STRETT.}}$ $\forall x \ \exists !\, y_x$ con $|y_x - y_0| < b$ t.c. $f(x, y_x) = 0$ (T. ZERI)

Poniamo dunque $\varphi(x) := y_x$

Dalla costruzione è chiaro che

$f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$, e che φ è unica.

Continuità di φ (basta vederla in x_0):

dato $\varepsilon > 0$ scegliamo a, b come sopra con $b < \varepsilon$,

allora $\varphi([x_0-a, x_0+a]) \subset [y_0-b, y_0+b] \subset [y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$.

Poi se f è $\mathcal{C}^1$ allora anche φ è $\mathcal{C}^1$ (v. NOTE, si usa Lagrange). $\square$

In generale f è complicata, dunque spesso $y = \varphi(x)$ non si potrà esprimere in forma finita. Tuttavia potrò determinare lo sviluppo di Taylor di $y = \varphi(x)$ attorno $x = x_0$ (finché consentito dalla regolarità!)

$$f(x,y) = 0 \ \xrightarrow{y=\varphi(x)} \ f(x, \varphi(x)) \equiv 0 \quad \text{all'intorno di } x = x_0$$

$$\xrightarrow{d/dx} \ \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) \cdot \overbrace{\cancel{\frac{\partial x}{\partial x}}}^{=1} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \equiv 0 \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\text{CALCOLO PER } x=x_0} \ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \varphi'(x_0) = 0 \implies \boxed{\varphi'(x_0) = -\frac{\partial_x f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0}}$$

Posso proseguire derivando $(*)$ di nuovo (rispetto x) (suppong. f sia $\mathcal{C}^2$ $\Rightarrow$ vale Schwarz)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}\varphi' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\varphi'\right)\varphi' + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \varphi'' \equiv 0$$

$$\xrightarrow{\text{CALCOLO PER } x=x_0 \text{ E RICAVO } \varphi''(x_0)} \ \boxed{\varphi''(x_0) = -\frac{\partial^2_{xx} f(x_0,y_0) + \left(2\partial^2_{xy} f(x_0,y_0) + \partial^2_{yy} f(x_0,y_0)\right)\varphi'(x_0)}{\partial_y f(x_0,y_0) \neq 0}}$$

e dunque
$$\boxed{y = \varphi(x) = \underbrace{\varphi(x_0)}_{=y_0} + \underbrace{\varphi'(x_0)}_{\text{CALCOLATO}}(x-x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{\varphi''(x_0)}_{\text{CALCOLATO}} \cdot (x-x_0)^2 + \underset{x_0}{o}(x-x_0)^2}$$

Ex. $f(x,y) = 4x^2 - y^2 + 2y = 0$ $\qquad \nabla f = (8x, -2y+2)$

- Esplicitare $y(x)$? Non si può dire $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x^2-y^2+2y=0 \\ -2y+2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=1 \\ 4x^2+1=0 \end{cases}$ No!
- Esplicitare $x(y)$? Non si può dire $\begin{cases} f=0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x^2-y^2+2y=0 \\ 8x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=0,2 \end{cases}$

  Non si può in $O(0,0)$ e $A(0,2)$.

  Tutto previsto!

  Esplicitiamo $y(x)$ attorno a O oppure attorno ad A.

O: $y=\varphi(x)$. $\varphi(0)=0$; $4x^2-y^2+2y=0 \xrightarrow{y=y(x)} 8x-2yy'+2y'=0$

$\xrightarrow{x=0} \cancel{8\cdot 0} - \cancel{2\cdot 0\cdot y'(0)} + 2y'(0)=0 \qquad y'(0)=0$

Deriviamo ancora: $8x-2yy'+2y=0 \xrightarrow{d/dx} 8-2(y')^2-2yy''+2y''=0$

$\xrightarrow{x=0} 8 - \cancel{2\cdot 0^2} - \cancel{2\cdot 0\cdot y''(0)} + 2y''(0)=0 \qquad y''(0)=-4$

$$y=\varphi(x) = 0 + 0\cdot(x-0) + \frac{1}{2}(-4)\cdot(x-0)^2 + o((x-0)^2)$$

$$y = -2x^2 + o(x^2)$$

In questo caso si poteva anche esprimere $y(x)$ in forma finita:

$4x^2-y^2+2y=0 \qquad y^2-2y-4x^2=0 \qquad y(x)=1\pm\sqrt{1+4x^2}$

Ma attorno a O deve essere $y(0)=0 \leadsto y(x)=1-\sqrt{1+4x^2}$

Invece, attorno a $A(0,2)$, sarebbe $y(x)=1+\sqrt{1+4x^2}$

Ex.

$f(x,y) = 2xe^y + y + 1 = 0$

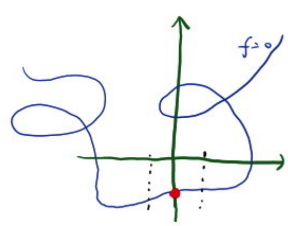
Mostrare che $f=0$ definisce all'intorno di $x_0=0$ un'unica funzione $y=\varphi(x)$ t.c. $\varphi(0)=-1$.

Determinare lo sviluppo di φ fino al II° ordine.

$f(0,-1)=0 \qquad \nabla f = (2e^y, 2xe^y+1)$

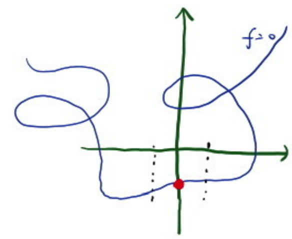
$\nabla f(0,-1) = (2/e, \underset{\neq 0}{1})$

$\varphi(0)=-1$; $\varphi'(0) = -\frac{2/e}{1} = -2/e$



Alternativamente:

$$f=0 \overset{d/dx}{\rightsquigarrow} \quad 2e^{y} + 2xy'e^{y} + y' = 0 \quad (*)$$



$$\overset{x=0}{\rightsquigarrow} \quad 2e^{-1} + \cancel{2\cdot 0\cdot y'(0)\cdot e^{-1}} + y'(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y'(0) = -2/e$$

Deriviamo ulteriormente $(*)$:

$$2y'e^{y} + 2y'e^{y} + 2x\,y''e^{y} + 2xy'\cdot y'e^{y} + y'' = 0$$

$$\overset{x=0}{\rightsquigarrow} \quad 2\cdot(-2/e)\cdot e^{-1} + 2\left(-\frac{2}{e}\right)e^{-1} + \cancel{2\cdot 0\cdot y''(0)e^{-1}} + \cancel{2\cdot 0\cdot\left(-\frac{2}{e}\right)^{2}e^{-1}} + y''(0) = 0$$

$$-4/e^{2} - 4/e^{2} + y''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y''(0) = 8/e^{2}$$

Dunque $y = \varphi(x) = -1 + (-2/e)\cdot x + \frac{1}{2}\cdot 8/e^{2}\cdot x^{2} + o_0(x^{2})$

$\boxed{\text{ESERCIZI}}$ (Risoluzioni in aula, o in calce alle prossime note pdf delle lezioni)

(1) Da $2e^{x+y} + xy^{2} + \cos y - 3 \equiv 0$ esplicitare se possibile $y(x)$ oppure $x(y)$ all'intorno della soluzione $(0,0)$, determinando lo sviluppo di Taylor al II° ordine.

(2) L'equazione $f(x,y) = x^{2} - 2xy + y^{3} + x + y^{2} - 2 = 0$ definisce tre funzioni implicite $y_j(x)$ $(j=1,2,3)$ all'intorno di $x_0 = 1$: calcolarne gli sviluppi, e ricavarne un abbozzo della curva $f(x,y)=0$ nella striscia verticale attorno a $x = x_0$.