UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

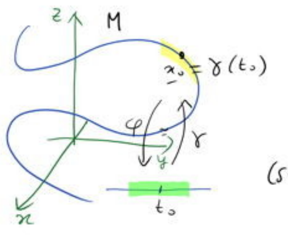
Lezione di martedì 08/10/2024

Occupiamoci ora della definizione generale di varietà differenziale.

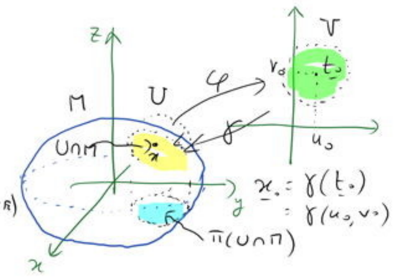
VARIETÀ DIFF.LE DI DIM. m IN $\mathbb{R}^n$ DI CLASSE $\mathcal{C}^k$

<u>Ex.</u> $\mathbb{R}^3$ $(n=3)$

$m=1$
(CURVA)



$m=2$
(SUPERFICIE)



Anche qui sono possibili tre formulazioni. Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_0 \in M$.

1. FORMA PARAMETRICA : <u>M è localmente $\mathcal{C}^k$-diffeomorfa a un aperto di $\mathbb{R}^m$</u>

   $\exists$ intorno aperto U di $\underline{x}_0$ in $\mathbb{R}^n$, un aperto V in $\mathbb{R}^m$ e un $\mathcal{C}^k$-diffeomorfismo $\varphi : U \cap M \xrightarrow{\sim} V$.

   φ : CARTA LOCALE (IN $\underline{x}_0$). $\gamma = \varphi^{-1} : V \to U \cap M \subseteq \mathbb{R}^n$ PARAMETRIZZ. LOCALE DI M IN $\underline{x}_0$

2. FORMA GRAFICO : <u>M è localmente grafico di una funzione $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$</u>

   $\exists$ intorno aperto U di $\underline{x}_0$ in $\mathbb{R}^n$, $\exists$ m variabili $\underline{x}' = (x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ tali che, scritte le variabili rimanenti come $\underline{x}'' = (x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-m}})$ (sono $n-m$) e denotata con $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la proiezione $\pi(\underline{x}) = \pi(\underline{x}', \underline{x}'') = \underline{x}'$, si ha $U \cap M = \{ \underline{x} \in U : \underline{x}'' = \phi(\underline{x}') \}$ per un'opportuna funzione $\phi = (\phi_{j_1}, \dots, \phi_{j_{n-m}}) : \pi(U) \to \mathbb{R}^{n-m}$ di classe $\mathcal{C}^k$.

3. FORMA CARTESIANA : <u>M è insieme di livello di una sommersione $\overset{\mathcal{C}^k}{} \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$</u>

   $\exists$ intorno aperto U di $\underline{x}_0$ in $\mathbb{R}^n$ e una funzione $g : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ sommersione $\mathcal{C}^k$ t.c. $U \cap M = \{ \underline{x} \in U : g(\underline{x}) = \alpha \}$ per un certo $\alpha \in \mathbb{R}^{n-m}$, cioè: se $g = (g_1, \dots, g_{n-m})$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-m})$:

$$U \cap M = \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 \\ \vdots \\ g_{n-m}(x_1, \dots, x_n) = \alpha_{n-m} \end{cases}$$

Alcuni casi particolari.

- $m = 0$: insiemi DISCRETI di punti isolati in $\mathbb{R}^n$.
- $m = 1$: CURVE REGOLARI
- $m = n-1$: IPERSUPERFICI
- $m = n$: APERTI in $\mathbb{R}^n$ (che hanno "volume n-dim.")

Teor. | Per una sottovarietà M di $\mathbb{R}^n$, le tre descrizioni precedenti sono equivalenti.

Dim. Mostreremo che (2) equivale sia a (1) che a (3).

- Supp. che M soddisfi (1).

$\gamma : V^{\subseteq \mathbb{R}^m} \xrightarrow{\sim} U^{\subseteq \mathbb{R}^n}$ parametriz. con V aperto di $\mathbb{R}^m$ t.c. $\gamma(V) = U \cap M$

Sia $t_0 \in V$ t.c. $\gamma(t_0) = x_0$. $\quad \gamma = (\overset{m}{\gamma'}, \overset{n-m}{\gamma''})$

$$J_\gamma(t_0) : \quad m \updownarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_1}{\partial t_1}(t_0) & \cdots & \frac{\partial \gamma_1}{\partial t_m}(t_0) \\ & & \\ \frac{\partial \gamma_m}{\partial t_1}(t_0) & \cdots & \frac{\partial \gamma_m}{\partial t_m}(t_0) \\ \frac{\partial \gamma_n}{\partial t_1}(t_0) & \cdots & \frac{\partial \gamma_n}{\partial t_m}(t_0) \end{pmatrix}}_{m}$$

per ipotesi (immersione) ha rango m massimo. dunque ha un minore con det $\neq 0$, sia per semplicità quello in alto: per il T. Funz. Inversa,

$x' = \gamma'(t) \rightsquigarrow t = (\gamma')^{-1}(x')$

(ove $x' = (x_1, .., x_m)$)

e pertanto $x'' = \gamma''(t) = \gamma''((\gamma')^{-1}(x')) = \phi(x')$ ove $\phi = \gamma'' \circ (\gamma')^{-1}$

Viceversa, M soddisfa (2): $M = \{(x', x'') : \overset{n-m}{x''} = \phi(\overset{m}{x'})\}$

con $x' = (x_1, .., x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, .., x_n)$ (per esempio!)

Allora definisco $\gamma(x') = (x', \phi(x'))$:

$$J_\gamma(x') : \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_m} \\ \partial \phi_{n-m} & & \frac{\partial \phi_{n-m}}{\partial x_m} \end{matrix} \end{pmatrix} \longleftarrow \mathbb{I}_m$$

è immersiva! (ha rango m).

- Supp. che M soddisfi (3):

$$\begin{cases} g_1(x_1, .., x_n) = \alpha_1 \\ \vdots \\ g_{n-m}(x_1, .., x_n) = \alpha_{n-m} \end{cases}$$

$G = (g_1, .., g_{n-m}) : U^{\subseteq \mathbb{R}^n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m} \quad G(x_0) = \alpha = (\alpha_1, .., \alpha_{n-m})$

$$J_G(\underline{x}_0) = \begin{array}{c|c} & \xleftrightarrow{\quad n \quad} \\ \updownarrow^{n-m} & \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\underline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{n-m}}{\partial x_1}(\underline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial g_{n-m}}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{n-m} \end{array}$$

sommersiva (rango n-m).
Supp. che l'ultimo
minore sia nonsingolare

$\Rightarrow$ per il Dini, dal sistema posso esplicitare le variabili $\underline{x}'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ in funzione delle prime m, ovvero $\underline{x}' = (x_1, \dots, x_m)$, dunque ho forma grafico.

Viceversa, $\underline{x}'' = \phi(\underline{x}') \rightsquigarrow G(\underline{x}) = \underline{x}'' - \phi(\underline{x}') = 0$. ☐

Ex. $\gamma(u,v) = (\overset{x(u,v)}{u^2}, \overset{y(u,v)}{4u+v^3}, \overset{z(u,v)}{3uv})$ $\quad \gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ immersiva

$$J_\gamma = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 4 & 3v^2 \\ 3v & 3u \end{pmatrix}$$

Non è immersiva quando $\operatorname{rk} J_\gamma < 2$

$$\begin{cases} 6uv^2 = 0 \\ 6u^2 = 0 \Rightarrow u = 0 \\ 12u - 9v^3 = 0 \Rightarrow v = 0 \end{cases}$$ dunque solo per $(u,v) = (0,0)$.

Dunque (t. immersioni) se $(u_0,v_0) \neq (0,0)$, un intorno $V \subseteq \mathbb{R}^2$ di (u_0,v_0) viene mandato diffeomorficamente nella sua immagine $\gamma(V) \subseteq \mathbb{R}^3$.

Verifichiamo se γ sia altresì iniettiva, per vedere eventuali autointersezioni in $\mathbb{R}^3$.

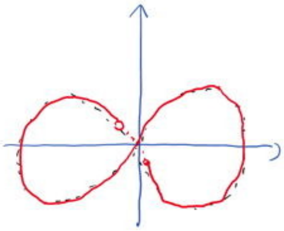
Oss. L'eventuale iniettività di γ non mette sempre al riparo da eventuali irregolarità di $\gamma(\mathbb{R}^2)$

Ad esempio, per la curva-otto:

$\gamma_1 :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (r \sin t, r \sin t \cos t)$

oppure, considerando la forma parametrica con $\tau = \operatorname{tg} t/2$

$\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(\tau) = \left(\frac{2\tau}{1+\tau^2} r, \frac{2\tau(1-\tau^2)}{(1+\tau^2)^2} r \right)$



Procediamo con lo studio dell'iniettività di $\gamma(u,v)$:

$$\gamma(u_1,v_1) = \gamma(u_2,v_2) \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} u_1 = u_2 \\ v_1 = v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1^2 = u_2^2 \\ 4u_1 + v_1^3 = 4u_2 + v_2^3 \\ 3u_1v_1 = 3u_2v_2 \end{cases} \qquad u_1^2 = u_2^2 \begin{cases} u_1 = u_2 \overset{(3)}{\Rightarrow} v_1 = v_2 \quad (\text{ok}) \\ u_1 = -u_2 \Rightarrow \begin{cases} 8u_1 = v_2^3 - v_1^3 \\ u_1(v_1+v_2) = 0 \end{cases} \overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} v_2 = -v_1 \\ v_1 = -\sqrt[3]{4u_1} \end{cases} \end{cases}$$

Quindi γ non è iniettiva nei punti del tipo $(u,v) = (\alpha, -\sqrt[3]{4\alpha})$

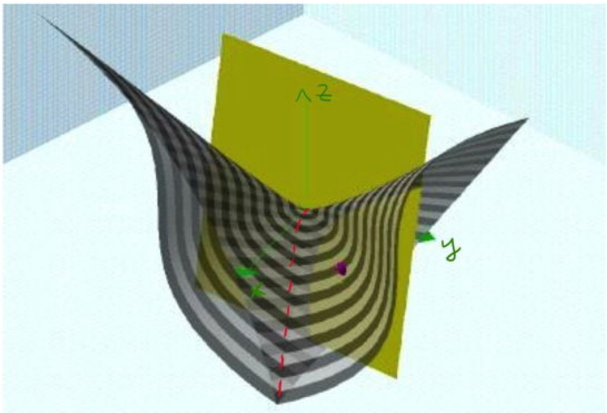
(infatti $\gamma(\pm(\alpha, -\sqrt[3]{4\alpha})) = (\alpha^2, 0, -3\alpha\sqrt[3]{4\alpha})$

E qual è l'immagine di tali valori del parametro?

$$\begin{cases} x = a^2 \\ y = 0 \\ z = -3a\sqrt[3]{4a} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 0 \\ z = -3\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{x} \end{cases}$$

(punti di autointersezione della sup. parametrica)

(TRATTEGGIATI IN ROSSO NELLA FIGURA)



Consideriamo ad esempio il punto $P(1,3,-3) = \gamma(1,-1)$ (punto porpora in figura)

$$J_\gamma(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \det = 6 \neq 0$$

$\Rightarrow$ posso localmente invertire

$$\begin{cases} x = u^2 \\ y = 4u + v^3 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \quad \text{con}$$

$$\begin{cases} u(1,3) = 1 \\ v(1,3) = -1 \end{cases}, \quad \underset{(u,v)}{J}(1,3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

poi $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} + \cdots = \begin{pmatrix} 1 + 1/2(x-1) + \cdots \\ -1 - 2/3(x-1) + \frac{1}{3}(y-3) + \cdots \end{pmatrix}$

da cui $z = 3uv = 3u(x,y)\cdot v(x,y) = \phi(x,y)$ (forma grafico)

Qui volendo si può fare il conto per la forma finita

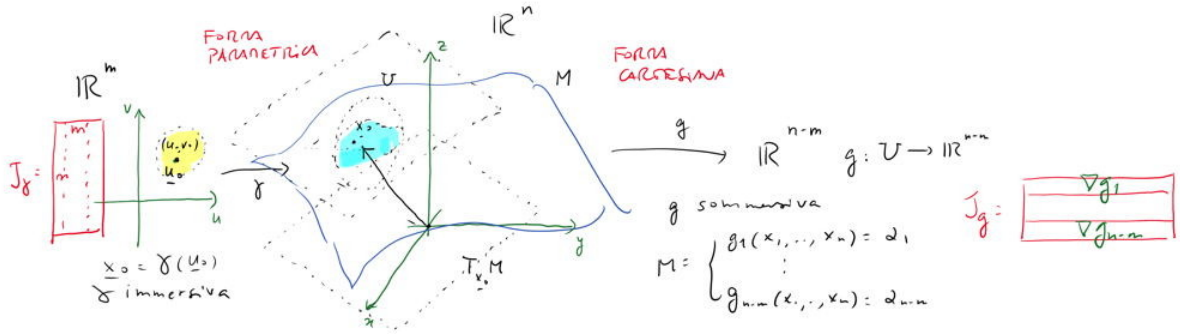
$$\begin{cases} x = u^2 \\ y = 4u + v^3 \end{cases} \quad \begin{cases} u = \underset{(u\sim 1)}{\cancel{\pm}}\sqrt{x} \\ y = 4\sqrt{x} + v^3 \end{cases} \quad \begin{cases} u = \sqrt{x} \\ v = -\sqrt[3]{4\sqrt{x} - y} \end{cases} \quad \text{e dunque}$$

$$z = -3\sqrt{x}\sqrt[3]{4\sqrt{x} - y} = \phi(x,y) \quad (\text{con } x \geq 0)$$

SPAZIO TANGENTE A UNA VARIETÀ IN UN SUO PUNTO

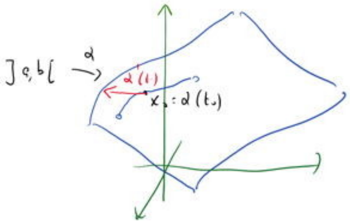
Descriveremo lo spazio tangente (lineare, passante per l'origine; per

quello affine basterà traslare per il punto in questione) nelle due possibili presentazioni parametrica o cartesiana.
La presentazione come grafico, essendo intermedia tra le due, verrà trattata come caso particolare.



Definiamo lo <u>spazio tangente a M in $\underline{x}_0$</u>:

$$\boxed{T_{x_0}M := \{ \alpha'(t_0) : \alpha :]a,b[\to M \text{ curva derivabile con } \alpha(t_0) = \underline{x}_0 \}}$$



La famiglia dei vettori tangenti in $\underline{x}_0$ alle curve in M passanti per $\underline{x}_0$.

Prop.

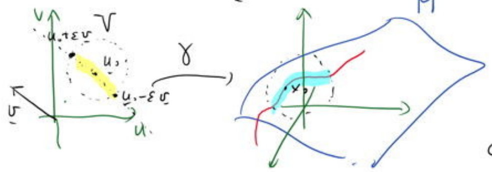
$$T_{\underline{x}_0}M = \mathrm{Ker}\, dg_{\underline{x}_0} := \{ \underline{u} \in \mathbb{R}^n : dg_{x_0}(\underline{u}) = \underline{0} \}$$
$$= \mathrm{Im}\, d\gamma_{\underline{u}_0} := \{ d\gamma_{u_0}(\underline{v}) : \underline{v} \in \mathbb{R}^m \}$$

In particolare $T_{x_0}M$ è un $\mathbb{R}$-sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dim. m, esprimibile, a seconda dei casi:

- o come sottospazio ortogonale agli n-m gradienti $\nabla g_j(x_0)$ con $j = 1, \dots, n-m$ (indipendenti tra loro perché g è sommersiva)
- o come sottospazio generato dagli m vettori tangenti $\frac{\partial \gamma}{\partial u_1}(\underline{u}_0), \dots, \frac{\partial \gamma}{\partial u_m}(\underline{u}_0)$ (indip. tra loro perché γ è immersiva)

<u>Dim.</u> Poniamo $W_1 := \mathrm{Im}\, d\gamma_{u_0}$ e $W_2 := \mathrm{Ker}\, dg_{u_0}$.
Mi basta mostrare che $W_1 \subset T_{x_0}M \subset W_2$: infatti per ipotesi $\dim W_1 = \dim W_2 = m$, dal che discenderebbe l'uguaglianza.

- Mostriamo che $W_1 \subset T_{\underline{x}_0} M$.



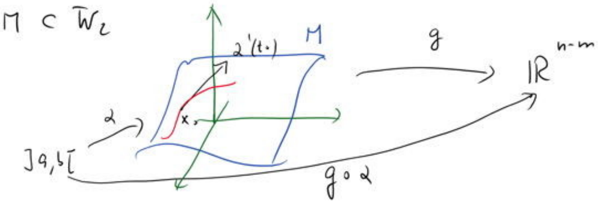
Preso un qualsiasi vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$ (spazio dei parametri), voglio mostrare che $d\gamma_{\underline{u}_0}(\underline{v}) \in T_{\underline{x}_0} M$.

Sia $\varepsilon > 0$ t.c. $\{ \underline{u}_0 + t\underline{v} : -\varepsilon < t < \varepsilon \} \subseteq \mathcal{V}$

Consideriamo la curva parametrica $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$ data da $\alpha(t) = \gamma(u_0 + t\underline{v})$ (quella disegnata in azzurro).

Notiamo che $\alpha(0) = \underline{x}_0$; inoltre $\alpha'(t) = d\gamma_{\underline{u}_0 + t\underline{v}}(\underline{v})$ da cui $\alpha'(0) = d\gamma_{\underline{u}_0}(\underline{v})$. Dunque $d\gamma_{\underline{u}_0}(\underline{v})$ è del tipo di quelli di $T_{\underline{x}_0} M$

- $T_{\underline{x}_0} M \subset W_2$



Tesi: $\alpha'(t_0) \in \operatorname{Ker} dg_{\underline{x}_0}$, ovvero $dg_{x_0}(\alpha'(t_0)) = \underline{0}_{n-m}$.

$g \circ \alpha :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ è la costante $(g\circ\alpha)(t) = (a_1, .., a_{n-m})$

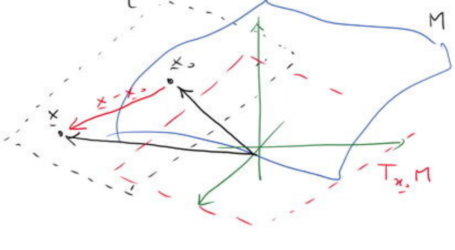
dunque $(g \circ \alpha)' \equiv 0$: ma $(g\circ\alpha)'_{t_0} = dg_{\alpha(t_0)}(\alpha'(t_0)) = dg_{\underline{x}_0}(\alpha'(t_0))$

//

Per descrivere lo spazio tangente affine (quello fisicamente tangente alla varietà M in x_0) basterà traslare il tutto del vettore $\underline{x}_0$:

$$\underline{x}_0 + T_{\underline{x}_0} M = \{ \underline{x}_0 + d\gamma_{\underline{u}_0}(\underline{v}) : \underline{v} \in \mathbb{R}^m \} = \{ \underline{x}_0 + \lambda_1 \frac{\partial\gamma}{\partial u_1}(\underline{u}_0) + \cdots + \lambda_m \frac{\partial\gamma}{\partial u_m}(u_0) \}$$

$$= \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : dg_{\underline{x}_0}(\underline{x} - \underline{x}_0) = 0 \} = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} \nabla g_1(x_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) = 0 \\ \nabla g_{n-m}(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) = 0 \end{cases} \right\}$$



$\underline{u} = \underline{x} - \underline{x}_0$ è nello spazio tangente lineare $T_{\underline{x}_0} M$

Per la forma grafico, che è a metà tra le due:

Prop. Se $M = \{ \underline{x} = (\underline{x}', \underline{x}'') : \underline{x}'' = \phi(\underline{x}') \}$ $\quad \underline{x}' = (x_1, \dots, x_m)$, $\underline{x}'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$

Allora lo spazio tangente affine in $\underline{x}_0 = (\underline{x}_0', \underline{x}_0'')$ è

$$\underline{x}'' = \underline{x}_0'' + J_\phi(\underline{x}_0')(\underline{x}' - \underline{x}_0')$$

In una variabile (curve) $y = \phi(x) \rightsquigarrow y = y_0 + \phi'(x_0)(x - x_0)$

Dim. In due modi:

1. come parametrizzazione: $\gamma(\underline{x}') = (\underline{x}', \phi(\underline{x}'))$ $\quad \gamma(\underline{x}_0') = \underline{x}_0$

$$d\gamma_{\underline{x}_0'} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline & J_\phi(x_0') & \end{array} \right) \leftarrow \mathbb{1}_m$$

pertanto

$$x_0 + T_{x_0}M = \{ \underline{x}_0 + d\gamma_{\underline{x}_0'}(\underline{u}) : \underline{u} \in \mathbb{R}^m \} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \underline{x}' \\ \underline{x}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_0' \\ \underline{x}_0'' \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \begin{pmatrix} e_j \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x_0) \end{pmatrix} : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}^m \right\}$$

Dalle prime m equazioni ricavo che $\lambda_j = x_j - x_{0j}$ $(j = 1, \dots, m)$ che messe nelle ultime $n-m$ danno

$$\underline{x}'' = \phi(\underline{x}_0') + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \phi}{\partial x_j'}(\underline{x}_0')(x_j - x_{0j}) = \underline{x}_0'' + J_\phi(\underline{x}_0') \cdot (\underline{x}' - \underline{x}_0')$$

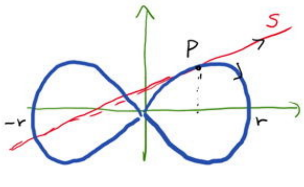
2. come forma cartesiana: esercizio ($g(\underline{x}) = \underline{x}'' - \phi(\underline{x}')$, dunque

$$J_g(\underline{x}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} -J_\phi & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array} \right) \leftarrow \mathbb{1}_{n-m} \quad \dots\dots \Big)$$

//

Ora qualche esercizio, in cui calcoleremo lo spazio tangente affine nelle varie forme in cui si presenta una varietà.

Ex. CURVA OTTO



Param. $\gamma(t) = (r \sin t, r \sin t \cos t)$

Cart. $x^2(r^2 - x^2) = r^2 y^2$

Prendiamo $P = \gamma(\pi/6) = \left(r/2, \frac{r\sqrt{3}}{4} \right)$

- Forma parametrica $\gamma'(t) = (r\cos t, r\cos 2t)$ $\gamma'(\frac{\pi}{6}) = r(\sqrt{3}/2, 1/2)$

$S = P + \mathrm{Im}\, d\gamma_{\pi/6} = \left\{ \left(\frac{r}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{4}\right) + \lambda\left(\sqrt{3}/2, 1/2\right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ r\left(\frac{1}{2} + \lambda\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\lambda\right) \right\}$

$$\begin{cases} x = r\left(\frac{1}{2} + \lambda\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ y = r\left(\sqrt{3}/4 + \frac{1}{2}\lambda\right) \end{cases} \xrightarrow{\text{ricavo } \lambda} y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{r}{4\sqrt{3}} \qquad (*)$$

- Forma cartesiana $h(x,y) = x^2(r^2 - x^2) - r^2y^2 = 0$

$\nabla h = (2x(r^2 - 2x^2), -2r^2y)$ $\nabla h(P) = \left(r^3/2, -\frac{r^3\sqrt{3}}{2}\right)$

S : $\nabla h(P) \cdot \left(x - r/2, y - \frac{r\sqrt{3}}{4}\right) = 0$

$\cancel{r^3}(1/2, -\sqrt{3}/2) \cdot \left(x - r/2, y - \frac{r\sqrt{3}}{4}\right) = 0$ $\frac{1}{2}\left(x - \frac{r}{2}\right) - \sqrt{3}/2\left(y - \frac{r\sqrt{3}}{4}\right) = 0$

(che fa ritrovare $(*)$)

Ex. $g(x,y) = x^3 - 3x^2y + y^2$, $M = \{(x,y) : g(x,y) = -3\}$, $P(-1,2)$

(per il disegno si vedano le note trascorse)

$\nabla g = (3x^2 - 6xy, -3x^2 + 2y)$ $\nabla g(P) = (15, 1)$

retta tg. affine: $\nabla g(P) \cdot (x - x_P, y - y_P) = 0$

$(15,1) \cdot (x+1, y-2) = 0$ $15x + 15 + y - 2 = 0$ $y = -15x - 13$

Vediamo in forma grafico: $\nabla g(P) = (\overset{\neq 0}{15}, 1) \overset{\text{Dini}}{\rightsquigarrow}$ esplicito $x(y)$

$x = -1 + \left(-\frac{1}{15}\right)(y-2) + o_2(y-2)$ ovvero

$x = \underbrace{-\frac{13}{15} - \frac{1}{15}y}_{\text{retta tg. affine}} + o_2(y-2)$

Ex. Superficie parametrica $\gamma(u,v) = (u^2, 4u + v^3, 3uv)$; $P(1,3,-3) = \gamma(1,-1)$

(vedi disegno precedente; P è il punto porpora)

$$d\gamma = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 4 & 3v^2 \\ 3v & 3u \end{pmatrix} \qquad d\gamma_{(1,-1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\partial\gamma/\partial u$ $\partial\gamma/\partial v$

Il piano tangente alla superficie in P (in giallo nel disegno):

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$ ovvero

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 + 4\lambda + 3\mu \\ z = -3 - 3\lambda + 3\mu \end{cases} \xrightarrow[\lambda \text{ e } \mu]{\text{ELIMINO}} 7x - 2y + 2z + 5 = 0 \quad (*)$$

(eq. cartesiana del piano tg.)

Poniamo in forma grafico. $d\gamma_{(1,-1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ det $= 6 \neq 0$ $\longrightarrow \begin{cases} x(u,v) \\ y(u,v) \end{cases} \overset{\text{loc.}}{\Longrightarrow} \begin{cases} u(x,y) \\ v(x,y) \end{cases}$

da cui $z = 3u(x,y) \cdot v(x,y) = \phi(x,y)$ (forma grafico).

Praticamente, se $\gamma = (\overset{x}{\gamma_1}, \overset{y}{\gamma_2}, \overset{z}{\gamma_3})$, allora $\phi = \gamma_3 \circ ((\gamma_1, \gamma_2)^{-1})$

$\rightsquigarrow$ passando agli jacobiani, ed essendo $(x_0, y_0) = (1,3)$, $(u_0, v_0) = (1,-1)$:

$$J_\phi(1,3) = J_{\gamma_3}(1,-1) \circ J_{(\gamma_1,\gamma_2)^{-1}}(1,3) = J_{\gamma_3}(1,-1) \cdot \left(J_{(\gamma_1,\gamma_2)}(1,-1)\right)^{-1} :$$

$$= (-3, 3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = (-3 \quad 3) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (-7/2, 1)$$

Pertanto $z = \phi(x,y) = \underbrace{-3}_{\phi(1,3)} + \underbrace{(-7/2, 1)}_{\nabla\phi(1,3)} \cdot \underset{(x-x_0,\, y-y_0)}{(x-1, y-3)} + \cdots$

$$\underbrace{z = -3 - 7/2\,(x-1) + 1\,(y-3)}_{\text{PIANO TG. GIÀ VISTO PRIMA } (*)} + \cdots$$

N.B. Questo calcolo dello jacobiano di ϕ a partire dallo jacobiano della parametrizzazione γ è scritto in termini generali nelle dispense (Proposizione 6.2.2.(i))