Università degli Studi di Padova

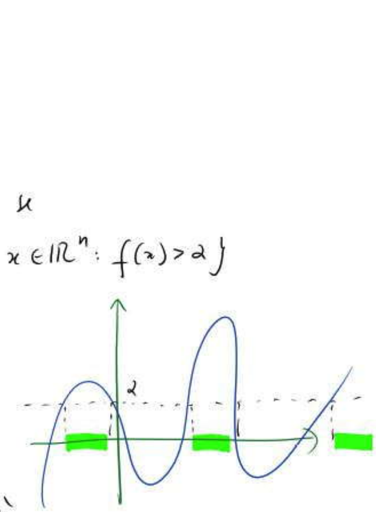
ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 18/10/2024

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ è detta MISURABILE se tutti gli insiemi "di sopralivello" $f^{-1}(]a,+\infty[) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\}$ sono misurabili $\forall a$.

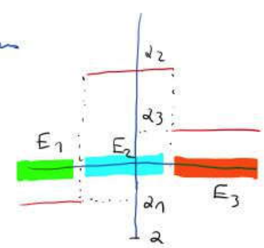


Come si può sospettare, la classe delle funzioni misurabili è vastissima: praticamente ogni funzione con cui si ha normalmente a che fare lo è.
E somme, prodotti, ... di funzioni misurabili sono misurabili (vedi note).

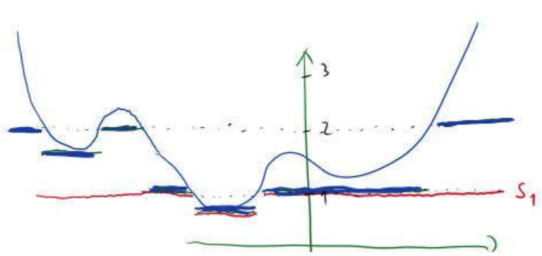
Anche la definizione potrebbe essere tranquillamente modificata con $\geq, \leq, = \ldots$ al posto del $>$.

A questo punto possiamo iniziare a definire l'integrale di Lebesgue.
Una funzione $s : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ è detta SEMPLICE se assume solo un numero finito di valori. Ad esempio: se $E \subseteq \mathbb{R}^n$, χ_E è semplice.
Più in generale, una funzione semplice si scrive come $s = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{E_j}$.

Prop. (a) Una funzione semplice $s = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{E_j}$ in cui gli a_j siano a due a due distinti e gli E_j a due a due disgiunti è misurabile $\iff$ tutti gli E_j sono misurabili.



(b) Per ogni funzione $f : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ esiste una successione di funzioni semplici $s_m : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ che converge puntualmente a f. Se f è misurabile, si possono scegliere le s_m misurabili; se $f \geq 0$ la successione s_m si può scegliere monotona crescente.



Ecco l'idea per il caso $f \geq 0$ (vedi la dim. sulle dispense)

Data una funzione misurabile $f: \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$, l'INTEGRALE DI LEBESGUE di f su un insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è definito come segue:

- Sia $f = s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}$ semplice in cui tutti gli E_j siano misurabili e che sia positiva (ovvero tutti gli $\alpha_j \geq 0$), si pone

$$\int_E s(x)\, d\lambda_n := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \lambda_n(E_j \cap E)$$

(nelle somme si intende che $0 \cdot (+\infty) = 0$, e il risultato può essere $+\infty$).

- Sia $f: \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ misurabile e positiva:

$$\int_E f(x)\, d\lambda_n := \sup \left\{ \int_E s(x)\, d\lambda_n : s \text{ semplice misurabile}; \ 0 \leq s \leq f \right\}.$$

- In generale, se $f: \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ è una qualunque funzione misurabile, e almeno uno dei due integrali $\int_E f^+(x)\, d\lambda_n$ e $\int_E f^-(x)\, d\lambda_n$ è finito:

$$\int_E f(x)\, d\lambda_n := \int_E f^+(x)\, d\lambda_n - \int_E f^-(x)\, d\lambda_n \quad (\text{può essere } +\infty \text{ o } -\infty)$$

$f = f^+ - f^-$
$|f| = f^+ + f^-$

In particolare, si dice che f è INTEGRABILE (alla Lebesgue) su E se entrambi $\int_E f^+(x)\, d\lambda_n$ e $\int_E f^-(x)\, d\lambda_n$ esistono finiti (si scrive $f \in L^1(E)$)

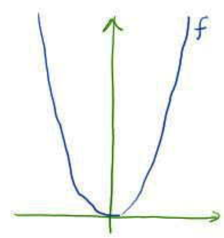
$$\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases}$$

Ex. • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$f^+ = f$, $\int_{\mathbb{R}} f^+ = +\infty$; $f^- = 0$, $\int_{\mathbb{R}} f^- = 0$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f^+ - \int_{\mathbb{R}} f^- = +\infty - 0 = +\infty$ ha senso,

ma comunque $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

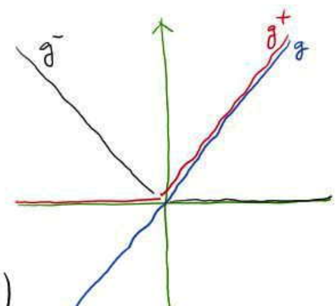


• $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$

$\int_{\mathbb{R}} g^+ = \int_{\mathbb{R}} g^- = +\infty \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} g$ non ha senso.

$\int_{[-\infty, 2]} g^+ = 2$, $\int_{[-\infty, 2]} g^- = +\infty \Rightarrow \int_{[-\infty,2]} g = 2 - (+\infty) = -\infty$

$\int_{[-1,2]} g^+ = 2$, $\int_{[-1,2]} g^- = 1/2 \Rightarrow \int_{[-1,2]} g = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\quad (g \in L^1([-1,2]))$



L'integrale di Lebesgue gode di tutte le proprietà che uno si aspetta (numerabile additività nel dominio, linearità ...).
In particolare evidenziamo le seguenti utili e importanti proprietà:

- f può essere <u>modificata su un insieme trascurabile del dominio</u> senza che l'integrabilità (e il valore dell'integrale) vengano toccati.
- $f \in L^1(E) \iff |f| \in L^1(E)$, e vale $\left| \int_E f(x)\, d\lambda_n \right| \leq \int_E |f(x)|\, d\lambda_n$
- Una funzione misurabile e limitata <u>q.o.</u> (es.: continua su compatti) è integrabile su ogni insieme E di misura finita
- Vale $\int_E |f(x)|\, d\lambda_n = 0 \iff f$ è nulla q.o. su E

Infine segnaliamo i <u>rapporti con l'integrale di Riemann</u> (che in generale soddisfa a teoremi simili a quelli di Lebesgue ma con ipotesi ben più onerose):

Prop. (a) (Integrale su insiemi compatti)
Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto elementarmente misurabile (es: pluriintervalli compatti) e sia $f: K \to \mathbb{R}$. Se f è Riemann-integrabile allora è anche Lebesgue-integrabile (cioè $f \in L^1(K)$), e i valori coincidono.
Viceversa:
Se f è misurabile e limitata (dunque in part. Lebesgue-integrabile) allora f è Riemann-integrabile $\iff$ è continua q.o. in K.

(b) (Integrale di Riemann generalizzato e integrale di Lebesgue).
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ localmente Riemann-integrabile.
Allora f è L-int. su I $\iff$ f è <u>assolutamente</u> R-int. in s.g. su I
(e in tal caso gli integrali coincidono)

(dunque in particolare $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è Riemann-integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$ ma non Lebesgue-integrabile)

(C) (Teorema Fond. del Calcolo)

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è L-int, posto $F(x)=\int_a^x f(t)\,d\lambda_1$

vale $F'=f$ q.o.

Viceversa, sia $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile in ogni punto di $[a,b]$, e si ponga $f:=F'$. Se f è L-int. su $[a,b]$, allora

$$\int_a^x f(t)\,d\lambda_1 = F(x)-F(a).$$

Il prossimo passo sarà di presentare i risultati più utili per il calcolo degli integrali multipli (Fubini, Tonelli, cambio di variabili, ...), per poter iniziare a calcolare vari integrali.

Elenchiamo ora i risultati più importanti per il calcolo effettivo degli integrali multipli, dopo di che potremo iniziare a fare i conti.

In $\mathbb{R}^n$ consideriamo $\underline{x}=(x_1,\dots\dots,x_n)=(\overbrace{x_1,\dots,x_{n'}}^{\underline{x}'\in\mathbb{R}^{n'}},\overbrace{x_{n'+1},\dots,x_n}^{\underline{x}''\in\mathbb{R}^{n''}})$

ove ovviamente $n=n'+n''$.

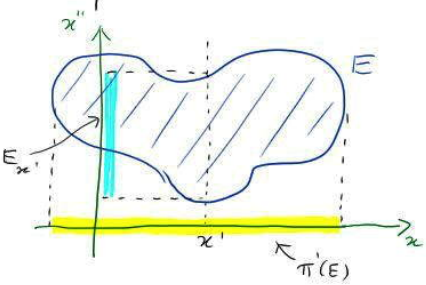
Proiezioni $\pi':\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n'}$, $\pi'(\underline{x})=\underline{x}'$; $\pi'':\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n''}$, $\pi''(\underline{x})=\underline{x}''$

Dato $E\subseteq\mathbb{R}^n$, e data $f:E\to\mathbb{R}$, per un certo $\underline{x}'\in\mathbb{R}^{n'}$ poniamo

$E_{\underline{x}'}=\{\underline{x}''\in\mathbb{R}^{n''}:(\underline{x}',\underline{x}'')\in E\}\subseteq\mathbb{R}^{n''}$ x'-sezione di E

$f_{\underline{x}'}:E_{\underline{x}'}\to\mathbb{R}$, $f_{\underline{x}'}(\underline{x}'')=f(\underline{x}',\underline{x}'')$ x'-sezione di f

(Definizioni analoghe valgono a ruoli invertiti)



Teorema (Fubini). Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, e sia f integrabile su E ($f \in L^1(E)$)

Allora: $f_{\underline{x}'}$ è integrabile su $E_{\underline{x}'}$ per quasi ogni $x' \in \pi'(E)$;
(definita per q.o. $\underline{x}' \in \pi'(E)$)
inoltre, la funzione $\underline{x}' \longmapsto \int_{E_{\underline{x}'}} f(x', x'')\, d\lambda_{n''}(\underline{x}'')$ è integrabile su $\pi'(E)$.

e vale
$$\boxed{\int_E f\, d\lambda_n = \int_{\pi'(E)} \left(\int_{E_{x'}} f(\underline{x}', \underline{x}'')\, d\lambda_{n''}(x'') \right) d\lambda_{n'}(x')}$$

Il Teorema di Fubini dice che, in ipotesi di integrabilità, l'integrale in $\mathbb{R}^n$ si può decomporre a piacere come "integrale iterato" ($\underline{\text{II}}^\circ$ membro).

NOTAZIONE: $d\lambda_n =: dx = dx_1 \cdots dx_n =: dx'\, dx''$ ⟵ IDEA: la misura in $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''}$ è il prodotto delle misure in $\mathbb{R}^{n'}$ e $\mathbb{R}^{n''}$

$$\int_{\pi'(E)} \left(\int_{E_{x'}} f(\underline{x}', \underline{x}'')\, dx'' \right) dx' =: \int_{\pi'(E)} dx' \int_{E_{x'}} f(x', x'')\, dx''$$ ⟵ si integra a partire da DESTRA: prima rispetto x'', poi x'.

Si noti che nell'ipotesi di Fubini è incluso già che f sia integrabile su E:
ad esempio, si è visto che ciò accade se E ha misura finita e f è misurabile e limitata q.o. (es.: se E è misurabile limitato, ad es. compatto, e se f è continua su E), il che spesso è verificato nelle applicazioni (tipo: calcolo di volumi, baricentri...)

Tuttavia in vari casi di rilievo in cui ad esempio f è illimitata su E oppure E non è limitato, ci servirebbe un criterio che ci dia una condizione sufficiente affinché f sia integrabile su E:

Teorema (TONELLI) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e $f: E \to \mathbb{R}$ misurabile.

Se un qualsiasi integrale iterato del modulo di f:
$$\int_{\pi'(E)} \left(\int_{E_{x'}} |f(x', x'')|\, d\lambda_{n''}(x'') \right) d\lambda_{n'}(x') \quad \text{esiste \underline{finito}},$$
allora f è integrabile su E

(e per il conto di $\int_E f\, d\lambda_n$ si può applicare Fubini)