Università degli Studi di Padova

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 10/10/2024

Ex. (ANALISI 3 2016/17, ULTIMO APPELLO SCRITTO 12/9/2017)

Sia $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $g(x,y,z) = \sqrt{x^2-2yz} + x - 2y + z$.
Detta S la superficie di livello di g passante per il punto $A(0,2,-1)$, mostrare che S è regolare all'intorno di A e determinarne ivi una parametrizzazione locale e il piano tangente affine (quest'ultimo in due modi).

Posto per comodità $R := \sqrt{x^2-2yz}$ si ha $\nabla g = \left(\frac{x}{R}+1, -\frac{z}{R}-2, -\frac{y}{R}+1\right)$

$g(A) = -3$, $\nabla g(A) = (1, -3/2, 0) \neq (0,0,0) \Rightarrow g$ sommersiva in A

$\Rightarrow S : \{(x,y,z) : g(x,y,z) = g(A) = -3\}$ è superficie regolare intorno di A. Per Dini, essendo $\frac{\partial g}{\partial x}(A) = 1 \neq 0$ si può esplicitare $x(y,z)$ all'intorno di $(y_0, z_0) = (2,-1)$ con

$x(2,-1) = 0$ e $\nabla x(2,-1) = \left(-\frac{-3/2}{1}, -\frac{0}{1}\right) = (3/2, 0)$;

inoltre derivando $g(x(y,z), y, z) \equiv -3$ rispetto y e z si ha

$$\partial_y \nearrow \quad \frac{2x\dot{x}_y - 2z}{2R} + \dot{x}_y - 2 = 0 \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\partial_y} \frac{1}{R^2}\left((\dot{x}_y^2 + x\ddot{x}_{yy})R - \frac{1}{R}(x\dot{x}_y - z)^2\right) + \ddot{x}_{yy} = 0 \\ \xrightarrow{\partial_z} \frac{1}{R^2}\left((\dot{x}_y\dot{x}_z + x\ddot{x}_{yz} - 1)R - \frac{1}{R}(x\dot{x}_y - z)(x\dot{x}_z - y)\right) + \ddot{x}_{yz} = 0 \end{array}$$

$$\partial_z \searrow \quad \frac{2x\dot{x}_z - 2y}{2R} + \dot{x}_z + 1 = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \partial_y \\ \xrightarrow{\partial_z} \frac{1}{R^2}\left((\dot{x}_z^2 + x\ddot{x}_{zz})R - \frac{1}{R}(x\dot{x}_z - y)^2\right) + \ddot{x}_{zz} = 0 \end{array}$$

da cui, calcolando in $(y_0, z_0) = (2,-1)$ si trova

$\dot{x}_y(2,-1) = 3/2$, $\dot{x}_z(2,-1) = 0$, $\ddot{x}_{yy}(2,-1) = -1$, $\ddot{x}_{yz}(2,-1) = \frac{1}{4}$, $\ddot{x}_{zz}(2,-1) = \frac{1}{2}$.

Perciò

$$x(y,z) = 0 + (3/2, 0)\cdot(y-2, z+1) + \frac{1}{2}(y-2, z+1)\begin{pmatrix} -1 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y-2 \\ z+1 \end{pmatrix} + \cdots$$

Quanto alle superfici di livello $g(x,y,z) = \alpha$ regolari...

Si ha $\nabla g = 0$ quando $x = -R$, $y = R$, $z = -2R$: ne ricaviamo che $y = -x$ e $z = 2x$, e sostituendo queste in $x = -R$ si ha $x = -\sqrt{5x^2}$ che equivale al sistema tra $x \le 0$ e $x^2 = 5x^2$, ovvero $x = 0$.

L'unico punto in cui $\nabla g = 0$ (ovvero in cui g NON è sommersiva) è $O(0,0,0)$ in cui $g(O)=0$. Ne deduciamo che tutte le superfici di livello di g sono regolari, tranne quella di livello 0 in O.

$$\nabla g(A) = \left(1, -\tfrac{3}{2}, 0\right)$$

Piano tg: $\nabla g(A)\cdot(x-x_A, y-y_A, z-z_A)=0$

$$\left(1, -\tfrac{3}{2}, 0\right)\cdot(x, y-2, z+1)=0 \implies x = \tfrac{3}{2}(y-2) \quad (*)$$

In forma grafica ... $\nabla g(A) = \left(1, -\tfrac{3}{2}, 0\right) \rightsquigarrow x(y,z)$

$$x = 0 + \left(-\frac{-3/2}{1}, -\frac{0}{1}\right)\cdot\left(y-2, z-(-1)\right) + \cdots$$

$x = \tfrac{3}{2}(y-2)$ che è come prima $(*)$

$\boxed{\text{ESERCIZI}}$

Verificare se gli insiemi indicati, definiti in vari modi (parametrizzazioni, grafici, vincoli) danno luogo a varietà. Calcolare poi gli spazi tangenti affini nei punti indicati, possibilmente in più modi.

(11) $\rho(\theta) = 2a(1+\cos\theta)$, $P =$ punto con $\theta = -\frac{\pi}{3}$
(questa curva piana in forma polare è detta CARDIOIDE, provare a disegnarla e a trovarne una forma cartesiana)

(12) Grafici in $\mathbb{R}^2$: $y = e^x - \sin x$ in P punto con $x = 1$,
$x = y - \log(y^2+1)$ in Q punto con $y = 2$. (disegnare!)

(13) $M = \{(x,y) : e^{xy} + x + 2y = 3\}$, $P(0,1)$

(14) Grafici in $\mathbb{R}^3$: $z = \dfrac{x^3 - 2x^2y + 3}{4}$, P punto con $(x,y) = (-1,3)$
e $y = x^2 - 2(z-1)^2$, Q punto con $(x,z) = (-1,2)$.

(15) $M_1 = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 3xyz - z^3 = 4\}$, $P(-1,-2,2)$
$M_2 = \{(x,y,z) : h(x,y,z) = \log(xy+z) - x + y - z = -3\}$, $Q(2,0,1)$
Determinare anche quali superfici di livello di g e di h danno luogo a superfici regolari di $\mathbb{R}^3$.

(16) Curva parametrica in $\mathbb{R}^3$: $\gamma(t) = (t - \log(1+t), t^2 - 3t, 2t + \cos t)$
nel punto $P(0,0,1) = \gamma(0)$

(17) Grafico in $\mathbb{R}^3$: $(x(z), y(z)) = (z\cos z, z\sin z)$ (disegnare!)
nel punto P con $z = \pi/2$.

(18) $M_{\alpha,\beta} : \begin{cases} x + y + z = \alpha \\ xy + xz + yz = \beta \end{cases}$

Per quali (α,β) l'insieme $M_{\alpha,\beta}$ è una varietà regolare di $\mathbb{R}^3$? Di quale dimensione?

Calcolare lo spazio tangente affine a $M := M_{5,8}$ in $P(1,2,2)$.
Provare a disegnare M (sostituire $z = 5 - x - y$ nella 2ª equaz...)

Svolgiamo alcuni di questi esercizi.

(14) Grafico in $\mathbb{R}^3$: $z = \dfrac{x^3 - 2x^2y + 3}{4}$, P punto con $(x,y) = (-1,3)$

In generale, se si ha un grafico $\underline{x}'' = \phi(\underline{x}')$ (con m, $n-m$ componenti), allora lo spazio tg. affine a $M = \{ \underline{x} = (\underline{x}', \underline{x}'') \in \mathbb{R}^n : \underline{x}'' = \phi(\underline{x}') \}$ in un suo punto $\underline{x}_0 = (\underline{x}_0', \underline{x}_0'')$ con $\underline{x}_0'' = \phi(\underline{x}_0')$ è dato da

$$\underline{x}'' = \underline{x}_0'' + J_\phi(\underline{x}_0')(\underline{x}' - \underline{x}_0').$$

Qui $\underline{x}'' = z$, $\underline{x}' = (x,y)$; $J_\phi = \nabla z = \left(\frac{3x^2}{4} - xy \, , \, -\frac{x^2}{2} \right)$

$\underline{x}_0' = (-1,3)$; $\underline{x}_0'' = z_0 = -1$; $J_\phi(\underline{x}_0') = \nabla z(-1,3) = \left(15/4, -1/2 \right)$

Ottengo dunque $z = -1 + \left(15/4, -1/2\right) \cdot (x+1, y-3)$ cioè

$z = -1 + 15/4\,(x+1) - 1/2\,(y-3)$, cioè $15x - 2y - 4z + 17 = 0$

(l'altro modo dell'Ex. 14: esercizio).

15) $M_1 = \{ (x,y,z) : g(x,y,z) = 3xyz - z^3 = 4 \}$, $P(-1,-2,2)$.
Determinare anche quali superfici di livello di g danno luogo a superfici regolari di $\mathbb{R}^3$

Vediamo dove g è sommersiva.

$$\nabla g = (3yz, 3xz, 3xy - 3z^2) = (0,0,0) \iff \begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ xy - z^2 = 0 \end{cases}$$

$yz = 0$:
- $y = 0$: $\begin{cases} xz = 0 \\ -z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0$ $\quad (u,0,0)$ ASSE x
- $z = 0$: $\begin{cases} 0 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$
  - $x = 0$ $\quad (0,v,0)$ ASSE y
  - $y = 0$ $\quad (u,0,0)$ ASSE x

A quali sup. di livello di g appartengono tali punti?
$g(u,0,0) = g(0,v,0) = 0$: dunque tutte le sup. di livello $g(x,y,z) = \alpha \neq 0$ sono regolari, mentre invece la superficie $g(x,y,z) = 0$ lo sarà tranne che nei punti degli assi x e y UNIONE DEL PIANO ORIZZ. $z=0$ CON LA QUADRICA $3xy = z^2$

$3xyz - z^3 = 0 \quad z(3xy - z^2) = 0$

Tornando al nostro caso ($\alpha = 4$, $P(-1,-2,2)$):

$$\nabla g(P) = (-12, \overset{\neq 0}{-6}, -6) = -6\,(2,1,1)$$

Sp. tg. affine: $\nabla g(P)\cdot(x-x_P,\, y-y_P,\, z-z_P) = 0$

$-6\,(2,1,1)\cdot(x+1,\, y+2,\, z-2) = 0$ cioè $2x+y+z+2=0$.

Come forma grafico: $\frac{\partial g}{\partial y}(P) = -6 \neq 0 \rightarrow$ esplicito $y(x,z)$

$$y = -2 + \left(-\underbrace{\tfrac{-12}{-6}}_{\partial y/\partial x},\; -\underbrace{\tfrac{-6}{-6}}_{\partial y/\partial z}\right)\cdot(x-(-1),\, z-2) + \cdots, \text{ ovvero}$$

PIANO TG $2x+y+z+2=0$

$$-2 + (-2,-1)\cdot(x+1,\, z-2) + \cdots$$

(16) Curva parametrica in $\mathbb{R}^3$: $\gamma(t) = (\underset{x(t)}{t-\log(1+t)},\, \underset{y(t)}{t^2-3t},\, \underset{z(t)}{2t+\cos t})$

nel punto $P(0,0,1) = \gamma(0)$

$$\gamma'(t) = \left(1-\frac{1}{1+t},\; 2t-3,\; 2-\sin t\right) \neq (0,0,0)$$

Dunque $\gamma :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3$ è immersione (perciò l'immagine di un intervallino sarà una curva regolare)

$\gamma'(0) = (\underset{\frac{dx}{dt}(0)}{0},\, \underset{\frac{dy}{dt}(0)}{-3},\, \underset{\frac{dz}{dt}(0)}{2})$; dunque la retta tg affine alla curva in P

è $r = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix} : \lambda\in\mathbb{R} \right\}$ cioè $\begin{cases} x=0 \\ y=-3\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x=0 \\ z=1-\frac{2}{3}y \end{cases}$

Senza, in forma grafico. Ad esempio, $\frac{dz}{dt}(t=0) = 2 \neq 0 \xrightarrow{\text{loc.}}$

$\rightsquigarrow t : t(z) = 0 + \underbrace{\frac{dt}{dz}(z=1)}_{1/\frac{dz}{dt}}\cdot(z-1) + \cdots = \frac{1}{2}(z-1) + o_1(z-1)$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(z) - \log(1+t(z)) \\ t(z)^2 - 3t(z) \end{pmatrix}$ forma grafico. $\quad \frac{dx}{dt}(0)\Big/\frac{dz}{dt}(0) = 0/2 = 0$

Retta tg: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{dx}{dz}(1) \\ \frac{dy}{dz}(1) \end{pmatrix}\cdot(z-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}(z-1) \end{pmatrix}$ come forma

$\frac{dy}{dz}(1) = \frac{dy/dt(0)}{dz/dt(0)} = -\frac{3}{2}$

(17) Grafico in $\mathbb{R}^3$: $(x(z),\, y(z)) = (z\cos z,\, z\sin z)$ (disegnare!)

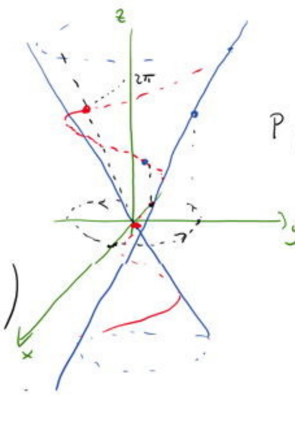
nel punto P con $z = \pi/2$.

Notiamo che $x^2+y^2 = z^2$ CONO A DUE FALDE

Dunque il sostegno della curva giace su questo cono.

È di certo curva regolare (è grafico!)

$\gamma(z) = (x(z),\, y(z),\, z) \rightarrow \gamma'(z) = \begin{pmatrix} \cos z - z\sin z \\ \sin z + z\cos z \end{pmatrix}$



$P(0, \pi/2, \pi/2)$

$$\gamma'(\pi/2) = \begin{pmatrix} -\pi/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{retta tg: } \begin{cases} x = 0 + \lambda(-\pi/2) \\ y = \pi/2 + \lambda \\ z = \pi/2 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda = z - \pi/2) \qquad \begin{cases} x = -\pi/2\,(z - \pi/2) \\ y = z \end{cases}$$

Se mi serve grafico

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\pi/2 \\ 1 \end{pmatrix} (z - \pi/2) + \cdots \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = -\pi/2\,(z - \pi/2) \\ y = \cancel{\pi/2} + (z - \cancel{\pi/2}) \end{cases}$$

(18) $$M_{\alpha,\beta} : \begin{cases} x + y + z = \alpha \\ xy + xz + yz = \beta \end{cases}$$

Per quali (α, β) l'insieme $M_{\alpha,\beta}$ è varietà regolare di $\mathbb{R}^3$? Di quale dimensione?

Calcolare lo spazio tangente affine a $M := M_{5,8}$ in $P(1,2,2)$.

Provare a disegnare M (sostituire $z = 5 - x - y$ nella 2ª equaz...)

Curva in forma cartesiana ($\overset{n-m=2}{2}$ equazioni in $\overset{n=3}{3}$ variabili $\Rightarrow$ $\dim = 3 - 2 = \overset{m}{1}$)

$G = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $G(x,y,z) = (x+y+z,\ xy + xz + yz)$

$$J_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix} \qquad \text{dunque } \operatorname{rk} J_G < 2 \iff x = y = z$$

ovvero nei punti del tipo (u,u,u) in cui G vale

$(\alpha, \beta) = G(u,u,u) = (3u, 3u^2)$ ovvero $\begin{cases} \alpha = 3u \\ \beta = 3u^2 \end{cases}$ ovvero in cui $\beta = \frac{1}{3}\alpha^2$

Dunque tutte le curve di livello di G sono regolari tranne quelle del tipo $M_{\alpha, \frac{1}{3}\alpha^2}$ nel loro punto $(\alpha/3, \alpha/3, \alpha/3)$

Il punto $P(1,2,2)$ non è di quel tipo, dunque è regolare.

Retta tg affine a $M = M_{5,8}$ in P è data da $J_G(P) \cdot \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \\ z - z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \\ z - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 4x + 3y + 3z = 16 \end{cases} \qquad (*)$$

In forma grafica: $J_G(P) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \end{pmatrix}$ ($\det = -1 \neq 0$) posso esplicitare (Dini) $\begin{cases} x(z) \\ y(z) \end{cases}$

$$\text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\text{DINI}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(- \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) (z - 2) + \cdots$$

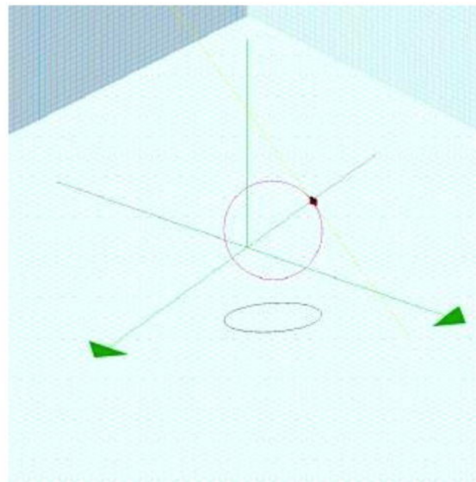
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (z - 2) + \cdots = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} (z - 2) + \cdots$$

da cui la retta tg $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 - z \end{cases}$ che è equivalente alla (*)

$M = \begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+xz+yz=8 \end{cases}$ $\quad z = 5-x-y \overset{II^a}{\rightsquigarrow} x^2+xy+y^2-5x-5y+8=0$

è una conica, che è un'ellisse ($\Delta = 1-4 = -3 < 0$)

Ne segue che M è l'intersezione tra il cilindro verticale di base l'ellisse $x^2+xy+y^2-5x-5y+8=0$ e il piano inclinato $x+y+z = 8$.



ESTREMI VINCOLATI SULLE VARIETÀ

M varietà di dim m in $\mathbb{R}^n$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Supp. che f sia almeno di classe $\mathcal{C}^1$ (ovvero f è indotta su M da una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ definita su intorni aperti dei punti di M)

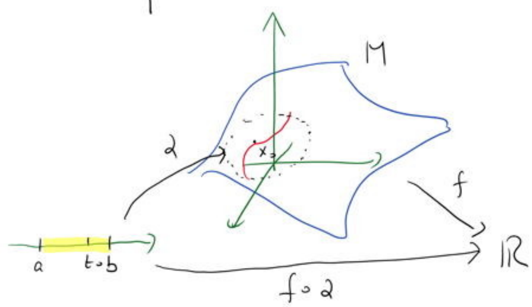
Parlando io in concreto vedo $f(x_1, \dots, x_n)$, ma la penso solo nei punti di M

Mi occupo di trovare gli eventuali estremanti di f su M

Devo prima di tutto trovare una nozione sensata di punto stazionario per f su M.

Per capire come fare, prendiamo un $\underline{x}_0 \in M$ che sia ad esempio di max locale per f su M e vediamo se c'è qualche proprietà necessaria da questo fatto.

Prendiamo una qualsiasi curva $\alpha :]a,b[\to M$ che passi per $x_0 = \alpha(t_0)$



Se x_0 è pt di max locale per f su M, ovviamente anche t_0 lo sarà per $f \circ \alpha$ (stò restringendo all'immagine vicino della curva), e dunque $(f \circ \alpha)'(t_0) = 0$ (AN 1)

ma allora $0 = (f \circ \alpha)'(t_0) = df_{\underline{x}_0}(\alpha'(t_0))$, quindi $\alpha'(t_0) \in \operatorname{Ker} df_{x_0}$.

Visto che α è una qualsiasi curva per $\underline{x}_0$ $\Rightarrow$ $T_{\underline{x}_0}M \subseteq \operatorname{Ker} df_{x_0}$

Def Si dice che $\underline{x}_0 \in M$ è stazionario per f su M se $T_{\underline{x}_0}M \subseteq \operatorname{Ker} df_{\underline{x}_0}$

Notiamo che se $m = n$ (cioè se M è un aperto di $\mathbb{R}^n$) allora $T_{\underline{x}_0}M = \mathbb{R}^n$ e dunque stiamo dicendo che $\mathbb{R}^n \subseteq \operatorname{Ker} df_{\underline{x}_0}$ ovvero che $\operatorname{Ker} df_{x_0} = \mathbb{R}$ ovvero che $df_{\underline{x}_0} = 0$ (che è la ben nota definizione data in Analisi 2 per funzioni definite su aperti di $\mathbb{R}^n$).

Prop. | Gli estremanti locali per f su M sono stazionari per f su M.

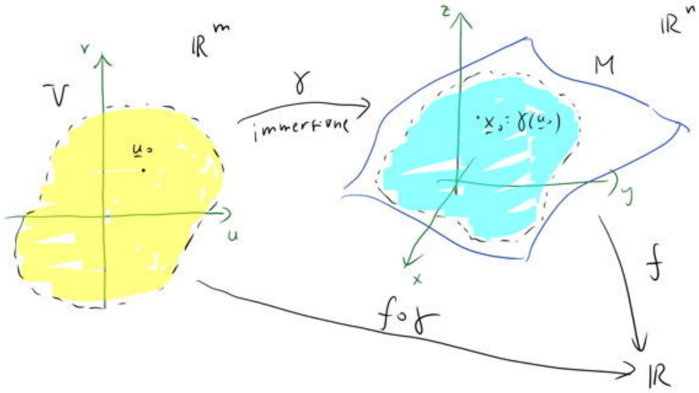
Dim. Non serve (la def. di stazionarietà è stata costruita ad arte perché ciò sia vero!) //

A questo punto, i problemi sul tavolo sono come quelli di Analisi 2:

(1) Trovare i punti stazionari per f su M

(2) Determinarne la natura (pti di max? min? selle?)

Iniziamo a trattare il caso PARAMETRICO.



Come detto, in generale non si può sperare di ricoprire tutta M con una sola parametrizzazione! Bisognerà ripetere questa procedura per ognuna delle parametrizzazioni che compongono un atlante di M.

Prop. Sia $x_0 = \gamma(u_0)$. Allora x_0 è stazionario per f su M $\iff$ u_0 è stazionario per $f\circ\gamma$. ← E IN QUEST'ULTIMO CASO POSSO USARE GLI STRUMENTI DI ANALISI 1 E 2, PERCHÉ $f\circ\gamma$ È UNA FUNZIONE DEFINITA SULL'APERTO V DI $\mathbb{R}^m$

Inoltre la natura di x_0 per f su M è la stessa di u_0 per $f\circ\gamma$ (ovvero x_0 è di max/min/sella per f su M se e solo se tale è u_0 per $f\circ\gamma$.)

Dim. Si ha $d(f\circ\gamma)_{u_0} = df_{x_0}\circ d\gamma_{u_0}$, pertanto

u_0 staz. per $f\circ\gamma$ $\iff d(f\circ\gamma)_{u_0} = 0 \iff d(f\circ\gamma)_{u_0}(v) = 0 \quad \forall v\in\mathbb{R}^m$

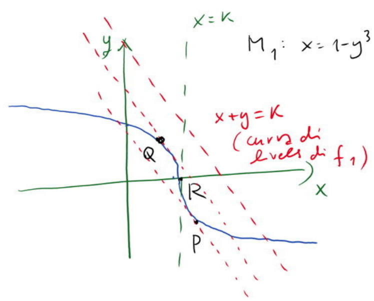
$\iff df_{x_0}\big(\underbrace{d\gamma_{u_0}(v)}_{\in T_{x_0}M}\big) = 0 \quad \forall v\in\mathbb{R}^m \iff df_{x_0}(u) = 0 \quad \forall u\in T_{x_0}M$

$\iff T_{x_0}M \subseteq \operatorname{Ker} df_{x_0} \iff x_0$ staz. per f su M.

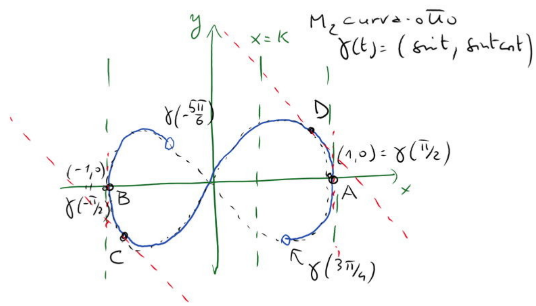
Infine, l'affermazione sull'uguaglianza delle nature è ovvia! //

Pertanto <u>il caso a parametri è il più facile</u>: il problema su M viene tradotto letteralmente in quello su V, che si affronta coi mezzi di An 1 e 2.

Ex. Calcolare gli estremi locali (e globali?) di $f_1(x,y) = x+y$ e $f_2(x,y) = x$ su $M_1 = \{x = 1-y^3\}$ e M_2 = tratto della curva-otto con $-5\pi/6 < t < 3\pi/4$.



x = K
M1: x = 1-y3
y
x
x+y = K
(curva di livelli di f1)
Q
R
P



y
x = K
M2 curva otto
γ(t) = (sin t, sin t cos t)
γ(-5π/6)
D
(1,0) = γ(π/2)
(-1,0)
B
γ(-π/2)
A
x
C
γ(3π/4)