Università degli Studi di Padova

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 04/10/2024

Ci proponiamo ora di generalizzare quanto ottenuto col Teorema della funzione inversa al caso di funzioni tra spazi di dimensione diverse.

Def. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ differenziabile in $\underline{x}_0 \in A$.

- Se $n \le m$, f si dirà IMMERSIVA IN $\underline{x}_0$ se $df_{\underline{x}_0}$ è inj
  (ovvero $J_f(\underline{x}_0) = \begin{array}{cc} & n \\ m & \boxed{} \end{array}$ ha rango max n)
- Se $n \ge m$, f si dirà SOMMERSIVA IN $\underline{x}_0$ se $df_{\underline{x}_0}$ è surj
  (ovvero $J_f(x_0) = \begin{array}{cc} & m \\ m & \boxed{} \end{array}$ ha rango max m)

f si dirà IMMERSIONE / SOMMERSIONE se è imm./somm. $\forall \underline{x}_0 \in A$

- $\mathbb{R} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^3$, $i(x) = (x, 0, 0)$ (più gen.: $\mathbb{R}^{n \le m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\underline{x}' \mapsto (\underline{x}', \underline{0})$)
  INCLUSIONE (include $\mathbb{R}$ dentro $\mathbb{R}^3$ come l'asse x)
  $J_i(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ovviamente iniettiva (come mappa lin. $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$)
  È l'esempio più semplice di immersione.
  Più in generale, si abbia una CURVA PARAMETRICA
  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con I intervallo aperto di $\mathbb{R}$.
  $d\gamma_t = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_m'(t) \end{pmatrix} = \gamma'(t)$,

  dunque γ è immersiva in $t_0 \iff \gamma'(t_0) \neq 0$ (il vettore derivato VELOCITÀ non si annulla)

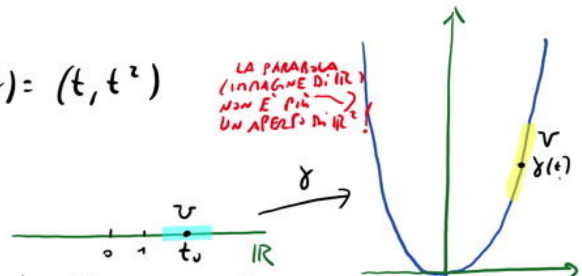
- $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}$, $(x, y, z) \overset{\pi_2}{\longmapsto} y$ (più gen.: $\mathbb{R}^{n \ge m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $(\underline{x}', \underline{x}'') \longmapsto \underline{x}''$)
  PROIEZIONE (proietta $\mathbb{R}^3$ sull'asse y)
  $J_{\pi_2}(x,y,z) = (0 \quad 1 \quad 0)$ ovviamente surj (come funz. lin. $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$)
  È l'esempio più semplice di sommersione.
  Più in generale si abbia una FUNZIONE SCALARE
  $g: A \longrightarrow \mathbb{R}$ con A aperto di $\mathbb{R}^n$.
  $J_g(\underline{x}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(\underline{x}) \ \cdots \ \frac{\partial g}{\partial x_n}(\underline{x}) \right) \longleftrightarrow \nabla g(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(\underline{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(\underline{x}) \end{pmatrix}$
  dunque g è sommersiva in $\underline{x}_0 \iff \nabla g(\underline{x}_0) \neq \underline{0}$.

Si vorrebbe che all'immersività/sommersività di f in x_0 corrispondesse un'iniettività/suriettività locale di f vicino x_0:

ad esempio, "iniettività locale" vorrebbe dire che 'un intorno di x_0 viene mandato diffeomorficamente nella sua immagine'

Ma questo è un po' delicato, perché se $n \neq m$ l'immagine può essere più un aperto del codominio, dunque cosa vuol dire "diffeomorfismo"? Noi finora conosciamo solo la nozione di diffeomorfismo tra aperti ...

Ex $\quad \gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, t^2)$



Cosa vuol dire che l'intervallo azzurro U è diffeomorfo alla sua immagine, il pezzo di parabola giallo?
Dovremo parlarne meglio...

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

(6) Dire dove $f(x,y,z) = (2xy+z,\ 3-x^2,\ 1+yz^2)$ è diffeo locale, e svilupparne l'inversa locale in $(x_0,y_0,z_0) = (1,0,-2)$. Calcolare poi l'immagine dei tre assi coordinati e l'antiimmagine di $(0,0,0)$.

Va precisato cosa si intende per "DIFFEOMORFISMO" in generale.

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $E \subseteq \mathbb{R}^q$ due sottoinsiemi qualsiasi, $h: D \to E$ funzione.

- NOZIONE DI CLASSE $\mathcal{C}^k$ IN $\underline{x}_0 \in D$

Se D è aperto di $\mathbb{R}^p$, già sappiamo.
Altrimenti, chiedo che esistano un intorno $U \subseteq \mathbb{R}^p$ di $\underline{x}_0$
e una funzione $\tilde{h}: U \to \mathbb{R}^q$ t.c. $\tilde{h}$ sia di classe $\mathcal{C}^k$
e $\tilde{h}|_{U\cap D} = h|_{U\cap D}$ (ovvero: h è indotta da una funzione
$\tilde{h}$ di classe $\mathcal{C}^k$ su un $\underline{\text{aperto}}$ di $\mathbb{R}^p$)

- NOZIONE DI DIFFEOMORFISMO $\mathcal{C}^k$

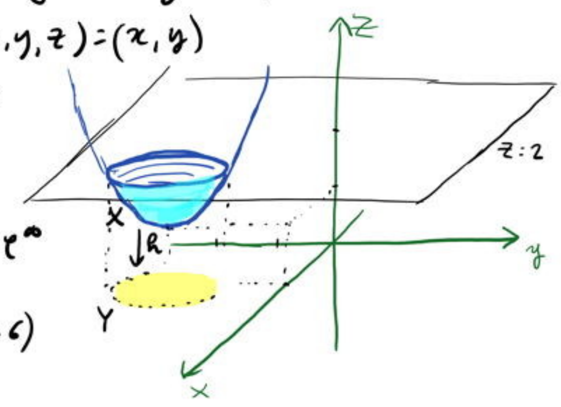
h sia omeomorfismo, e h e h^{-1} sono di classe $\mathcal{C}^k$
(nel senso appena detto)

$\underline{\text{Ex.}}$ $X = \{(x,y,z) : z = \underbrace{x^2+y^2-2x+4y+6}^{(x-1)^2+(y+2)^2+1}, z<2\}$

$h: X \to \mathbb{R}^2$, $h(x,y,z) = (x,y)$

È un diffeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$
tra X e $Y = h(X)$:

- h è indotta da $\tilde{h}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $\tilde{h}(x,y,z) = (x,y)$ che è $\mathcal{C}^\infty$
- h è biiettiva
- $h^{-1}(x,y) = (x,y,x^2+y^2-2x+4y+6)$ è $\mathcal{C}^\infty$.



Posso ora enunciare il

$\underline{\text{Tm.}}$ (TEOREMA DELLE IMMERSIONI) $f: A \to \mathbb{R}^m$ con A aperto di $\mathbb{R}^n$, $n \le m$
f immersiva in $x_0 \iff \exists$ intorno aperto $U \subseteq A$ di x_0 t.c.
$f: U \to V = f(U)$ sia diffeomorfismo
(cioè: f identifica U con la sua immagine)

$\underline{\text{Tm.}}$ (TEOREMA DELLE SOMMERSIONI) Stavolta sia $n \ge m$.
f sommersiva in $x_0 \iff$ "f si comporta localmente come proiezione"
(enunciato più preciso sulle dispense).

Ex. CURVA OTTO $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin t, \sin t \cos t)$

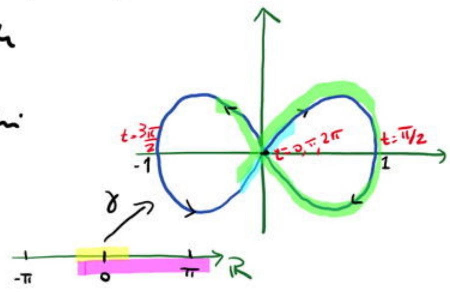
$\gamma'(t) = (\cos t, \cos 2t) = (0,0)$ impossibile

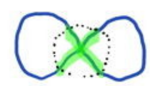
$\Rightarrow \gamma$ è immersione.

Dove però vale il T. Immersioni

Vero? Sì: l'intervallo giallo (intorno di $t=0$) è diffeomorfo alla sua immagine azzurra.

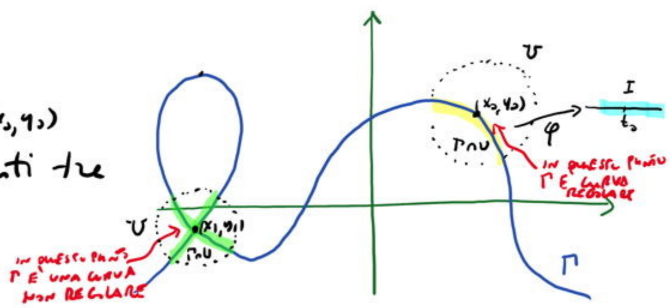
MA un intero intorno del punto sulla curva non può essere diffeomorfo a un intervallo...





CURVE PIANE REGOLARI

$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ è CURVA PIANA REGOLARE IN (x_0, y_0) se è soddisfatta una delle seguenti tre condizioni equivalenti.



(1) FORMA PARAMETRICA: vicino (x_0,y_0), Γ è diffeomorfo a un intervallo.

$\exists$ intorno aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ di (x_0,y_0), $\exists$ intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ e un diffeomorfismo $\varphi : \Gamma \cap U \xrightarrow{\sim} I$ (CARTA LOCALE DI Γ VICINO (x_0,y_0))

L'inversa $\gamma = \varphi^{-1} : I \longrightarrow \Gamma \cap U \subseteq \mathbb{R}^2$ è detta PARAMETRIZZAZIONE LOCALE

Ex. La curva-otto è regolare in ogni suo punto tranne che nell'origine.

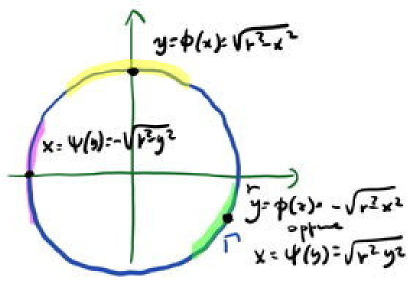
(2) FORMA GRAFICO: vicino (x_0,y_0), Γ è grafico di una $y=\phi(x)$ (oppure $x=\psi(y)$)

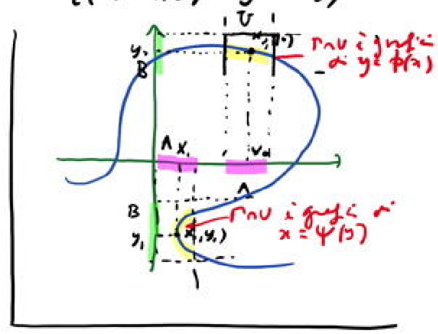
$\exists$ intorni $A\subseteq\mathbb{R}$ di x_0, $B\subseteq\mathbb{R}$ di y_0 e una $\phi: A\to B$ (opp. $\psi: B\to A$)

t.c. posto $U = A\times B$ si ha

$\Gamma\cap U = \{(x,\varphi(x)) : x\in A\}$ (oppure $\Gamma\cap U=\{(\psi(y),y) : y\in B\}$)

Ex. circonferenza: è curva regolare!



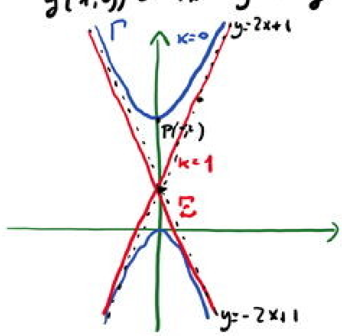


(3) FORMA CARTESIANA (o VINCOLARE): Γ è insieme di livello di una sommersione

$\exists$ U intorno di (x_0,y_0) in $\mathbb{R}^2$ e $g: U\to\mathbb{R}$ col gradiente mai nullo

t.c. $\Gamma\cap U = \{(x,y)\in U : g(x,y)=\alpha\}$ per un certo $\alpha\in\mathbb{R}$.

Ex. $g(x,y)=4x^2-y^2+2y$ $\quad$ $\Gamma=\{g(x,y)=0\}$



$\nabla g = (8x,\ 2-2y)$

$\nabla g=(0,0) \iff (x,y)=(0,1)$

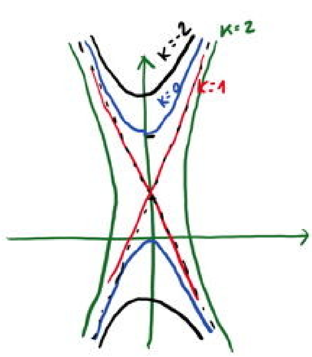
Ma "fortunatamente" NON è un punto della curva!

Dunque Γ è regolare!

Ma ci sono altri insiemi di livello di g:

$g(x,y)=k$ con $k\in\mathbb{R}$ (livelli)

- $k=1$ $\quad 4x^2-y^2+2y=1$, $\quad 4x^2=(y-1)^2$
  UNIONE DEI DUE ASINTOTI!
  $2x=\pm(y-1)$ $\quad y-1=\pm 2x$ $\quad y=\pm 2x+1$
  $\Sigma=\{g(x,y)=1\}$ è regolare tranne che nel suo punto $(0,1)$.



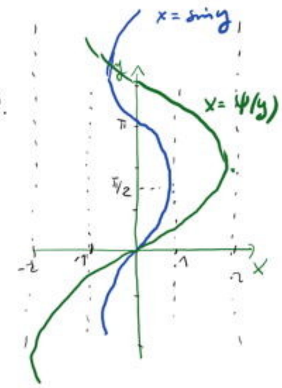
- $k=-2$ $\quad 4x^2-y^2+2y=-2$ $\quad 4x^2-(y-1)^2=-3$
  $\frac{(y-1)^2}{(\sqrt{3})^2}+\frac{x^2}{(\sqrt{3}/2)^2}=1$ iperbole un po' più esterna di Γ
- $k=2$ $\quad 4x^2-y^2+2y=2$ $\quad 4x^2-(y-1)^2=1$
  $\frac{x^2}{(1/2)^2}-\frac{(y-1)^2}{1^2}=1$ iperbole con rami negli altri settori

Come detto, le tre definizioni sono equivalenti.
Vediamo come si passa da una alle altre.

$\boxed{\text{Ex.}}$ • $\gamma(t) = (2\sin 2t, 3t)$ curva parametrica (forma (1))

$\gamma'(t) = (4\cos 2t, 3) \neq (0,0) \quad \forall t \Rightarrow$ è immersione!

(Questo garantisce che le immagini tramite γ di piccoli intervalli sono curve regolari)



$$\begin{cases} x = 2\sin 2t \\ y = 3t \end{cases}$$

Per passare alla forma grafico (2) bisogna "eliminare il parametro" invertendo una delle due $x(t)$ o $y(t)$.
(T. FUNZ. INVERSA)

$$\begin{cases} t = y/3 \\ x = 2\sin\left(\frac{2y}{3}\right) = \psi(y) \end{cases}$$

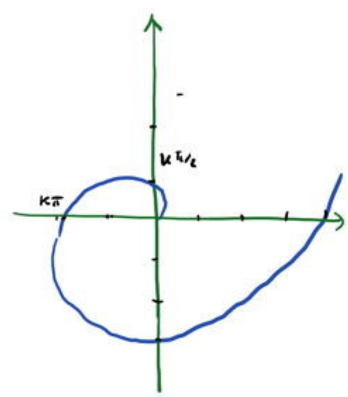
Per la forma cartesiana (3):

$x = 2\sin(2y/3) \Rightarrow \underbrace{x - 2\sin(2y/3)}_{g(x,y)} = 0$

Notiamo che $\nabla g = \left(1, -\frac{4}{3}\cos(2y/3)\right) \neq (0,0)$

dunque g è sommersione (AUTOMATICO QUANDO SI HA UN GRAFICO!)

• $\rho(\theta) = K\theta$ SPIRALE DI ARCHIMEDE $(K>0)$



$\rightsquigarrow \gamma(\theta) = (\overset{x(\theta)}{K\theta\cos\theta}, \overset{y(\theta)}{K\theta\sin\theta})$

$\gamma'(\theta) = (K(\cos\theta - \theta\sin\theta), K(\sin\theta + \theta\cos\theta)) \neq (0,0) \quad \forall\theta \Rightarrow$ immersione

VERIFICA (valida per generiche curve polari $\rho(\theta)$)

$\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$

$\Rightarrow \gamma'(\theta) = (\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta, \rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho' \end{pmatrix}$$

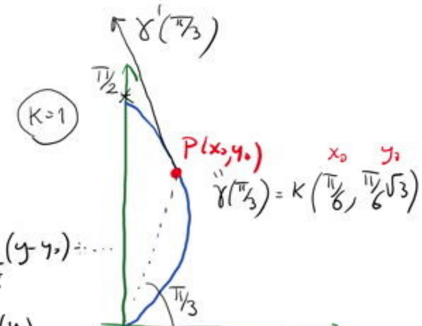
Ponendo $\gamma'(\theta) = (0,0) \Rightarrow \rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0$

Siamo in forma parametrica (1).

$$\begin{cases} x = K\theta\cos\theta \\ y = K\theta\sin\theta \end{cases}$$

Es. $\theta_0 = \pi/3$

$\gamma'(\pi/3) = K\left(\overset{x'(\pi/3)}{\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}}, \underbrace{\overset{y'(\pi/3)}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}}}_{\neq 0}\right)$



Poiché $y'(\pi/3) \neq 0$ posso invertire $y(\theta)$

scrivendo $\theta(y)$ vicino a $\theta \sim \pi/3$:

$\theta(y) = \theta(y_0) + \theta'(y_0)(y-y_0) + o_{y_0}(y-y_0) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}}(y-y_0) \ldots$

Sostituiamo $x = K\theta\cos\theta = K\cdot\theta(y)\cdot\cos\theta(y) = \psi(y)$

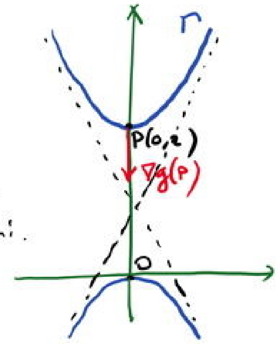
(forma grafico (2))

Forma cartesiana: $g(x,y) = x - \psi(y) = 0$.

- $g(x,y) = 4x^2 - y^2 + 2y = 0 \qquad P(0,2)$

$\nabla g = (8x, 2-2y) \qquad \nabla g(P) = (0,-2)$

Per trovare una forma grafico (2) per Γ attorno a P devo esplicitare una delle due variabili da $g(x,y)=0$, e lo faccio col Dini.



$\nabla g(P) = (0, \overset{\neq 0}{-2}) \longrightarrow y = \phi(x)$

con $\phi(0) = 2$, $\phi'(0) = -\frac{0}{-2} = 0$, ...

$4x^2 - y^2 + 2y = 0$ con $y(x) \overset{\partial_x}{\rightsquigarrow} 8x - 2yy' + 2y' = 0 \overset{x=0}{\rightsquigarrow} 0 - 4y'(0) + 2y'(0) = 0$
$\Rightarrow y'(0) = 0$ (ok)

$\overset{\partial_x}{\rightsquigarrow} 8 - 2(y')^2 - 2yy'' + 2y'' = 0 \overset{x=0}{\rightsquigarrow} 8 - 2\cdot 0^2 - 2\cdot 2\cdot y''(0) + 2y''(0) = 0$
$\Rightarrow y''(0) = 4$

Dunque $y = \phi(x) = 2 + 0\cdot(x-0) + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot(x-0)^2 + o_0(x^2)$
$= 2 + 2x^2 + o(x^2)$

Tra l'altro qui posso calcolare ϕ in forma finita: $g = 0 \Rightarrow y^2 - 2y - 4x^2 = 0$
$\Rightarrow y = 1 \overset{+}{\cancel{-}} \sqrt{1+4x^2} = \phi(x)$ (forma grafico)

Forma parametrica: $y = \phi(x) \Rightarrow \gamma(x) = (x, \phi(x)) = (x, 1+\sqrt{1+4x^2})$
(quando si ha un grafico si ha subito anche una parametrizzazione!)

$\boxed{\text{ESERCIZI}}$

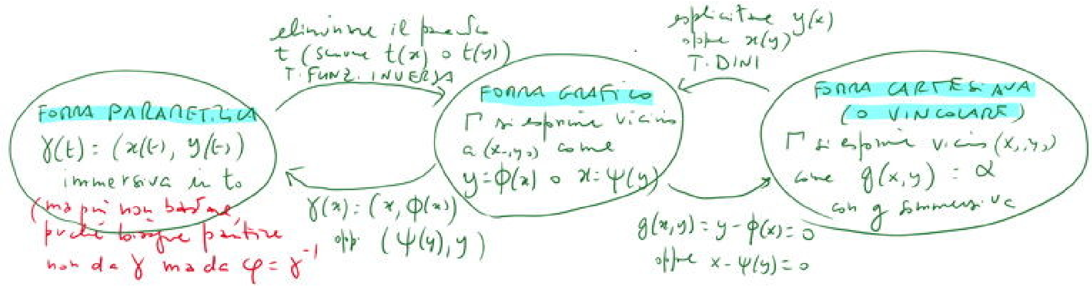
(7) Quali curve di livello di $g(x,y) = x^3 - 3x^2y + y^2$ sono curve piane regolari? Discutere le tre forme possibili per la curva di livello di g passante per il punto $P(-1,2)$.
[Si ricordi che le CURVE DI LIVELLO di g sono gli insiemi $\Gamma_\alpha = \{(x,y) : g(x,y) = \alpha\}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$: chiaramente costituiscono una partizione del piano $\mathbb{R}^2$, ovvero sono a due a due disgiunti e ricoprono tutto il piano.]

(8) Stessa domanda per $g(x,y) = e^{xy} + x + 2y$ e $P(0,1)$.

(9) Esprimere la curva-otto nelle tre forme, dicendo in quali punti essa è regolare.

(10) Stessa domanda per i grafici di $y = \phi(x) = e^x - \sin x$ e di $x = \psi(y) = y - 2\log(y^2+1)$.

Ricapitoliamo il quadro per le CURVE PIANE REGOLARI Γ
(varietà di dimensione $m=1$ in $\mathbb{R}^n$ con $n=2$, cioè nel piano).
Ci sono tre possibili definizioni in un punto $(x_0,y_0)=\gamma(t_0)$ di Γ:



Facciamo alcuni degli esercizi proposti.

(7) Quali curve di livello di $g(x,y)=x^3-3x^2y+y^2$ sono curve piane regolari? Discutere le tre forme possibili (parametrica, grafico, cartesiana) per la curva di livello passante per punto $P(-1,2)$.

[N.B.: Le curve di livello di g sono gli insiemi, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$,
$$\Gamma_\alpha=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : g(x,y)=\alpha\}:$$
chiaramente costituiscono una partizione del piano $\mathbb{R}^2$ (sono a due a due disgiunte e ricoprono tutto il piano).]

$$\nabla g=(3x^2-6xy,\,-3x^2+2y) \qquad \nabla g=(0,0) \qquad \begin{cases}3x^2-6xy=0\\-3x^2+2y=0\end{cases} \qquad \begin{cases}y=\frac{3}{2}x^2\\x(x-3x^2)=0\end{cases}$$

$$x(x-3x^2)=0 \quad \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \quad O(0,0)\\ x=1/3 \Rightarrow y=1/6 \quad A(1/3,1/6)\end{cases}$$

I punti di $\mathbb{R}^2$ in cui g NON è sommersiva sono $\begin{cases} O(0,0) \quad g(O)=0 \Rightarrow O\in\Gamma_0\\ A(1/3,1/6) \quad g(A)=\frac{1}{108} \Rightarrow A\in\Gamma_{1/108}\end{cases}$

Dunque tutte le curve di livello Γ_α sono regolari tranne (al più) Γ_0 in O e $\Gamma_{1/108}$ in A.

$P(-1,2) \quad g(P)=-3 \Rightarrow P\in\Gamma_{-3}=:\Gamma$

Forma cartesiana di Γ: $x^3-3x^2y+y^2=-3$

$$\nabla g(P)=(15,1) \xrightarrow{\text{Dini}} \begin{cases} y=\phi(x)=2+\left(-\frac{15}{1}\right)(x-(-1))+o_{-1}(x-(-1))=2-15(x+1)+\cdots\\ x=\psi(y)=-1+\left(-\frac{1}{15}\right)(y-2)+o_2(y-2)=-1-\frac{1}{15}(y-2)+\cdots\end{cases}$$

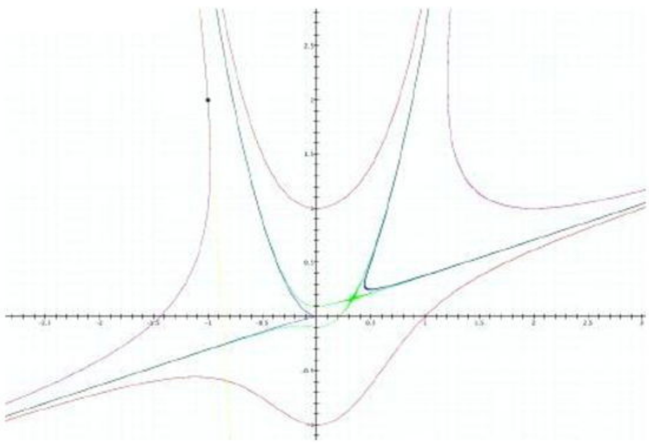
Due possibili forme grafico!

Se si vuole si può calcolare $y=\phi(x)$ in forma finita: $y^2-3x^2y+x^3+3=0$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{3x^2 \underset{y(-1)=2}{\pm} \sqrt{9x^4-4x^3-12}}{2} = \phi(x).$$

Dalla forma grafica trovo subito la forma parametrica

- $y=\phi(x)$ con $\phi: I\to\mathbb{R}$, I intervallo aperto, $-1\in I$ $\Rightarrow$
  $\gamma: I\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(x)=(x,\phi(x))$
- $x=\psi(y)$ con $\psi: J\to\mathbb{R}$, J intervallo aperto, $2\in J$ $\Rightarrow$
  $\gamma: J\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(y)=(\psi(y),y)$.



Ecco alcune curve di livello di g disegnate dall'elaboratore:

- VIOLA $(z=-3)$, per P
- VERDE $(z=\frac{1}{108})$, per A
- BLU $(z=0)$, per O
- ROSSA $(z=1)$

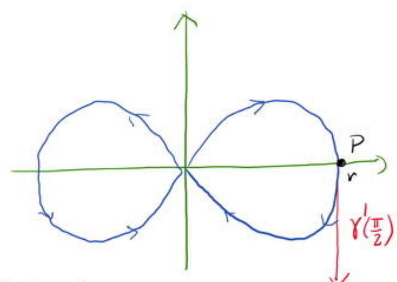
(9) Esprimere la curva-otto nelle tre forme, dicendo in quali punti essa è regolare.

$\gamma(t)=(x(t),y(t))=(\overset{x(t)}{r\sin t}, \overset{y(t)}{r\sin t\cos t})$

siamo in forma parametrica.

Per la forma grafica? Ex. in $t_0=\pi/2$

$P=\gamma(\frac{\pi}{2})=(r,0)$ $\quad \gamma'(t)=(r\cos t, r\cos 2t)$



$\gamma'(\frac{\pi}{2})=(0,\overset{\neq 0}{-r})$ $\rightsquigarrow$ da $y(t)=r\sin t\cos t=\frac{r}{2}\sin 2t$

posso scegliere inverti trovando $t=t(y)=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{-r}(y-0)+o_0(y)$

$t(y)=\frac{\pi}{2}-\frac{y}{r}+o_0(y)$. In realtà anche qui si può trovare una forma finita: $y=\frac{r}{2}\sin 2t \Rightarrow \sin 2t=\frac{2y}{r} \Rightarrow 2t = \begin{cases}\arcsin\frac{2y}{r}+2k\pi\\ \pi-\arcsin\frac{2y}{r}+2k\pi\end{cases}$

così $t = \begin{cases} \frac{1}{2}\arcsin\frac{2y}{r} + k\pi \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2y}{r} + k\pi \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Ma io voglio che $t(0) = \frac{\pi}{2}$

dunque quella che va bene è la 2a con $k=0$: $t(y) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2y}{r}$

Poi, in $x(t) = r\sin t$ metto $t = t(y)$ e trovo forma grafico $x = r\sin t(y)$

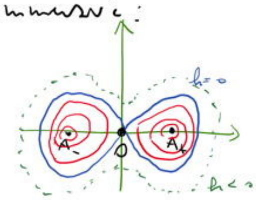
$$x = r\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2y}{r}\right) = r\cos\left(-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2y}{r}\right) = r\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{2y}{r}\right) \dots$$

Forma cartesiana: $\overbrace{x - r\sin t(y)}^{g(x,y)} = 0$

In realtà posso determinare una forma cartesiana migliore:

$$\begin{cases} x = r\sin t \\ y = r\sin t\cos t \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin t = x/r \\ y^2 = r\sin^2 t\,(1-\sin^2 t) = \cancel{r}\cdot\frac{x^2}{\cancel{r^2}}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right) \end{cases}$$

$\overbrace{x^2(r^2 - x^2) - r^2y^2}^{h(x,y)} = 0$ Esaminiamo dove h non è sommersiva:



$$\nabla h = \left(2x(r^2-x^2) + x^2(-2x),\ -2r^2y\right) = (0,0)$$

$\Rightarrow y = 0$, $2x(r^2 - 2x^2) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow O(0,0) \\ x = \pm\frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow A_\pm\left(\pm\frac{r}{\sqrt{2}}, 0\right) \end{cases}$

Nei punti $A_\pm$ si ha $h(A_\pm) = r^4/4$

RISOLUZIONE DEGLI ALTRI ESERCIZI ASSEGNATI NELLE SCORSE LEZIONI

(1) Da $2e^{x+y} + xy^2 + \cos y - 3 = 0$ esplicitare se possibile $y(x)$ oppure $x(y)$ all'intorno della soluzione $(0,0)$, determinando lo sviluppo di Taylor al $\underline{II}°$ ordine.

$f(x,y) = 2e^{x+y} + xy^2 + \cos y - 3 = 0$

$\nabla f = (2e^{x+y} + y^2,\ 2e^{x+y} + 2xy - \sin y)$;

$\nabla f(0,0) = (\overset{\neq 0}{2}, \overset{\neq 0}{2}) \rightsquigarrow y(x)$ oppure $x(y)$.

Per $y(x)$: $f(x, y(x)) \equiv 0 \overset{d/dx}{\Longrightarrow} 2(1+y')e^{x+y} + y^2 + 2xyy' - y'\sin y = 0$

$\overset{x=0\ y(0)=0}{\Longrightarrow} 2(1+y'(0)) = 0 \Rightarrow y'(0) = -1$.

Di nuovo d/dx: $2y''e^{x+y} + 2(1+y')^2 e^{x+y} + 2yy' + 2yy' + 2x(y')^2 +$

$+ 2xyy'' - y''\sin y - (y')^2 \cos y = 0 \overset{(x=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=-1)}{\Longrightarrow}$

$2y''(0) - 1 = 0 \Rightarrow y''(0) = 1/2$.

Pertanto $y(x) = 0 + (-1)x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 + o_0(x^2) = -x + \frac{1}{4}x^2 + o_0(x^2)$

Per $x(y)$: conti simili derivando $f(x(y), y) \equiv 0$ risp. y, con $x(0) = 0$.

(2) L'equazione $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3 + x + y^2 - 2 = 0$ definisce tre funzioni implicite $y_j(x)$ $(j = 1,2,3)$ all'intorno di $x_0 = 1$: calcolarne gli sviluppi, e ricavarne un abbozzo della curva $f(x,y) = 0$ nella striscia verticale $x \sim x_0$.

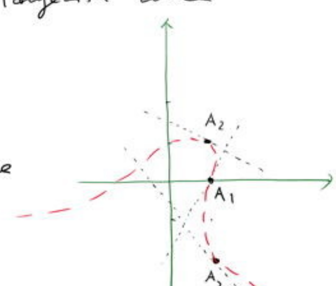
$f(1, y) = 1 - 2y + y^3 + 1 + y^2 - 2 = y^3 + y^2 - 2y = 0$ per $y = 0, 1, -2$, dunque $A_1(1, 0)$, $A_2(1, 1)$ e $A_3(1, -2)$ sono tre soluzioni; inoltre $\nabla f = (2x - 2y + 1, -2x + 3y^2 + 2y)$ e dunque $\nabla f(A_1) = (3, \overset{\neq 0}{-2})$, $\nabla f(A_2) = (1, \overset{\neq 0}{3})$ e $\nabla f(A_3) = (7, \overset{\neq 0}{6})$ dunque sono effettivamente definite tre funzioni $y_j(x)$ $(j = 1,2,3)$

con $y_1(x) = 0 + \left(-\frac{3}{-2}\right)(x-1) + o_1(x-1) = \frac{3}{2}(x-1) + o_1(x-1)$

$y_2(x) = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)(x-1) + o_1(x-1) = 1 - \frac{1}{3}(x-1) + o_1(x-1)$

$y_3(x) = -2 + \left(-7/6\right)(x-1) + o_1(x-1) = -2 - 7/6\,(x-1) + o_1(x-1)$

Gli sviluppi scritti sono le rette tangenti alla curva nei tre punti A_1, A_2, A_3, dunque l'abbozzo richiesto è semplicemente dato da questa presenza delle rette tangenti (il disegno della curva, in tratteggio colorato, è schizzato sulla base dell'elaborazione grafica).



(3) Da $\sin(xyz) - x^2y - z + 1 = 0$ dire cosa si può esplicitare all'intorno di $(-1, 0, 1)$, e calcolarne gli sviluppi.

$f(x,y,z) = \sin(xyz) - x^2y - z + 1 = 0$; $f(-1, 0, 1) = 0$

$\nabla f = (yz\cos(xyz) - 2xy,\ xz\cos(xyz) - x^2,\ xy\cos(xyz) - 1)$

$$\nabla f(-1,0,1) = \Big(0, \overset{\neq 0}{-2}, \overset{\neq 0}{-1}\Big) \rightsquigarrow y(x,z) \text{ oppure } z(x,y).$$

Ad esempio $y(x,z)$: $f(x, y(x,z), z) \equiv 0$

$$\partial_x \rightsquigarrow (yz + x\dot{y}_x z)\cos(xyz) - 2xy - x^2\dot{y}_x = 0 \xrightarrow[y(-1,1)=0]{(x,z)=(-1,1)} -\dot{y}_x(-1,1) - \dot{y}_x(-1,1) = 0$$
$$\Rightarrow \dot{y}_x(-1,1) = 0$$

$$\partial_z \rightsquigarrow (xy + x\dot{y}_z z)\cos(xyz) - 1 = 0 \Rightarrow -\dot{y}_z(-1,1) - 1 = 0 \Rightarrow \dot{y}_z(-1,1) = -1$$

da cui $y(x,z) = 0 + (0,-1)\cdot(x-(-1), z-1) + \cdots = -(z-1) + \cdots$

In pratica, derivando nuovamente rispetto a x o a z si otterrebbe $H_y(-1,1) = \begin{pmatrix} \ddot{y}_{xx}(-1,1) & \ddot{y}_{xz}(-1,1) \\ \ddot{y}_{xz}(-1,1) & \ddot{y}_{zz}(-1,1) \end{pmatrix}$,

e lo sviluppo al II° ordine sarebbe

$$y(x,z) = -(z-1) + \frac{1}{2}\cdot(x+1, z-1)\cdot H_y(-1,1)\cdot\begin{pmatrix} x+1 \\ z-1 \end{pmatrix} + \cdots$$

(4) Dire dove $f(x,y,z) = (2xy+z,\ 3-x^2,\ 1+yz^2)$ è diffeo locale, e sviluppare l'inversa in $(x_0, y_0, z_0) = (1,0,-2)$. Calcolare poi l'immagine dei tre assi coordinati e l'antiimmagine di $(0,0,0)$.

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 1 \\ -2x & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 2yz \end{pmatrix} \qquad \det = 2x(4xyz - z^2) = 2xz(4xy - z)$$

$\det J_f = 0$ nei punti in cui $x=0$ (piano (y,z)), o in cui $z=0$ (piano (x,y)) o sulla superficie-grafico $z = 4xy$.
Il punto $P(1,0,-2)$ non sta su nessuno di questi luoghi, dunque f è diffeo locale in P. Si calcola

$$J_f(P) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_f(P)^{-1} = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Si ha $Q := f(P) = (-2, 2, 1)$: dunque l'inversa locale g sarà definita in un intorno di Q e, dette (u,v,w) le variabili del codominio, si avrà

$$g(u,v,w) = \overset{= P}{g(Q)} + \overset{= J_f(P)^{-1}}{J_g(Q)}\cdot\begin{pmatrix} u-u_Q \\ v-v_Q \\ w-w_Q \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u+2 \\ v-2 \\ w-1 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(v-2) + \cdots \\ 1/4\,(w-1) + \cdots \\ -2 + (u-2) - \frac{1}{2}(w-1) + \cdots \end{pmatrix}$$

(5) Dal sistema in (x,y,u,v,w)

$$\begin{cases} x(u+v) + yw = 3 \\ x(u^2+v^2) + yw^2 = 5 \\ x(u^3+v^3) + yw^3 = 9 \end{cases}$$

esplicitare (u,v,w) in funzione di (x,y) attorno $(1,1,0,1,2)$ e calcolare lo sviluppo al $\underline{I}$ ordine.

$F = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x,y,u,v,w) = \left(x(u+v)+yw-3,\ x(u^2+v^2)+yw^2-5,\ x(u^3+v^3)+yw^3-9 \right)$$

$$J_F = \begin{pmatrix} u+v & w & x & x & y \\ u^2+v^2 & w^2 & 2ux & 2vx & 2wy \\ u^3+v^3 & w^3 & 3u^2x & 3v^2x & 3w^2y \end{pmatrix}$$

$\det = 12 \neq 0$

$$J_F(1,1,0,1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$J_{F,(x,y)}$

$J_{F,(u,v,w)}$ $\det = 12 \neq 0$

$\rightsquigarrow \ (u(x,y),\ v(x,y),\ w(x,y))$

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \underbrace{J_{(u,v)}(1,1)}_{=\,-J_{F,(u,v,w)}^{-1} \cdot J_{F,(x,y)}} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & -9 & 2 \\ 0 & 12 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \dots$$

(6) Dal sistema in tre variabili (x,y,z):

$$\begin{cases} x^4yz - 3y^3 + 2xz^3 = 3 \\ x^2 - 2y^2 + z^3 - 5z + 4xy + 4 = 0 \end{cases}$$

esplicitare in tutti i modi possibili due delle variabili rispetto alla terza attorno alla soluzione $(0,-1,2)$ e calcolare gli sviluppi al $\underline{I}$ ordine in due modi.

Geometricamente, cosa si sta facendo?

$F = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^4yz - 3y^3 + 2xz^3 \\ x^2 - 2y^2 + z^3 - 5z + 4xy \end{pmatrix}$

$$J_F = \begin{pmatrix} 4x^3yz + 2z^3 & x^4z - 9y^2 & x^4y + 6xz^2 \\ 2x + 4y & -4y + 4x & 3z^2 - 5 \end{pmatrix}$$

$$J_F(0,-1,2) = \begin{pmatrix} 16 & -9 & 0 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Tutti i minori sono non singolari: si può esplicitare qualsiasi coppia di variabili rispetto alla restante, (che fungerà da parametro per una curva reg. in $\mathbb{R}^3$).

Ad es, esplicitiamo $(x(z), y(z))$:

$$\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(- \begin{pmatrix} 16 & -9 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} (z-2) \right) + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} (z-2) + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\cancel{28}_4} \begin{pmatrix} 9 \cdot \cancel{7} \\ 16 \cdot \cancel{7} \end{pmatrix} (z-2) + \cdots = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4}(z-2) + \cdots \\ -4(z-2) + \cdots \end{pmatrix}$$

Geometricamente il sistema di luogo a una curva in $\mathbb{R}^3$ in forma cartesiana (le equazioni rappresentano i vincoli), ed esplicitare $(x(z), y(z))$ vicino al punto $(0,-1,2)$ della curva significa trovare un'espressione locale della curva come grafico (per l'appunto, della funzione $(x(z), y(z))$).