

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

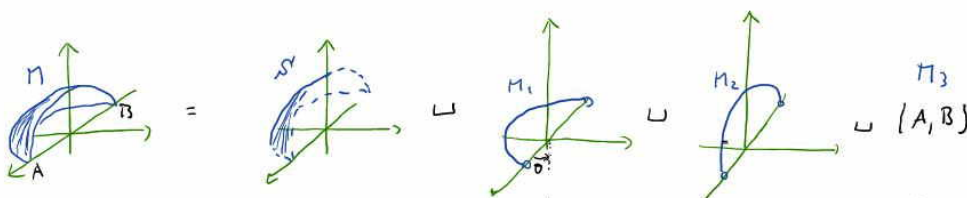
Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 17/10/2024

Ex

Calcolare gli estremi assoluti di $f(x, y, z) = x\sqrt{3} - y + 2z$ sul sottoinsieme M di superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$, raggio R e con $y \leq 0$ e $z \geq 0$.

Si tratta del quarto di superficie sferica dell'esercizio già visto, con l'aggiunta dei punti di bordo: oltre che limitata, ora M è anche chiusa (definita dall'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con le disuguaglianze $y \leq 0$ e $z \geq 0$), dunque compatta. Converrà decomporre M con:



• Su S (superficie regolare, varietà dim. 2) si ha il punto $P(\frac{\sqrt{6}}{2}R, -\frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R)$

• M_1 : $\gamma(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$ con $-\pi < \theta < 0$

$$F(\theta) = f(\gamma(\theta)) = R(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta)$$

$$F'(\theta) = -R(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta) = 0 \Leftrightarrow \tan\theta = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \theta = -\pi/6$$

$$\Rightarrow Q(\frac{\sqrt{3}}{2}R, -\frac{1}{2}R, 0) = \gamma(-\pi/6)$$

• M_2 : Lagrange $M_2: \begin{cases} y=0 \\ x^2+z^2=R^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \text{rk} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix} < 3 \text{ (det=0)} \\ x^2+z^2=R^2 \\ y=0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2\sqrt{3} = 4x \\ x^2+z^2=R^2 \\ y=0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}z \\ 3\frac{z^2}{4} + z^2 = R^2 \\ y=0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{7}{4}z^2 = R^2 \Rightarrow z^2 = \frac{4}{7}R^2 \Rightarrow z = \pm \frac{2\sqrt{7}}{7}R \Rightarrow x = \frac{\sqrt{21}}{7}R, y=0$$

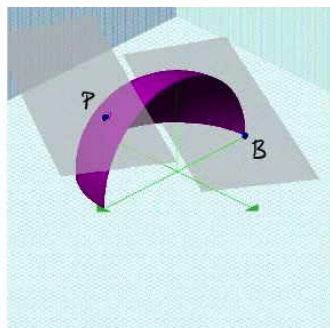
$$\text{Tutti } E(\frac{\sqrt{21}}{7}R, 0, \frac{2\sqrt{7}}{7}R) \text{ (controlla i altri...)}$$

• $M_3 = \{A, B\}$ P.H. sferici: $A(R, 0, 0)$, $B(-R, 0, 0)$ (d'Alembert)

$$\text{Evidenti } f(P) = 2R\sqrt{2}, f(A) = R\sqrt{3}, f(B) = -R\sqrt{3}, f(Q) = 2R, f(E) = R\sqrt{7}$$

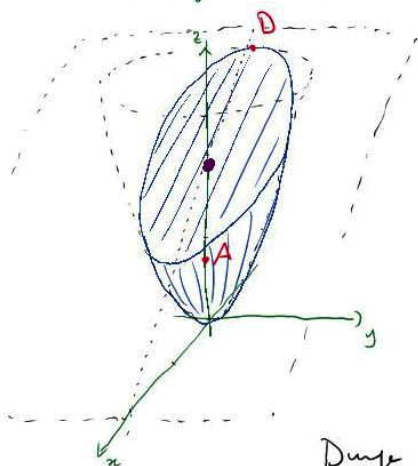
$$\text{MAX} \sim 2,8 \cdot R$$

$$\text{min} \sim -1,7 R$$



... come previsto.

[Ex] Dimostrare che $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2-x\}$ è un compatto di $\mathbb{R}^3$, e calcolare gli estremi assoluti di $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - z$ su K .



K è chiuso perché è definito in $\mathbb{R}^3$ da disuguaglianze larghe ($\leq$) di funzioni continue.

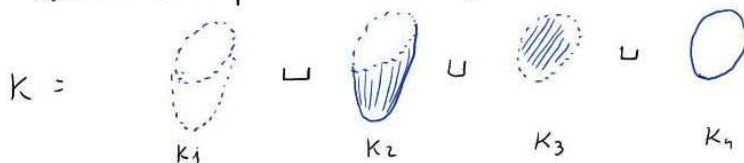
Inoltre K è limitato perché

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x &\Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2 - x \text{ con} \\ x^2 + y^2 + x - 2 &\leq 0 \quad (\text{disca nel piano } (x, y)) \\ (x + 1/2)^2 + y^2 &\leq 9/4 \quad \text{centro } (-1/2, 0) \text{ raggio } 3/2 \end{aligned}$$

dunque x e y sono limitate; ed essendo $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x$, lo è anche z .

Dunque K è compatto.

Per la ricerca degli estremi assoluti di $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - z$ su K conviene decomporre K come segue:



• Su K_1 (cioè K senza bordo, aperto di $\mathbb{R}^3$): metodo di An. II

$$\nabla f = (2x, 4y, 2z-1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow A(0, 0, 1/2)$$

• Su K_2 (porzione di superficie di paraboloida su $z < 2-x$)

$$\text{Lagrange } g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0 \quad (z < 2-x)$$

$$\begin{cases} \text{rk} \begin{pmatrix} 2x & 4y & 2z-1 \\ 2x & 2y & -1 \end{pmatrix} < 2 \\ x^2 + y^2 = z, \quad (z < 2-x) \end{cases} \quad \begin{cases} -2xy = 0 \\ -2x - 2x(2z-1) = 0 \\ -4y - 2y(2z-1) = 0 \\ x^2 + y^2 = z \quad (z < 2-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ \cancel{2x}(2z-1) = 0 \\ \cancel{2y}(2z-1) = 0 \\ x^2 + y^2 = z \quad (z < 2-x) \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 0 \\ xz = 0 \\ y(2z+1) = 0 \\ x^2 + y^2 = z \quad (z < 2-x) \end{cases}$$

$$xy = 0 \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ y(2z+1) = 0 \\ y^2 = z \quad (z < 2) \end{cases} \quad O(0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} xz = 0 \\ 0 = 0 \\ x^2 = z \quad (z < 2-x) \end{cases} \quad O(0, 0, 0)$$

Definisci K_2 e parametrizza con $\gamma(x,y) = (x, y, x^2+xy^2)$ con $(x,y) \in \tilde{D}$
 la ∂ aperta di ∂K_2
 $F(x,y) = f(\gamma(x,y)) = x^2 + 2y^2 + (x^2+xy^2)^2 - (x^2+xy^2)$
 $= y^2 + (x^2+xy^2)^2$
 $\nabla F = (2x(x^2+xy^2), 2y + 2 \cdot 2y(x^2+xy^2)) = (0,0) \Leftrightarrow x=0, y=0 \Rightarrow z=0$
 e in tutto $O(0,0,0)$

K_3 (porzione di piano $z=2-x$ con $z > x^2+xy^2$)
 Parametrizziamo $\gamma(x,y) = (x, y, 2-x)$ con $(x,y) \in \tilde{D}$
 $F(x,y) = f(\gamma(x,y)) = x^2 + 2y^2 + (2-x)^2 - (2-x) = 2x^2 + 2y^2 - 3x + 2$
 $\nabla F = (4x-3, 4y) = (0,0) \Leftrightarrow x=3/4, y=0 \rightarrow B(3/4, 0, 5/4)$

K_4 ellipsoide dato da $\begin{cases} z = x^2+xy^2 \\ z = 2-x \end{cases}$
 lepage: $\begin{cases} \text{rk} \begin{pmatrix} 2x & 4y & 2z-1 \\ 2x & 2y & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} < 3 \\ z = x^2+xy^2 \\ z = 2-x \end{cases} \quad \begin{cases} -4y - 2y(2z-1) - 4xy = 0 \\ \dots \\ \dots \end{cases}$

$\Rightarrow \dots \rightarrow C(1,0,1), D(-2,0,4)$

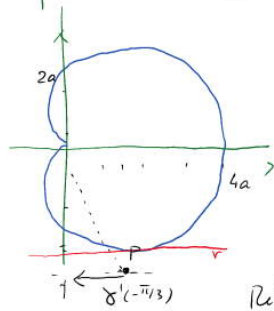
Evidentemente $f(A) = -1/4, f(O) = 0, f(B) = 7/8, f(C) = +1, f(D) = 16$
 il max assoluto è 16 (assunto in D), e il min è $-1/4$ (assunto in A).

Questi risultati sono geometricamente coerenti, perché gli insiemi di
 livelli di f son degli ellissoidi centrati in A con assi a/l
 paralleli agli assi coordinati.

RISOLUZIONE DI ALCUNI ESERCIZI
NON SVOLTI A VERBALE

Verificare se gli insiemi indicati, definiti in
vari modi (parametrici, grafici, vincoli)
danno luogo a variet . Calcolare poi le spazie
tangente affue nei punti indicati, possibilmente
in pi  modi.

(11) $\rho(\theta) = 2a(1 + \cos\theta)$, $P =$ punto con $\theta = -\frac{\pi}{3}$
(questa curva piana in forma polare   detta CARDIOIDE,
provare a disegnarla e a trovare una forma cartesiana)



$$\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta) \quad \rho(-\frac{\pi}{3}) = 3a$$

$$P = \gamma(\frac{\pi}{3}) = (\frac{3a}{2}, -\frac{3\sqrt{3}a}{2})$$

$$\gamma'(\theta) = (\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta, \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta)$$

$$\rho'(\theta) = -2a\sin\theta \quad \rho'(\frac{\pi}{3}) = a\sqrt{3}$$

$$\gamma'(-\frac{\pi}{3}) = (-a\sqrt{3}, 0)$$

$$\text{Retta } r = \{ P + \lambda \gamma'(-\frac{\pi}{3}) : \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$$r = \{ (\frac{3a}{2}, -\frac{3\sqrt{3}a}{2}) + \lambda (-a\sqrt{3}, 0) : \lambda \in \mathbb{R} \}, \text{ ovvero } y = -\frac{3\sqrt{3}}{2}a.$$

Con grafici: $\gamma'(-\frac{\pi}{3}) = (-a\sqrt{3}, 0) \Rightarrow$ per invarianti $\theta = \theta(x)$

e dunque $y = y(x) = y(\theta(x)) = \rho(\theta(x)) \cdot \sin\theta(x)$, con

$$y = -\frac{3\sqrt{3}}{2}a + \frac{0}{-a\sqrt{3}}(x - \frac{3a}{2}) + \theta_{\frac{3a}{2}}(x - \frac{3a}{2})$$

$$\text{ovvero } y = -\frac{3\sqrt{3}}{2}a + \dots$$

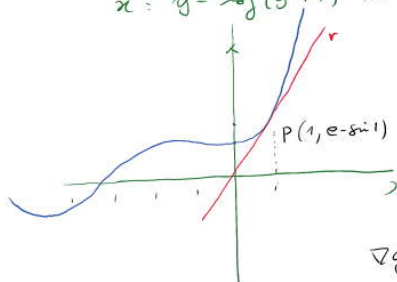
Eppure, estendere anche $y = y(x)$; altrimenti

da $\rho = 2a(1 + \cos\theta)$ si ricava $\rho^2 = 2a\rho(1 + \cos\theta)$

ovvero $x^2 + y^2 = 2a(\sqrt{x^2 + y^2} + x)$, da cui

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 2a(\sqrt{x^2 + y^2} + x) = 0.$$

(12) Grafici in $\mathbb{R}^2$: $y = e^x - \sin x$ in P punto con $x=1$,
 $x = y - \log(y^2+1)$ in Q punto con $y=2$. (disegnare!)



$$r: y = e - \sin 1 + (e - \cos 1)(x - 1)$$

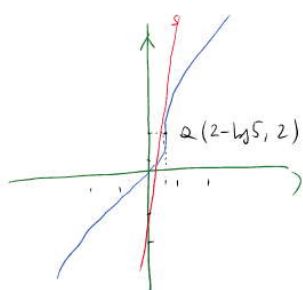
Come curva calcolata:

$$g(x, y) = y - e^x + \sin x = 0$$

$$\nabla g = (-e^x + \cos x, 1)$$

$$\nabla g(P) = (\cos 1 - e, 1)$$

$$\nabla g(P) \cdot (x-1, y-(e-\sin 1)) = 0 \text{ dà anche } r$$



$$x' = 1 - \frac{2y}{y^2+1} \quad x(2) = 2 - \log 5 \quad x'(2) = \frac{1}{5}$$

$$S: x = 2 - \log 5 + \frac{1}{5}(y - 2)$$

Come parametrizzata:

$$\gamma(y) = (y - \log(y^2+1), y)$$

$$\gamma'(y) = (1 - \frac{2y}{y^2+1}, 1) \quad \gamma'(2) = (\frac{1}{5}, 1)$$

$$S = \{Q + \lambda \gamma'(2) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(2 - \log 5 + \frac{1}{5}\lambda, 2 + \lambda)\}$$

che dà la stessa retta di prima.

(13) $M = \{(x, y) : e^{xy} + x + 2y = 3\}$, $P(0, 1)$

La curva è quella porpora
 nella figura, e la retta
 tangente a P è gialla.

$$g(x, y) = e^{xy} + x + 2y = 3$$

$$\nabla g = (ye^{xy} + 1, xe^{xy} + 2)$$

$$\nabla g(P) = (2, 2)$$

$$\text{Retta } g: \nabla g(P) \cdot (x-0, y-1) = 0$$

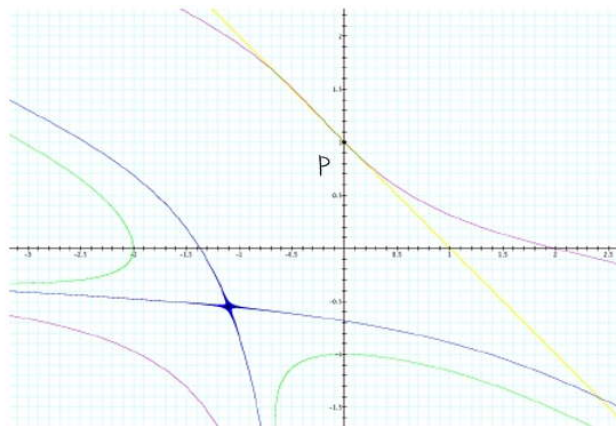
$$\text{ovvero } x + y = 1$$

Come grafico:

$$y = y(x) = 1 + (-\frac{2}{2})(x-0) + \dots$$

ovvero

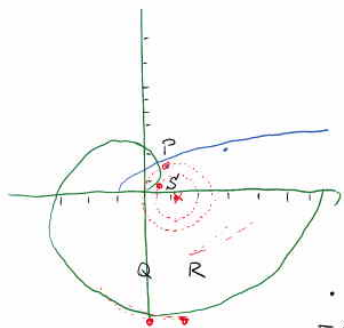
$$y = 1 - x + \dots$$



(19) Studiare gli estremi di $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$
 sul grafico $y = \sqrt{x+1}$ e sul tratto di spirale
 d'Archimede $\rho(\theta) = \theta$ con $0 < \theta < 2\pi$.

^ Qual è il significato geometrico dei risultati?

d'Archimede $g(\theta) = \theta$ con $0 < \theta < \pi$.
 Anche il significato geometrico dei risultati?



• Grafico $y = \sqrt{x+1}$ param. da $\gamma(x) = (x, \sqrt{x+1})$
 con $x \geq -1$.

$$F(x) := f(x, \sqrt{x+1}) = x^2 + (x+1) - 2x = x^2 - x + 1$$

$$F'(x) = 2x - 1 = 0 \text{ per } x = 1/2; \quad F''(x) > 0 \text{ per } x > 1/2$$

$x = 1/2$ è di minimo a.l. del perf $F(x)$

dunque $P(1/2, \sqrt{3}/2)$ è di minimo a.l. per f sul grafico.

• Spirale $g = \theta$ param. da $\gamma(\theta) = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta)$.

$$F(\theta) := f(\theta \cos \theta, \theta \sin \theta) = \theta^2 - 2\theta \cos \theta$$

$$F'(\theta) = 2\theta - 2\cos \theta + 2\theta \sin \theta = 2(\theta(1+\sin \theta) - \cos \theta)$$

Vali $F'(\theta) = 0$ quando $\theta = 3\pi/2$ oppure $\theta = \frac{\cos \theta}{1+\sin \theta}$ che per confronto

grafico si verifica per $\theta = \theta_0 \sim 0,5$ e $\theta = \theta_1 \sim 5,1$.

(Per $\theta = 3\pi/2$ si ha il punto Q, e per $\theta = \theta_0, \theta_1$ i punti S e R)

Vali poi $F'(\theta) > 0 \Leftrightarrow \theta > \frac{\cos \theta}{1+\sin \theta}$

	0	θ_0	$3\pi/2$	θ_1	2π
F'	-	+	-	+	-
F		↘	↗	↘	↗
		min	MAX	min	

Dunque Q è di max locale

mentre R, S son di min locale.

Le curve di livello di $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$ son le circonferenze di centro $(1,0)$, dunque i risultati evidenziano i punti di max/min distanze locali (globali?) delle curve da $(1,0)$.

(2s) Anche sono i punti del grafico $y = x^2 - 2(z-1)^2$
 più vicini all'origine?

Equivale a trovare i punti di minimo assoluto delle
 funzioni $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sul grafico $y = x^2 - 2(z-1)^2$.

$$F(x,z) := f(x, x^2 - 2(z-1)^2, z) = x^2 + (x^2 - 2(z-1)^2)^2 + z^2$$

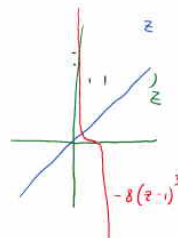
$$\nabla F = (2x + 2 \cdot 2x \cdot (\dots), 2z - 2 \cdot 4(z-1) \cdot (\dots)) =$$

$$= 2(x + 2x(\dots), z - 4(z-1)(\dots)) \quad \leftarrow \text{ove } (\dots) = (x^2 + 2(z-1)^2)$$

$$\text{Si ha } \nabla F = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 + 2(\dots)) = 0 \\ z - 4(z-1)(\dots) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow x=0 \Rightarrow z - 4(z-1)(-2(z-1)^2) = 0 \Rightarrow z = -8(z-1)^3 \Rightarrow z = z_0 \sim 0,6$$

$$\rightarrow (\dots) = -1/2 \Rightarrow z + 2(z-1) = 0 \Rightarrow z = 2/3 \Rightarrow x^2 - 2/9 = -1/2 \Rightarrow x^2 = -5/18 \text{ No!}$$



Trovo dunque un unico punto stazionario per f sul grafico,
 ovvero $P(0, -2(z_0-1)^2, z_0)$. Vediamone la natura.

$$H_F(x,z) = 2 \begin{pmatrix} 1 + 6x^2 - 4(z-1)^2 & -8x(z-1) \\ -8x(z-1) & 1 - 4x^2 + 24(z-1)^2 \end{pmatrix} \leadsto$$

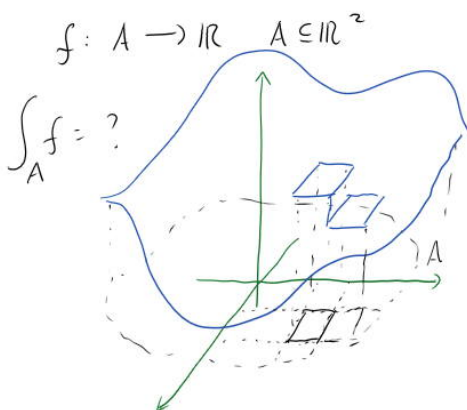
$\dots \sim 0,2$

$$H_F(x, z) = 2 \begin{pmatrix} -8x(z-1) & 1-4x^2+24(z-1)^2 \end{pmatrix} \leadsto$$

$$H_F(0, z_0) = \begin{pmatrix} 1-4(z_0-1)^2 & 0 \\ 0 & 1+24(z_0-1)^2 \end{pmatrix} \text{ def. positiva}$$

$\Rightarrow$ come punto, si tratta di un punto di minimo locale (in ogni caso, anche assoluto).

INTEGRAZIONE MULTIPLA



è possibile (anzi, si può e si fa!) costruire una teoria di integrali alle Riemann anche in più variabili, ripetendo le stesse considerazioni fatte per una variabile (somme inferiori e superiori, integrabilità di f grazie al due convergono a uno stesso valore...)

Fatto questo, potremmo dire che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è ELEMENTARMENTE MISURABILE (o MISURABILE ALLA PEANO-RIEMANN) quando la sua funzione caratteristica $\chi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è Riemann integrabile.
 (si intende che $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$)

Tuttavia questo integrale multidimensionale di Riemann avrebbe anche i "problemi" già mostrati in una variabile:

- le funzioni R-integrabili sono "relativamente poche":

quelle continue o tutti al più, con un numero "ragionevole" di irregolarità. Ad esempio: la funzione di Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ non è $\mathbb{R}$ -int.

- L'integrale di Riemann non è molto compatibile al limite nel senso seguente: se una successione f_n di funzioni integrabili converge abbastanza debolmente (ad es. puntualmente "quasi dovunque") a una funzione f , vorremmo che anch' f fosse integrabile e che $\int f = \lim_n \int f_n$. Ma questo non accade sempre.

Es) Sia $q: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap [0,1]$ una qualsiasi biiezione.

Definiamo $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = q_m \text{ con } m \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Chiaro che $\int_{\mathbb{R}} f_n$ esiste e vale 0 (allo Riemann: infatti f_n è nulla tranne che su un insieme finito di punti). D'altra parte $\lim f_n = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$, che non è $\mathbb{R}$ -integrabile.

- Ultimo problema: le costruzioni di Riemann non sono legate a $\mathbb{R}^n$, ovvero riguarda solo funzioni su domini in $\mathbb{R}^1$.

Per ovviare (in parte) a questi problemi si introduce una teoria dell'integrazione molto più flessibile, dovuta a HENRI LEBESGUE.

I problemi evidenziati sopra sono in buona parte, ad esempio:

- $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ diventa integrabile con integrale nullo.

Cio' significa che l'insieme di Dirichlet $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ diventa MISURABILE in questa nuova teoria (LEBESGUE-MISURABILE) con misura nulla.

Anzi: in questa nuova teoria, tutti gli insiemi finiti o addirittura NUMERABILI di $\mathbb{R}^n$ hanno L-MISURA nulla (ovvero, si dice, sono TRASCURABILI).

- L'integrale di Lebesgue funziona molto meglio al limite

(vedere le note); ad esempio le f_n viste prima sono
 puntuali (e in modo dominato...) e $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ è stabile
 e' vero che $\int f_n = 0 = \int \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$.

- Infine, l'integrale di Lebesgue e' una Teoria in cui
 $\mathbb{R}^n$ non conta per nulla: si puo' sviluppare per funzioni
 con dominio un qualsiasi insieme X dotato di una misura.

Parliamo di cose vuol dire una MISURA su un insieme X .

- Sia $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una collezione di sottoinsiemi di X che contenga
 lo stesso X e che sia stabile per complementari e unioni numerabili
 (da qui si dimostra che anche e' stabile anche per l'intersezione
 numerabili, per unioni e intersezione finite e anche per differenza).
 $\mathcal{M}$ e' detto σ -ALGEBRA di parti di X (le parti sono
 quelle della Topologia!).

- $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ e' una funzione non identicamente uguale a $+\infty$
 e che sia numericamente additiva, ovvero se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e' una
 famiglia di elementi di $\mathcal{M}$ a due a due disgiunti, vale che

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Una tale μ e' detta MISURA su X , e $\mathcal{M}$ le famiglie
 degli insiemi μ -MISURABILI su X .

Segue (tra le varie): $\mu(\emptyset)$

- $\mu(\emptyset) = 0$, perche' $\mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset)$,
 e perche' per ipotesi (ne per te un altro) $\mu(\emptyset) < +\infty$,
 cio' implica che $\mu(\emptyset) = 0$ (~~$\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) \Rightarrow \mu(\emptyset) = 0$~~).

- Isotonia: se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.
Infatti $B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

Ex. Sici X insieme qualunque.

- $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, $\mu \equiv 0$
- $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, $A \subseteq X$, $\mu(A) = \text{n.ro di elem. di } A$ (misura di conteggio)
($= +\infty$ se A è infinito)

- Misura concentrata in un punto di X .

Sici $x_0 \in X$. Sici $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$: se $A \subseteq X$, definiamo

$$\mu_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases}$$

Nel caso di $X = \mathbb{R}^n$ vorremmo costruire una misura:

- che misuri quanti più sottoinsiemi possibile di $\mathbb{R}^n$;
- sui pluri-intervalli $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$
vogliamo che tale misura valga il volume n -dim. del pluri-intervallo: $(b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$.
- Invarianza per isometrie: la misura di $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non dovrebbe cambiare se ad A si applica un'isometria di $\mathbb{R}^n$, ovvero $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ che conserva le distanze (es: traslazioni per un vettore fisso; più in generale, una trasformazione ortogonale seguita da una traslazione più un'eventuale traslazione)

Si viene in effetti a costruire una misura su $\mathbb{R}^n$ detta misura di Lebesgue λ_n che soddisfa a tutte queste proprietà. Le σ -algebra $\mathcal{M}_n$ su cui è definita:

$$\lambda_n: \mathcal{M}_n \rightarrow [0, +\infty]$$

è detta σ -algebra degli insiemi misurabili (alle Lebesgue) su $\mathbb{R}^n$.

una famiglia vastissima di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, che contiene ad esempio tutti gli aperti e i chiusi euclidei di $\mathbb{R}^n$.

Tanto vale al posto che salvare un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ non

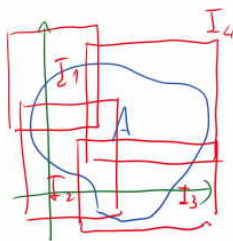
misurabile e' impresa estenuante ardua (vedi INSIEME DI VITALI sulla dispende).

Come in continuo, in poche parole, la misura di Lebesgue λ_n su $\mathbb{R}^n$?
Si inizia costruendo una MISURA ESTERNA λ_n^* per ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.
Il primo passo e' definire λ_n^* d'addirittura per i pluriintervalli: (magari anche degeneri)

$$\lambda_n^*([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n) \quad (\text{come auspicato})$$

Poi, dato un qualsiasi sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$, definire

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_n^*(I_k) : (I_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ famiglia numerabile di pluriintervalli di } \mathbb{R}^n \text{ la cui unione contiene } A \right\}$$



(le eventuali sovrapposizioni non preoccupano, tanto poi prende l'inf!)

Quindi prima tentativo di misure addittive gran parte delle richieste a priori (ad es.: $\lambda_n^*(\emptyset) = 0$ perché $\emptyset$ e' coperto da un pluriintervallo degeneri!)
ma purtroppo manca anche in generalita' l'addittivita' numerabile, per fare solo per la subaddittivita':

$$\text{se } (A_n) \in \mathcal{B}(X) \text{ a due a due disgiunti, } \lambda_n^*(\bigcup A_n) \leq \sum \lambda_n^*(A_n).$$

Allora quello che si fa e' restringere λ_n^* ai soli sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che garantiscono l'addittivita'.

$$\mathcal{M}_n = \{ A \subseteq \mathbb{R}^n : \lambda_n^*(E) = \lambda_n^*(E \cap A) + \lambda_n^*(E \setminus A) \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^n \}$$

Tenere (CARATTERIZZAZIONE) $\mathcal{M}_n$ e' una σ -algebra (detta dei misurabili alla Lebesgue di $\mathbb{R}^n$) contenente tutti i pluriintervalli, tutti i sottoinsiemi di misura esterna nulla (tra cui quelli finiti o numerabili) e in generale tutti gli aperti e i chiusi euclidei.

In effetti, come detto, trovare sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ non misurabili e' impresa assai ardua (vedi l'insieme di Vitali in $\mathbb{R}$).

In effetti, come detto, trovare sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ non misurabili è
impossibile anzi ancora (vedi l'insieme di Vitali in $\mathbb{R}$).

INSIEME DI VITALI $V \subseteq I =]0,1[$

In I : $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ è relazione d'equivalenza

V : insieme formato scegliendo un elemento per ogni classe d'equivalenza
(si usa l'assioma della scelta)

ovvero: $\begin{cases} V \text{ è fatto da elementi di } I \text{ a distanza irrazionale} \\ \forall x \in I \quad \exists! y \in V: x - y \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Se V fosse misurabile $\Rightarrow \lambda(V) = 0$ o $\lambda(V) > 0$.
Se $\lambda(V) > 0$, $\forall a \in \mathbb{R}, \lambda_1(x+V) = \lambda_1(V)$

Sia $q: \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q} \cap]-1,1[$ biiezione, e sia $W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (q_n + V)$

(a) W è unione numerabile di insiemi disgiunti

$(q_h + V) \cap (q_k + V) = \emptyset \Leftrightarrow q_h + v' = q_k + v'' \Leftrightarrow q_h - q_k = v'' - v'$
Assurdo: $\mathbb{Q} \cap]-1,1[$

(b) W è misurabile (unione numerabile di misurabili)

(c) $[0,1] \subset W \subset]-1,2[$
• $\forall x \in I \quad \exists! y \in V$ (c. $x - y \in \mathbb{Q}$: si m.t.c. $x - y = q_n$
altr. $x = q_n + y \in q_n + V$)
• W è fatto di somme $s+t$ con $s \in]-1,1[$ e $t \in [0,1]$
 $\Rightarrow W \subseteq]-1,2[$

Dunque:

$$(a)+(b) \Rightarrow \lambda_1(W) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_1(q_n + V) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_1(V)$$

Se fosse $\lambda_1(V) = 0 \Rightarrow \lambda_1(W) = 0$ ASSURDO: $[0,1] \subset W$, dunque $\lambda_1(W) \geq 1$
(PER ISOTONIA)

Se fosse $\lambda_1(V) > 0 \Rightarrow \lambda_1(W) = +\infty$ ASSURDO: $W \subseteq]-1,2[$ dunque $\lambda_1(W) \leq 3$

Perfatto $\lambda_1(V)$ NON PUÒ ESISTERE! V NON È MISURABILE.

Tra gli insiemi misurabili vi ha quelli di misura nulla, detti
insiemi trascurabili di $\mathbb{R}^n$.

Una proprietà $P(x)$ dei punti x di un $E \subseteq \mathbb{R}^m$ che è vera su tutti
gli $x \in E$ tranne un insieme trascurabile si dice che vale QUASI OVUNQUE in E .

[Ex.] la funzione di Dirichlet è nulla q.o. (ma non continua q.o.,
visto che l'insieme su cui è discontinua è $[0,1]$ che ha misura 1.

Prop. (a) un'unione numerabile di insiemi trascurabili è trascurabile.
(in particolare, visto che un singolo punt. è trascurabile, lo sono
anch tutti gli insiemi finiti o numerabili di $\mathbb{R}^n$).

(b) Un sottoinsieme di un trascurabile è trascurabile.

(c) Le sottoinsiemi propri di $\mathbb{R}^n$ (di dim $\leq n-1$) sono trascurabili in $\mathbb{R}^n$.

Perché tutti i finiti e i numerabili di $\mathbb{R}^n$ sono trascurabili.

E il viceversa? Se $n \geq 2$ sureste no (ex: una curva in $\mathbb{R}^2$).

Ma se $n=1$? Nemmeno (INSIEME DI CANTOR, vedi di sopra).

INSIEME DI CANTOR $C \subseteq [0, 1]$

$$C_0 = \begin{array}{|c|} \hline 0 \text{-----} 1 \\ \hline \end{array}$$

$$C_1 = \begin{array}{|c|} \hline 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

$$C_2 = \begin{array}{|c|} \hline 0 \quad \frac{1}{9} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{7}{9} \quad \frac{8}{9} \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

e così via. Si pone per $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$

• C è misurabile (intersezione numerabile di misurabili)

• C è trascurabile (C_n ricopre C , fatto di 2^n intervalli lunghi $1/3^n$,
dunque $\lambda_1(C_n) = (2/3)^n \Rightarrow \lambda_1(C) \leq (2/3)^n \forall n$
 $\Rightarrow \lambda_1(C) = 0$.)

• C ha la cardinalità del continuo, (è equivalente a $[0, 1]$).

Espressione in base 3 dei numeri in $[0, 1]$: $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{3^n}$ con $a_n \in \{0, 1, 2\}$,
che scriviamo anche $0, a_1 a_2 a_3 \dots (3)$.

C_1 : si levano $0, 1 *** \dots (3)$ ove $*** \dots$ sono in $\{0, 1, 2\}$ ma non $222 \dots$

C_2 : si levano $0, 01 *** \dots (3)$ e $0, 21 *** \dots (3)$ etc.

Dunque i numeri di C sono quelli del tipo $0, a_1 a_2 a_3 \dots (3)$ con $a_j \in \{0, 2\}$

$$\Rightarrow C \simeq \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \simeq \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \underset{\text{BINARIO}}{\simeq} [0, 1]$$