UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 03/10/2024

Il teorema del Dini ha una naturale generalizzazione al caso di più variabili:

Es. 3 variabili $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ (x_0,y_0,z_0) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} z=\varphi(x,y) \\ \varphi(x_0,y_0)=z_0 \end{cases}$

Teorema (Dini per n variabili)

A aperto di $\mathbb{R}^n$, $f: A\to\mathbb{R}$ continua e C^1 rispetto a x_n.

Sia $\underline{x}_0=(\overbrace{x_{0_1},\dots,x_{0_{n-1}}}^{\underline{x}_0'},x_{0_n})$ t.c. $f(\underline{x}_0)=0$.

Si assume che $\frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0)\neq 0$.

Allora $\exists$ intorno $U\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ di $\underline{x}_0'$, intorno $V\subseteq\mathbb{R}$ di x_{0_n}

e un'unica $\varphi: U\to V$ t.c. per $\underline{x}=(\underline{x}',x_n)\in U\times V$ si abbia

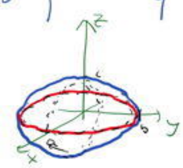
$$f(\underline{x}',x_n)=0 \iff x_n=\varphi(\underline{x}').$$

Inoltre la regolarità (C^k, C^∞) di f diventa anche quella di φ

Es. $f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$ $\quad f(x,y,z)=0$

Punti di $f=0$ in cui NON si può esplicitare $z=\varphi(x,y)$:

$\begin{cases} f=0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f=0 \\ z=0 \end{cases}$



Anche in questo caso valgono le considerazioni fatte in due variabili,
ad es. sulla sviluppabilità di φ attorno al punto base $\underline{x}_0'$
(calcolo delle derivate parziali $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\underline{x}_0'),\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}(\underline{x}_0'),\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(\underline{x}_0'),\dots$)

Calcoliamo ad esempio $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\underline{x}_0')$ per un certo fissato $1\le j\le n-1$

Si parte da $f(x_1,\dots,x_{n-1},\overbrace{\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})}^{x_n})\equiv 0$ all'intorno di $\underline{x}'\sim\underline{x}_0'$

Deriviamo parzialmente rispetto a x_j:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}',\varphi(\underline{x}'))\cdot\overbrace{1}^{\partial x_j/\partial x_j}+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}',\varphi(\underline{x}'))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=0$$

tutti gli altri addendi $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}',\varphi(\underline{x}'))\cdot\frac{\partial x_k}{\partial x_j}=0$ scompaiono ($1\le k\le n-1$, $k\neq j$)

Calcolo per $\underline{x}'=\underline{x}_0'$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0)+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\underline{x}_0')=0 \implies \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\underline{x}_0')=-\frac{\partial_j f(\underline{x}_0)}{\partial_n f(\underline{x}_0)}$$

Es.1. Da $\overbrace{2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+8}^{f(x,y,z)}=0$ si ricavi $z(x,y)$ t.c. $z(2,0)=1$, mostrando che tale funzione implicita ha ivi minimo

$\nabla f=(\partial_x f,\partial_y f,\partial_z f)=(4x-8z,\ 4y,\ 2z-8x-1)$

$f(2,0,1)=0 \qquad \nabla f(2,0,1)=(0,0,\overbrace{-15}^{\neq 0}) \rightsquigarrow \begin{cases} z(x,y) \\ z(2,0)=1 \end{cases} \quad C^\infty$

$\nabla z=(\partial_x z,\partial_y z) \qquad \nabla z(2,0)=\left(-\frac{\partial_x f(2,0,1)}{\partial_z f(2,0,1)},-\frac{\partial_y f(2,0,1)}{\partial_z f(2,0,1)}\right)=(0,0)$

Effettivamente $(2,0)$ è punto stazionario per $z(x,y)$.
Per capirne il carattere, esaminiamone la matrice Hessiana $H_z(2,0)$.

$$f=0 \;\xrightarrow{\partial_x}\; 4x + 2z\dot z_x - 8z - 8x\dot z_x - \dot z_x = 0$$

$$\xrightarrow{\partial_x}\; 4 + 2(\dot z_x)^2 + 2z\ddot z_{xx} - 8\dot z_x - 8\dot z_x - 8x\ddot z_{xx} - \ddot z_{xx} = 0$$

$$\xrightarrow{\partial_y}\; 2\dot z_x\dot z_y + 2z\ddot z_{xy} - 8\dot z_y - 8x\ddot z_{xy} - \ddot z_{xy} = 0$$

$$f=0 \;\xrightarrow{\partial_y}\; 4y + 2z\dot z_y - 8x\dot z_y - \dot z_y = 0$$

$$\xrightarrow{\partial_x}\; 2\dot z_x\dot z_y + 2z\ddot z_{xy} - 8\dot z_y - 8x\ddot z_{xy} - \ddot z_{xy} = 0$$

$$\xrightarrow{\partial_y}\; 4 + 2(\dot z_y)^2 + 2z\ddot z_{yy} - 8x\ddot z_{yy} - \ddot z_{yy} = 0$$

UGUALI (SCHWARZ)

Calcolo per $(x,y)=(2,0)$ ricordando che $z(2,0)=1$

Derivate prime:

$\dot z_x$: $\cancel{8} + 2\dot z_x(2,0) - \cancel{8} - 16\dot z_x(2,0) - \dot z_x(2,0) = 0 \Rightarrow \dot z_x(2,0) = 0$

$\dot z_y$: $0 + 2\dot z_y(2,0) - 16\dot z_y(2,0) - \dot z_y(2,0) = 0 \Rightarrow \dot z_y(2,0) = 0$

Derivate seconde:

$\ddot z_{xx}$: $4 + 0 + 2\ddot z_{xx}(2,0) - 0 - 0 - 16\ddot z_{xx}(2,0) - \ddot z_{xx}(2,0) = 0 \Rightarrow \ddot z_{xx}(2,0) = 4/15$

$\ddot z_{xy}$: $0 + 2\ddot z_{xy}(2,0) - 0 - 16\ddot z_{xy}(2,0) - \ddot z_{xy}(2,0) = 0 \Rightarrow \ddot z_{xy}(2,0) = 0$

$\ddot z_{yy}$: $4 + 0 + 2\ddot z_{yy}(2,0) - 16\ddot z_{yy}(2,0) - \ddot z_{yy}(2,0) = 0 \Rightarrow \ddot z_{yy}(2,0) = 4/15$

Dunque $H_z(2,0) = \begin{pmatrix} 4/15 & 0 \\ 0 & 4/15 \end{pmatrix}$ def. positiva!

Perciò $(2,0)$ è punto di minimo locale stretto per $z(x,y)$

N.B. In questo caso si potevano anche fare i conti per $z(x,y)$ in forma finita

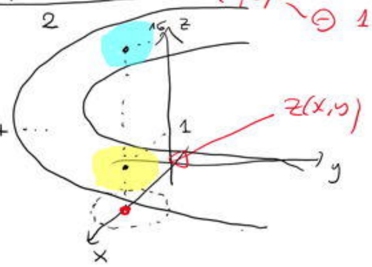
$$z^2 - (8x+1)z + 2x^2 + 2y^2 + 8 = 0 \Rightarrow z = \frac{8x+1 \pm \sqrt{56x^2 - 8y^2 + 16x - 31}}{2}$$

$(2,0)$ $\oplus$ 16, $\ominus$ 1

Nel nostro caso interessa $z(x,y) = \frac{8x+1-\sqrt{\cdots}}{2}$

Con quanto visto prima, si era comunque capito che

$$z(x,y) = \underbrace{1}_{z(2,0)} + \underbrace{(0,0)}_{\nabla z(2,0)}\cdot(x-2, y-0) + \frac{1}{2}(x-2, y-0)\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4/15 & 0 \\ 0 & 4/15 \end{pmatrix}}_{H_z(2,0)} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-0 \end{pmatrix} + \cdots$$



Versione del Dini per i SISTEMI:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (m \le n) \quad \overset{?}{\leadsto}$$

Vorrei esplicitare ad esempio le ultime m variabili $(\underline{x}'')$ rispetto alle prime $n-m$ $(\underline{x}')$

$$\underline{x} = (\overbrace{x_1, \dots, x_{n-m}}^{\underline{x}'}, \overbrace{x_{n-m+1}, \dots, x_n}^{\underline{x}''})$$

Quando questo è possibile all'intorno di una certa soluzione $\underline{x}_0 = (\underline{x}_0', \underline{x}_0'')$ di $f=0$?

Teorema (Dini per sistemi)

A aperto di $\mathbb{R}^n$, $F = (f_1, \dots, f_m) : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua.
e di classe $\mathcal{C}^1$ rispetto $\underline{x}'' = (x_{n-m+1}, \dots, x_n)$

Sia $\underline{x}_0 = (\underline{x}_0', \underline{x}_0'') \in A$ t.c. $F(\underline{x}_0) = \underline{0}$ (cioè $f_1(\underline{x}_0)=0, \dots, f_m(\underline{x}_0)=0$)

Assumiamo che $\det J_{F,\underline{x}''}(\underline{x}_0) \neq 0$

$$J_F = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\quad}^{\underline{x}'} \overbrace{\quad}^{\underline{x}''} \\ \left[\begin{array}{c|c} \nabla f_1 & \\ \vdots & \\ \nabla f_m & \end{array}\right] m \\ \underbrace{\qquad\quad}_{n-m} \underbrace{\quad}_{m} \end{array}$$

Allora $\exists$ intorno $U \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ di $\underline{x}_0'$,
$\exists$ intorno $V \subseteq \mathbb{R}^m$ di $\underline{x}_0''$ e un'unica $\varphi : U \to V$ continua t.c.
per $(\underline{x}', \underline{x}'') \in U \times V$ si abbia che

$$F(\underline{x}', \underline{x}'') = 0 \quad \left(\text{cioè } \begin{cases} f_1(\underline{x}', \underline{x}'') = 0 \\ \vdots \\ f_m(\underline{x}', \underline{x}'') = 0 \end{cases}\right) \iff \underline{x}'' = \varphi(\underline{x}')$$

Inoltre se F è $\mathcal{C}^k$ ($\mathcal{C}^\infty$) tale è anche φ.

Calcoliamo la matrice jacobiana $J_\phi(\underline{x}')$

$$F(\underline{x}', \overbrace{\phi(\underline{x}')}^{\underline{x}''}) \equiv 0 \text{ all'intorno di } \underline{x}' = \underline{x}_0' \quad \xrightarrow{\text{differenzio in } \underline{x}'}$$

$$\overbrace{J_{F,\underline{x}'}(\underline{x}', \phi(\underline{x}'))}^{m \times (n-m)} \cdot \underbrace{\overbrace{J_{\underline{x}'}(\underline{x}')}^{(n-m)\times(n-m)}}_{\mathbb{1}_{n-m}} + \overbrace{J_{F,\underline{x}''}(\underline{x}', \phi(\underline{x}'))}^{m \times m} \cdot \overbrace{J_\phi(\underline{x}')}^{m \times (n-m)} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad J_{F,\underline{x}''} \cdot J_\phi = - J_{F,x'} \quad \Rightarrow \quad J_\phi(\underline{x}') = -\left(J_{F,x''}(\underline{x}', \phi(\underline{x}'))\right)^{-1} \cdot J_{F,x'}$$

Ex.

Dal sistema $\begin{cases} 2x^2 - y + z^3 - 2t^2 + 11 = 0 \\ x^3 y + 5zt + 13 = 0 \end{cases}$ in (x,y,z,t)

esplicitare due variabili a scelta rispetto alle altre due attorno alla soluzione $(x_0, y_0, z_0, t_0) = (-1, 3, -2, 1)$ e calcolare in due modi lo sviluppo al I° ordine.

$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \qquad F(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z,t) \\ f_2(x,y,z,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 - y + z^3 - 2t^2 + 11 \\ x^3 y + 5zt + 13 \end{pmatrix}$

$F(-1, 3, -2, 1) = (0, 0)$

$J_F = \begin{pmatrix} 4x & -1 & 3z^2 & -4t \\ 3x^2 y & x^3 & 5t & 5z \end{pmatrix} \qquad J_F(-1,3,-2,1) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 12 & -4 \\ 9 & -1 & 5 & -10 \end{pmatrix}$

In questo caso tutti i minori 2×2 di $J_F(-1,3,-2,1)$ sono non singolari dunque si può esplicitare qualsiasi coppia di variabili rispetto alle altre due.

Esempio $\begin{cases} x(y,t), \ z(y,t) \\ x(3,1) = -1, \ z(3,1) = -2 \end{cases}$ $\qquad \underline{x}' = (y,t) \qquad \underline{x}'' = (x,z)$

$J_{F,(x,z)}(-1,3,-2,1) = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \quad \det = -128 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$J_{(x,z)}(3,1) = -\begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}$$

$$= -\left(-\frac{1}{128}\right) \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/128 & 25/32 \\ 13/128 & 19/32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_y(3,1) & x_t(3,1) \\ z_y(3,1) & z_t(3,1) \end{pmatrix}$$

Per cui $\begin{pmatrix} x(y,t) \\ z(y,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/128 & 25/32 \\ 13/128 & 19/32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y-3 \\ t-1 \end{pmatrix} + o(\cdots)$

Alternativamente, partendo dal sistema iniziale (con $x(y,t)$, $z(y,t)$):

$$\begin{cases} 2x^2 - y + z^3 - 2t^2 + 11 = 0 \\ x^3 y + 5zt + 13 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\partial_y} \begin{cases} 4x\dot{x}_y - 1 + 3z^2\dot{z}_y = 0 \\ 3x^2\dot{x}_y y + x^3 + 5t\dot{z}_y = 0 \end{cases}$$

$\underbrace{\overset{\text{calcolo}}{(y,t) = (3,1)}}_{\substack{x(3,1) = -1 \\ z(3,1) = -2}}$

$$\begin{cases} -4\dot{x}_y(3,1) - 1 + 12\dot{z}_y(3,1) = 0 \\ 9\dot{x}_y(3,1) - 1 + 5\dot{z}_y(3,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_y(3,1) = 7/128 \\ \dot{z}_y(3,1) = 13/128 \end{cases}$$

Idem per ∂_t.

$\boxed{\text{ESERCIZI}}$

(3) Da $\sin(xyz) - x^2y - z + 1 = 0$ dire cosa si può esplicitare all'intorno di $(-1, 0, 1)$ e calcolarne gli sviluppi.

(4) Dal sistema in (x, y, u, v, w)

$$\begin{cases} x(u+v) + yw = 3 \\ x(u^2+v^2) + yw^2 = 5 \\ x(u^3+v^3) + yw^3 = 9 \end{cases}$$

esplicitare (u, v, w) in funzione di (x, y) attorno alla soluzione $(1, 1, 0, 1, 2)$ e calcolarne lo sviluppo al I° ordine.

(5) Dal sistema in (x, y, z)

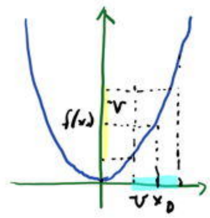
$$\begin{cases} x^4yz - 3y^3 + 2xz^3 = 3 \\ x^2 - 2y^2 + z^3 - 5z + 4xy + 4 = 0 \end{cases}$$

esplicitare in tutti i modi possibili due delle variabili rispetto alla terza attorno alla soluzione $(0, -1, 2)$ e calcolare gli sviluppi al I° ordine in due modi. Geometricamente, cosa si sta facendo?

DIFFEOMORFISMO LOCALE

Partiamo dal caso di una variabile.

$f(x) = x^2$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



f non è certo diffeomorfismo (non è né inj né surj!) ma lo è all'intorno di ogni $x_0 \neq 0$.
La condizione decisiva è $f'(x_0) \neq 0$

Def $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$.
Si dice che f è DIFFEOMORFISMO LOCALE IN x_0 DI CLASSE $\mathcal{C}^k$ se f lo è all'intorno di x_0, ovvero se $\exists$ intorno U di x_0 t.c. $f|_U : U \to V = f(U)$ sia diffeomorfismo $\mathcal{C}^k$.

Nel caso di 1 variabile si è capito che la condizione è che la derivata in x_0 non si annulli. Funziona così anche in generale:

Teorema (FUNZIONE INVERSA)
f diffeo locale in $x_0 \iff \det J_f(x_0) \neq 0$.

Dim. $\Rightarrow$ $\exists$ intorno U di x_0 in A t.c. $U \underset{g = f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} V := f(U)$ $\quad g \circ f = id_U$
se differenziamo in x_0 otteniamo
$J_{g \circ f}(x_0) = J_{id_U}(x_0)$ ovvero $J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0) = \mathbb{1}_n$
Ne segue che $J_f(x_0)$ è invertibile.

$\Leftarrow$ $f : \underset{(x_1, \dots, x_n)}{A} \longrightarrow \underset{(y_1, \dots, y_n)}{\mathbb{R}^n}$ $\qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$

Problema: si possono invertire queste equazioni esprimendo $x_1, \dots, x_n$ in funzione di $y_1, \dots, y_n$?

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) := y_1 - f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) := y_n - f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

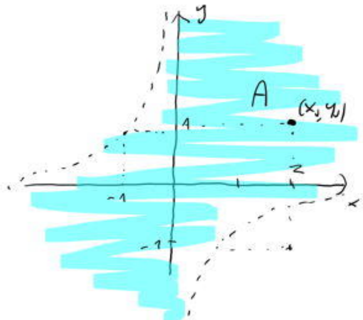
Possiamo esprimere le $x_1, \dots, x_n$ in funz. delle $y_1, \dots, y_n$?
Dini: $J_{g, \underline{x}}(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$ sia invertibile, ma
$J_{g, \underline{x}}(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0)) = -J_f(\underline{x}_0)$. Ma ciò è vero per ipotesi. //

Ex

Calcolare il dominio di $f(x,y) = (\log(xy+1),\ 2x^2-y^2)$, dire in quali punti f è diffeo locale e sviluppare l'inversa locale di f attorno $(x_0,y_0) = (2,1)$ al I° ordine. Calcolare infine tale inversa in forma finita.

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto

$A = \{(x,y) : xy+1 > 0\}$



$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{y}{xy+1} & \frac{x}{xy+1} \\ 4x & -2y \end{pmatrix} \qquad \det J_f = -\frac{4x^2+2y^2}{xy+1}$$

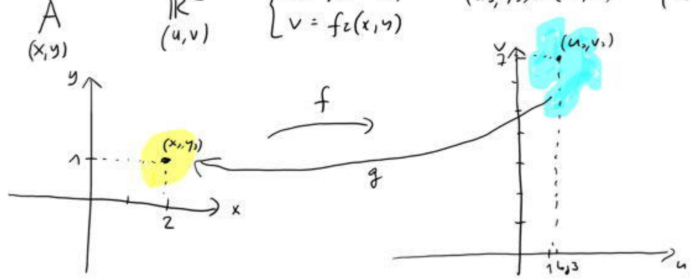
$\det J_f \neq 0 \iff (x,y) \neq (0,0)$

Dunque f è diffeo locale $\forall (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$

(in particolare f di certo non è diffeomorfismo, ma si poteva vedere subito notando che f non è inj perché $f(-x,-y) = f(x,y)$).

Sia g l'inversa locale di f all'intorno di $(x_0,y_0) = (2,1)$

$\underset{(x,y)}{A} \qquad \underset{(u,v)}{\mathbb{R}^2} \qquad \begin{cases} u = f_1(x,y) \\ v = f_2(x,y) \end{cases} \qquad (x_0,y_0) = (2,1) \qquad (u_0,v_0) = f(x_0,y_0) = (\log 3, 7)$



$$g(u,v) = g(u_0,v_0) + J_g(u_0,v_0)\begin{pmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + J_f(2,1)^{-1}\begin{pmatrix} u-\log 3 \\ v-7 \end{pmatrix} + \cdots = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} u-\log 3 \\ v-7 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & 1/9 \\ 4/3 & -1/18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u-\log 3 \\ v-7 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -2/3 \\ -8 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 + 1/3\,(u-\log 3) + 1/9\,(v-7) + \cdots \\ 1 + 4/3\,(u-\log 3) - \frac{1}{18}(v-7) + \cdots \end{pmatrix}$$

Calcoliamo infine l'espressione finita dell'inversa locale

$\begin{cases} u = \log(xy+1) \\ v = 2x^2 - y^2 \end{cases}$ all'intorno di $(x_0,y_0) = (2,1)$

$\begin{cases} xy+1 = e^u \\ v = 2x^2-y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{e^u-1}{x} \quad x \sim 2\ (x \neq 0) \\ v = 2x^2-y^2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &2x^2 - \frac{(e^u-1)^2}{x^2} = v \\ &2x^4 - vx^2 - (e^u-1)^2 = 0 \end{aligned}$

$$x^2 = \frac{v \pm \sqrt{v^2 + 8(e^u - 1)^2}}{4} \implies x = \overset{+}{\cancel{-}} \frac{\sqrt{\sqrt{v^2 + 8(e^u-1)^2} + v}}{2} = x(u,v)$$

LA SOLUZIONE COL MENO È SPURIA (DAREBBE $x^2 < 0$)

$x \sim 2$ ($x > 0$)

$$y^2 = 2x^2 - v \implies y = \overset{+}{\cancel{-}} \sqrt{2x^2 - v} = \dots = \frac{\sqrt{\sqrt{v^2 + 8(e^u-1)^2} - v}}{\sqrt{2}} = y(u,v)$$

$y \sim 1$ ($y > 0$)

Dunque l'inversa locale cercata è $g(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

(ne avevamo già trovato lo sviluppo di Taylor in $(u_0,v_0) = (\log 3, 7)$)