UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

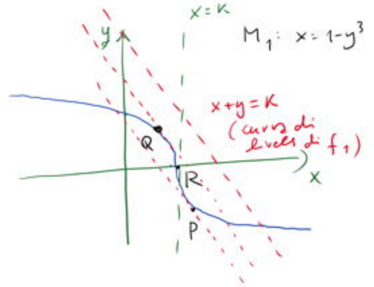
# ANALISI MATEMATICA III

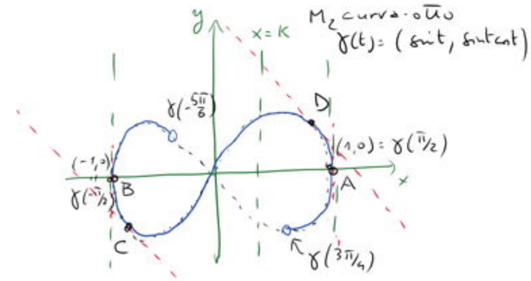
Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

## Lezione di venerdì 11/10/2024

Ex. Calcolare gli estremi locali (e globali?) di
$f_1(x,y)=x+y$ e $f_2(x,y)=x$ su $M_1=\{x=1-y^3\}$
e $M_2$ = tratto della curva-otto con $-5\pi/6<t<3\pi/4$.




• $f_1(x,y)=x+y$ su $M_1$ $\quad \gamma_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 \quad \gamma(y)=(1-y^3,y)$

$F(y):=(f_1\circ\gamma)(y)=1-y^3+y \quad F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è funzione di An 1!

$F'(y)=-3y^2+1=0 \quad y=\pm\frac{1}{\sqrt3}$ ; $F'(y)>0$ per $|y|<\frac{1}{\sqrt3}$

Pertanto $P\left(1+\frac{1}{3\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3}\right)\in M_1$ è di min locale per $f_1$

e $Q\left(1-\frac{1}{3\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)\in M_1$ è di max locale per $f_1$.

| | | $-1/\sqrt3$ | | $1/\sqrt3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| F' | − | | + | | − |
| F | ↘ | min | ↗ | MAX | ↘ |

Visualizzando le curve di livello di $f_1$ nel piano (le rette $x+y=K$ che salendo/scendendo fanno aumentare/diminuire il valore di $f_1$) il risultato appare geometricamente chiaro.

• $f_2(x,y)=x$ su $M_2$ $\quad \gamma:\,]-5\pi/6,3\pi/4[\,\to\mathbb{R}^2,\ \gamma(t)=(\sin t,\sin t\cos t)$

$F(t):=f_2(\gamma(t))=\sin t \quad F'(t)=\cos t=0 \quad t=\pm\pi/2$

$F'(t)>0 \iff \cos t>0 \iff |t|<\pi/2$

| | $-5\pi/6$ | | $-\pi/2$ | | $\pi/2$ | | $3\pi/4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F' | | − | | + | | − | |
| F | | ↘ | min | ↗ | MAX | ↘ | |

Pertanto i punti $A(1,0)=\gamma_2(\pi/2)$ e $B(-1,0)=\gamma_2(-\pi/2)$ sono rispettivamente di max/min locale (in realtà assoluto) per $f_2$ su $M_2$: anche in questo caso, la visualizzazione delle curve di livello di $f_2$ nel piano (le rette verticali $x=K$, verdi) rendono geometricamente chiaro il risultato, che mette in evidenza il punto più a destra (A) o più a sinistra (B) della porzione $M_2$ di curva-otto.

• $f_2(x,y)=x$ su $M_1$. $F(y):=(f_1\circ\gamma_1)(y)=1-y^3$. $F'(y)=-3y^2=0$
$\iff y=0$; $F'(y)<0$ per $y\neq0$.

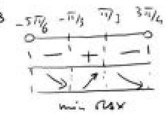
| | | 0 | |
|---|---|---|---|
| F' | − | | − |
| F | ↘ | Flesso | ↘ |

Dunque il punto $R(1,0)=\gamma_1(0)$ di $M_1$ è flesso.

- $f_1(x,y) = x+y$ su $M_2$. $F(t) := (f_2 \circ \gamma_2)(t) = \sin t + \sin t \cos t$

$F'(t) = \cos t + \cos^2 t - \sin^2 t = \cos t\,(1+\cos t) - (1+\cos t)(1-\cos t)$

$= (1+\cos t)(2\cos t - 1)$. $\quad F'(t) = 0 \;\begin{cases} \cos t = -1 & \text{(NO nel dominio)} \\ \cos t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \pi/3 \end{cases}$




$F'(t) > 0 \quad (\cancel{1+\cos t})(2\cos t - 1) > 0 \quad \cos t > 1/2 \quad -\pi/3 < t < \pi/3$

Dunque $\gamma(-\pi/3) = C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ è pt di min locale

e $\gamma\left(\frac{\pi}{3}\right) = D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ di max locale (in realtà assoluto)

per $f_1$ su $M_2$, come la visualizzazione grafica mostra chiaramente.

OSSERVAZIONE (IMPORTANTE). Si sarà osservato che nelle curve $M_1$ e $M_2$ si è evitato di inserire dei "punti di bordo" ($M_1$ è una cubica illimitata, e $M_2$ è privata degli estremi $\gamma(-\pi/6)$ e $\gamma(\frac{3\pi}{4})$): in effetti, una curva con un "punto di bordo" (definiremo meglio tra qualche lezione questo concetto) non è più una varietà (un intervallo semichiuso non è diffeomorfo a un intervallo aperto)

SE ESISTESSE DIFFEO $\varphi: (a,b] \xrightarrow{\sim} (c,d)$, DETTO $P = \varphi(b)$ (PUNTO INTERNO DI $(c,d)$) ci SAREBBE DIFFEO INDOTTO $(a,b) \xrightarrow{\sim} (c,P) \cup (P,d)$, IMPOSSIBILE: $1 \not\cong 2$!

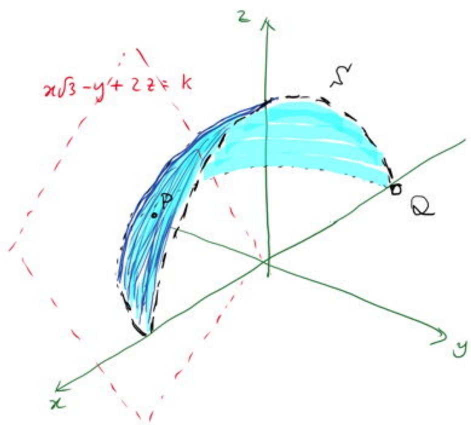
Poiché dunque $M_1$ e $M_2$ non sono compatti di $\mathbb{R}^2$, non siamo certi che $f_1$ e $f_2$ (continue) ammettano estremi assoluti su esse (in realtà li ammettono su $M_2$, come visto ...)

Considerazioni simili valgono anche per il prossimo esercizio (in dim. superiore), in cui si noterà che la superficie $S$ è priva di punti di bordo (i due semicerchi sui piani $z=0$ e $y=0$).

Tuttavia prossimamente ci occuperemo di cercare gli estremi assoluti di funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ su insiemi compatti di $\mathbb{R}^n$ (che esistono per Weierstrass), e allora la strategia sarà

1. decomporre tali insiemi in pezzi ciascuno dei quali sia una varietà;
2. Cercare punti stazionari della funzione su ciascuno di essi;
3. Vedere in quali di essi la funzione assume i suoi estremi.

Ex. Determinare gli estremi locali della funzione $f(x,y,z) \overset{\neq 0 \text{ nel dom}}{=} x\sqrt{3} - y + 2z$ sul quarto di superficie sferica $S$ di centro l'origine, raggio $R$ e tale che $y<0$ e $z>0$.

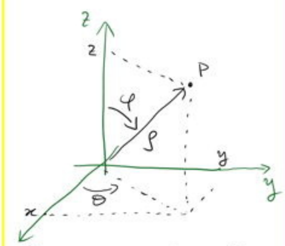



Possiamo parametrizzare $S$ usando le coordinate sferiche $(\theta, \varphi)$ di $\mathbb{R}^3$ (il raggio $\rho$ è bloccato sul valore $R$).

$S$ è descritta per $(\theta,\varphi) \in \,]-\pi, 0[\, \times \,]0, \pi/2[$

$$\gamma : \,]-\pi, 0[\, \times \,]0, \pi/2[\, \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(\theta,\varphi) = (R\cos\theta \sin\varphi,\ R\sin\theta\sin\varphi,\ R\cos\varphi)$$




COORD. SFERICHE

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

con $\rho>0$, $\theta \in \,]-\pi,\pi[$, $\varphi \in \,]0,\pi/2[$

$$F(\theta,\varphi) := (f\circ\gamma)(\theta,\varphi) = f(x(\theta,\varphi), y(\theta,\varphi), z(\theta,\varphi))$$
$$= R\left(\sqrt{3}\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\sin\varphi + 2\cos\varphi\right)$$
$$= R\left((\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta)\sin\varphi + 2\cos\varphi\right)$$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \partial F/\partial\theta \\ \partial F/\partial\varphi \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} -(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta)\sin\varphi \\ (\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta)\cos\varphi - 2\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta)\underbrace{\cancel{\sin\varphi}}_{\neq 0 \text{ nel dominio}} = 0 \\ (\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta)\cos\varphi - 2\sin\varphi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3}/3 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta = -\pi/6 \\ 2\cos\varphi - 2\sin\varphi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = -\pi/6 \\ \varphi = \pi/4 \end{cases}$$

$$H_F = \begin{pmatrix} \partial^2_{\theta\theta}F & \partial^2_{\theta\varphi}F \\ \partial^2_{\theta\varphi}F & \partial^2_{\varphi\varphi}F \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} -(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta)\sin\varphi & -(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta)\cos\varphi \\ -(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta)\sin\varphi & -(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta)\sin\varphi - 2\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$H_F(-\pi/6, \pi/4) = R\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ è def. negativa $\Rightarrow$ $(\theta_0,\varphi_0) = (-\pi/6, \pi/4)$ è punto di max loc. stretto per $F$

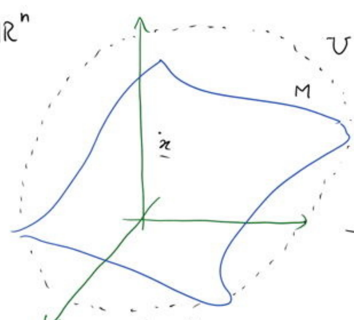
Quindi il punto $\gamma(-\pi/6, \pi/4) = P\left(\frac{\sqrt{6}}{4}R, -\frac{\sqrt{2}}{4}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R\right)$ è di max locale STRETTO per $f$ su $S$. In realtà si tratta di un punto di max assoluto, come si ricava anche dalle superfici di livello di $f$, ovvero i piani paralleli $x\sqrt{3} - y + 2z = k$ segnati in rosso nella figura in alto, e che corrispondono a valori crescenti di $f$ quanto più avanti intersecano l'asse $x$: il punto $P$ è proprio il punto di tangenza tra $S$ e uno di questi piani, e gli altri punti di $S$ incontrano piani più indietro di quello tangente.

**ESERCIZI**

(19) Studiare gli estremi di $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$ sul grafico $y = \sqrt{x+1}$ e sul tratto di spirale d'Archimede $\rho(\theta) = \theta$ con $0 < \theta < 2\pi$. Qual è il significato geometrico dei risultati?

(20) Quali sono i punti del grafico $y = x^2 - 2(z-1)^2$ più vicini all'origine?

Trattiamo ora il caso (b) degli estremi di una funzione $C^1$ su una varietà (almeno $C^2$) di dim $m$. IN FORMA CARTESIANA.




$\xrightarrow[\text{SOMMERSIONE}]{g = (g_1, \dots, g_{n-m})} \mathbb{R}^{n-m}$ $\quad \nabla g_1, \dots, \nabla g_{n-m}$ INDIPENDENTI!

$\xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\quad \nabla f$

dim $M = m$

$$M = \left\{ \underline{x} \in U : g(\underline{x}) = 0, \text{ ovvero } \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g_{n-m}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \right\}$$

Voglio esprimere la stazionarietà di $f$ su $M$ in un certo punto $\underline{x} \in M$ in termini dei gradienti $\nabla f(\underline{x}), \nabla g_1(\underline{x}), \dots, \nabla g_{n-m}(\underline{x})$.

**Teor.** (MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE)

$\underline{x} \in M$ è stazionario per $f$ su $M$ $\iff$

$\nabla f(\underline{x})$ è generato dagli $n-m$ gradienti $\nabla g_1(\underline{x}), \dots, \nabla g_{n-m}(\underline{x})$,

ovvero $\iff$ esistono $n-m$ numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m} \in \mathbb{R}$ t.c.

la $(2n-m)$-upla $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-m})$ soddisfi

$$\begin{cases} \nabla f(\underline{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\underline{x}) + \dots + \lambda_{n-m} \nabla g_{n-m}(\underline{x}) \\ g(\underline{x}) = 0 \end{cases}$$

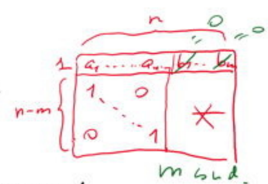
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}) = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\underline{x}) + \dots + \lambda_{n-m} \frac{\partial g_{n-m}}{\partial x_1}(\underline{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}) = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\underline{x}) + \dots + \lambda_{n-m} \frac{\partial g_{n-m}}{\partial x_n}(\underline{x}) \\ g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_{n-m}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

($2n-m$ incognite in $2n-m$ equazioni!)

Dim. $\underline{x}$ è staz. per $f$ su $M$ $\iff T_{\underline{x}} M \subseteq \operatorname{Ker} df_{\underline{x}} = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^n : \nabla f(\underline{x}) \cdot \underline{v} = 0 \}$

$\iff \nabla f(\underline{x}) \perp T_{\underline{x}} M \iff \nabla f(\underline{x}) \in (T_{\underline{x}} M)^{\perp} = \langle \nabla g_1(\underline{x}), \dots, \nabla g_{n-m}(\underline{x}) \rangle$ //

Delle $2n-m$ incognite $(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_{n-m})$ ci interessano veramente solo le $n$ coordinate $x_1, \dots, x_n$: come evitare di dover calcolare anche le $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m}$? Ragioniamo.




$$A: \underset{n-m+1}{\ } \overset{\longleftarrow\ n\ \longrightarrow}{\begin{bmatrix} \nabla f(\underline{x}) \\ \nabla g_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ \nabla g_{n-m}(\underline{x}) \end{bmatrix}}$$

è come chiedere che $\operatorname{rk} A < n-m+1$ (anche se già so che $\operatorname{rk} A \geq n-m$ perché i gradienti delle $g$ sono indipendenti), dopo chiedere che $\operatorname{rk} A = n-m$ $\iff$ tutti i minori di ordine max $n-m+1$ abbiano $\det = 0$.

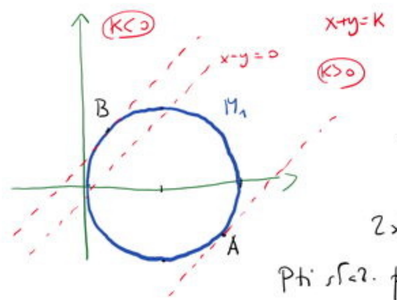
(in realtà, delle molte equazioni che spunterebbero ve ne sono solo $m$ indipendenti: questo perché già sappiamo che $\operatorname{rk} A \geq n-m$ ...)

Col metodo dei moltiplicatori di Lagrange riesco a determinare i punti stazionari di $f$ su $M$. Per capire invece la loro natura dovrei ricorrere a una param. locale di $f$ nei vari punti (col Dini...) e usare il ragionamento visto per il caso parametrico.

Facciamo qualche esercizio.

$\boxed{\text{Ex.}}$ Estremi locali di $f_1(x,y)=x-y$, $f_2(x,y)=y$, $f_3(x,y)=3x^2-2y$
su $M_1=\{(x,y):\ x^2+y^2=2x\}$, e su $M_2=\{(x,y):\ x^3-3x^2y+y^2=1\}$.

Vediamo ad es. $f_1$ su $M_1$ $\qquad g_1(x,y)=x^2+y^2-2x=0$




La prima condizione di Lagrange è che $rk\begin{pmatrix}\nabla f\\ \nabla g_1\end{pmatrix}<2$ ovvero che det = 0 (è matrice 2x2):

$$\begin{cases} \det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2x-2 & 2y\end{pmatrix}=0\\ x^2+y^2-2x=0\end{cases} \qquad \begin{cases} y=1-x\\ x^2+(1-x)^2-2x=0\end{cases}$$

$$2x^2-4x+1=0 \qquad x=\frac{2\pm\sqrt{4-2}}{2}=1\pm\frac{\sqrt2}{2} \qquad y=\mp\frac{\sqrt2}{2}$$

Pti staz. per $f_1$ su $M_1$: $A\left(1+\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right)$, $B\left(1-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$

Cerchiamo di capire dai conti la natura di A e B, ad esempio di B
(anche se abbiamo già capito che è un punto di min. assoluto!)

$$\nabla g_1(B)=\left(\overset{\neq 0}{-\sqrt2},\sqrt2\right) \xrightarrow{\text{Dini}} x(y)=\left(1-\tfrac{\sqrt2}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt2}{-\sqrt2}\right)\left(y-\tfrac{\sqrt2}{2}\right)+\cdots=\underbrace{\left(1-\tfrac{\sqrt2}{2}\right)}_{x(\sqrt2/2)}+\underbrace{1}_{x'(\sqrt2/2)=1}\left(y-\tfrac{\sqrt2}{2}\right)+\cdots$$

Ci servirà anche $x''(\sqrt2/2)$:

$$x^2+y^2-2x=0 \xrightarrow{d/dy} 2xx'+2y-2x'=0 \xrightarrow{y=\sqrt2/2} 2\left(1-\tfrac{\sqrt2}{2}\right)x'+\sqrt2-2x'=0 \Rightarrow \overset{\text{già noto}}{x'(\sqrt2/2)=1}$$

$$\xrightarrow{d/dy}\ \cancel{2}(x')^2+\cancel{2}xx''+\overset{1}{\cancel{2}}-\cancel{2}x''=0 \xrightarrow{y=\sqrt2/2} 2+\left(1-\tfrac{\sqrt2}{2}\right)x''+1-x''=0$$

$$\Rightarrow x''(\sqrt2/2)=2\sqrt2$$

Dunque $x(y)=\left(1-\sqrt2/2\right)+1\cdot\left(y-\sqrt2/2\right)+\frac12\cdot 2\sqrt2\left(y-\sqrt2/2\right)^2+\cdots$

Ora uso $x(y)$ per capire la natura di $B$:

$F_1(y):=f_1(x(y),y)=x(y)-y$ (funzione di An 1)

$F_1'(y)=x'(y)-1 \xrightarrow{y=\sqrt2/2} F_1'(\sqrt2/2)=x'(\sqrt2/2)-1=0$ (già lo sapevo!)

$F_1''(y)=x''(y) \xrightarrow{y=\sqrt2/2} F_1''(\sqrt2/2)=x''(\sqrt2/2)=2\sqrt2>0 \Rightarrow y=\frac{\sqrt2}{2}$ è di min. loc. stretto per $F_1$

$\Rightarrow$ $B$ è di min. loc. stretto per $f_1$ su $M_1$ (come previsto! In realtà di min. assoluto!)

In realtà si poteva parametrizzare $M_1$ globalmente:

$\gamma_1(\psi)=(1,0)+1\cdot(\cos\psi,\sin\psi)=(1+\cos\psi,\sin\psi)$ $\quad \gamma_1:\ ]-\pi,\pi[\ \to\mathbb{R}^2$

Rifare l'esercizio con $\gamma_1$: bisognerà studiare

$F_1(\psi)=f_1(\gamma_1(\psi))=(1+\cos\psi)-\sin\psi$ (Analisi 1)

. . . .

Fare gli altri esercizi analoghi per $f_2$, $f_3$, $M_2$.

---

$\boxed{\text{Ex.}}$ Estremi locali di $f(x,y,z) = x + 2z$ sulla sup. $3xyz - z^3 = 1$ $(M)$

$g(x,y,z) = 3xyz - z^3 - 1 = 0$ (dovremmo già sapere che la superficie $M$ è regolare)

$\nabla g : (3yz,\ 3xz,\ 3(xy - z^2)) = (0,0,0) \iff \begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ xy - z^2 = 0 \end{cases}$

$yz = 0 \ \begin{cases} y = 0 & \begin{cases} xz = 0 \\ z \end{cases} \Rightarrow z = 0 \quad (u,0,0) \\ & \begin{cases} 0 = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 & (0,v,0) \\ y = 0 & (u,0,0) \end{cases} \end{cases}$

Dunque $g$ non è sommersiva nei punti degli assi $x$ e $y$.

In essi $g(u,0,0) = -1$, $g(0,v,0) = -1$

Poiché $M = \{g = 0\}$, nessuno di questi punti sta in $M \Rightarrow$ è regolare.

$\begin{cases} \mathrm{rk}\begin{pmatrix} \nabla f \\ \hline \nabla g \end{pmatrix} < 2 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3yz & 3xz & 3(xy - z^2) \end{pmatrix} < 2 \\ 3xyz - z^3 - 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3xz = 0 \\ 3(xy - z^2) - 6yz = 0 \\ \cancel{-6xz = 0} \\ 3xyz - z^3 - 1 = 0 \end{cases}$ ← DIPENDE GIÀ DALLE PRECEDENTI $\qquad \begin{cases} xz = 0 \\ xy - z^2 - 2yz = 0 \\ 3yxz - z^3 - 1 = 0 \end{cases}$

$x = 0 \quad \begin{cases} -z^2 - 2yz = 0 \\ -z^3 - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = -1 \\ y = 1/2 \end{cases} \quad A\,(0, 1/2, -1)$

$z = 0 \quad \begin{cases} xy = 0 \\ -1 = 0 \end{cases}$ nessuna soluzione!

Pertanto $A$ è l'unico pt stazionario per $f$ su $M$.

Per capirne la natura serve una param. locale di $M$ vicino $A$.

$\nabla g(A) = (-3/2,\ 0,\ \underset{}{-3}^{\neq 0}) \xrightarrow{\text{Dini}} z(x,y) = -1 + \left(-\frac{-3/2}{-3}, -\frac{0}{-3}\right)\cdot\left(x - 0, y - \frac{1}{2}\right) + \cdots$

cioè $z(x,y) = -1 - \frac{1}{2}x + \cdots$ Ma serviranno anche le derivate seconde di $z$...

$3xyz - z^3 = 1 \ \begin{cases} \xrightarrow{\partial_x} 3yz + 3xy\dot{z}_x - 3z^2\dot{z}_x = 0 & \begin{cases} \xrightarrow{\partial_x} \cdots \\ \xrightarrow{\partial_y} \cdots \end{cases} \\ \xrightarrow{\partial_y} 3xz + 3xy\dot{z}_y - 3z^2\dot{z}_y = 0 & \begin{cases} \xrightarrow{\partial_x} \\ \xrightarrow{\partial_y} \cdots \end{cases} \end{cases}$

e poi calcolo per $(x_0, y_0) = (0, 1/2)$

Dopo conti: $\ddot{z}_{xx}(0, 1/2) = \ddot{z}_{yy}(0, 1/2) = 0$, $\ddot{z}_{xy}(0, 1/2) = -1$

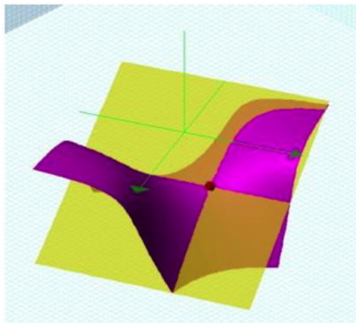
Dunque $H_z(0, 1/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Chiamo $F(x,y) := f(x,y,z(x,y)) = x + 2z(x,y)$

$\nabla F = (1 + 2\dot{z}_x,\ +2\dot{z}_y) \Rightarrow \nabla F(0, 1/2) = (0,0)$ (già sapevamo!)

$H_F = \begin{pmatrix} 2\ddot{z}_{xx} & 2\ddot{z}_{xy} \\ 2\ddot{z}_{xy} & 2\ddot{z}_{yy} \end{pmatrix} = 2H_z \Rightarrow H_F(0, 1/2) = 2H_z(0, 1/2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ indefinita ($\det < 0$)

Dunque $(0, 1/2)$ è sella per $F \iff A$ è una sella per $f$ su $M$.



Disegno dell'elaborazione grafica:

- $\Gamma$ è in porpora
- A è in rosso
- la superficie di livello di $f$ per A è gialla

È chiaro che A è una sella:
al suo intorno vi sono punti di $\Gamma$
in cui $f$ vale più che in esso
e altri in cui vale meno.

---

Altro esercizio su max-min vincolati nel caso cartesiano:

(Verrà svolto posteriormente; si consiglia di affrontarlo in anticipo.)

$\boxed{\text{Ex}}$ Verificare che $\Gamma = \begin{cases} 2xy + z^2 = 3 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ è una curva regolare di $\mathbb{R}^3$,

e trovarne le estremità locali in alto e in basso.

Verificare poi che $\Gamma$ è compatta, capendo com'è fatta,

e trovarne i punti più in alto e più in basso.