UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di martedì 22/10/2024

Possiamo sfruttare il terzo risultato utile, quello del CAMBIO DI VARIABILI: se altero E con un diffeomorfismo, come viene alterato l'integrale?

Teo. (CAMBIO DI VARIABILI) Sia $\phi : \overset{t}{B} \to \overset{x}{A}$ un diffeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^n$. e sia $E \subseteq A$ misurabile. Data $f : A \to \mathbb{R}$, si ha che

$$f \in L^1(E) \iff (f \circ \phi)|\det J_\phi| \in L^1(\phi^{-1}(E))$$

e vale

$$\boxed{\int_E f(x)\, d\lambda_n(x) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\phi(t))\, |\det J_\phi(t)|\, d\lambda_n(t)}$$

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(c)}^{\phi^{-1}(d)} f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt$$

- Notiamo che in una variabile la formula funziona.

Sia $\phi : [a,b] \to [c,d]$ diffeomorfismo. ① $\phi' > 0$, $\phi(a) = c$, $\phi(b) = d$; ② $\phi' < 0$, $\phi(a) = d$, $\phi(b) = c$.

Allora

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_{[c,d]} f(x)\,dx \overset{①}{=} \int_{[a,b]} f(\phi(t))\cdot(+\phi'(t))\,dt = \int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = \int_{\phi^{-1}(c)}^{\phi^{-1}(d)} f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt$$

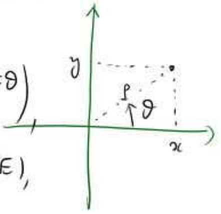
$$\int_{[c,d]} f(x)\,dx \overset{②}{=} \int_{[a,b]} f(\phi(t))(-\phi'(t))\,dt = -\int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = \int_b^a f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt \quad //$$

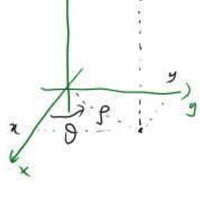
ok!

- Vediamo ora i cambi di variabile più frequenti negli esercizi.

- COORDINATE POLARI IN $\mathbb{R}^2$. Siano $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \le 0\}$, e $B =]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ (con coord. (ρ,θ)), e si pone $(x,y) = \phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Vale $J_\phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$, dunque $|\det J_\phi| = \rho$: dunque se $E \subseteq A$ e $f(x,y) \in L^1(E)$, vale

$$\int_E f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, \rho \, d\lambda_2(\rho,\theta)$$



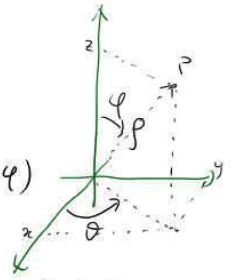


- COORDINATE CILINDRICHE IN $\mathbb{R}^3$.

$A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) : x \le 0\}$, $B =]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\times \mathbb{R}$ con coord. (ρ,θ,z); $\phi(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$.

$J_\phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dunque $|\det J_\phi| = \rho$.

- COORDINATE SFERICHE IN $\mathbb{R}^3$.



$A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) : x \leq 0\}$, $B =]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\times]0,\pi[$

con coord. (ρ,θ,φ); $\phi(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)$

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad |\det J_\phi| = \rho^2\sin\varphi$$

- TRASFORMAZIONI AFFINI IN $\mathbb{R}^3$: in coordinate, sono le $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ del tipo $\phi(\underline{t}) = A\underline{t} + \underline{b}$ ove $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$.

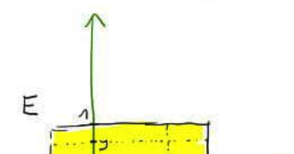
In questo caso vale $J_\phi = A$, pertanto $|\det J_\phi| = |\det A|$.

Ad esempio:

- ISOMETRIE : quelle con A ortogonale, ovvero $A^t = A^{-1}$, per cui $\det A = \pm 1$: ne segue $|\det J_\phi| = 1$ (volumi preservati!)
- OMOTETIE : quella di rapporto $\mu > 0$ dilata le lunghezze di un fattore μ, pertanto $A = \mu \cdot \mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} \mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \mu \end{pmatrix}$ e $\underline{b} = \underline{0}$ dunque $|\det J_\phi| = \mu^n$ (se le distanze vengono dilatate di un fattore μ, i volumi n-dim. sono dilatati di μ^n).

Passiamo ora ad alcuni esercizi

Ex. Dire perché $f(x,y) = 3x^2y - 1$ è integrabile su $E = [-1,2] \times [0,1]$, e calcolare $\int_E f(x,y)\,dx\,dy$.



$f \in L^1(E)$ perché E compatto (misura finita) e f continua (misurabile e limitata q.o.)

Per il conto, usando Fubini, due possibilità,

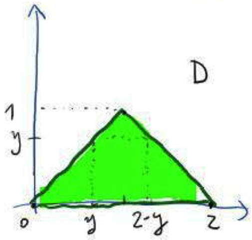
(1) Per x-sezioni $\int_E (3x^2y-1)\,dx\,dy = \int_{-1}^{2} dx \int_0^1 (3x^2y-1)\,dy$

$= \int_{-1}^{2} dx \left[\frac{3x^2y^2}{2} - y\right]_{y=0}^{y=1} = \int_{-1}^{2} \left(\left(\frac{3x^2}{2}-1\right) - (0)\right) dx = \int_{-1}^{2} \left(\frac{3x^2}{2}-1\right) dx = 3/2$

(2) Per y-sezioni $\int_E (3x^2y-1)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{-1}^{2} (3x^2y-1)\,dx = \int_0^1 dy \left[x^3y - x\right]_{x=-1}^{x=2}$

$= \int_0^1 \left((8y-2) - (1-y)\right) dy = \int_0^1 (9y-3)\,dy = 3\left(\frac{3y^2}{2} - y\right]_{y=0}^{y=1} = 3\left(3/2 - 1\right) = 3/2$

Ex. Calcolare $\int_D f(x,y)\,dx\,dy$, ove D è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$

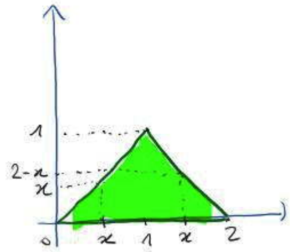


Il metodo più conveniente risulta per y-sezioni...

$$\int_D (3x^2y-1)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (3x^2y-1)\,dx = \int_0^1 dy \left[x^3y - x\right]_{x=y}^{x=2-y}$$

$$= \int_0^1 \left(\left(y(2-y)^3 - (2-y)\right) - \left(y^4 - y\right)\right) dy = \dots = \frac{1}{10}$$

Con x-sezioni:



$$\int_D (3x^2y-1)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x (3x^2y-1)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (3x^2y-1)\,dy$$

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{3x^2y^2}{2} - y\right]_{y=0}^{y=x} + \int_1^2 dx \left[\frac{3x^2y^2}{2} - y\right]_{y=0}^{y=2-x}$$

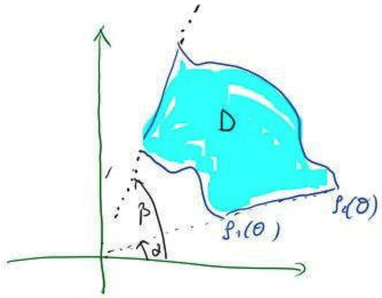
$$= \int_0^1 \left(\frac{3x^4}{2} - x\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{3x^2(2-x)^2}{2} - (2-x)\right) dx = \dots = \frac{1}{10}$$

In generale, poniamo ora di voler calcolare

l'AREA DI UN SETTORE DI PIANO D

DELIMITATO DA DUE CURVE POLARI

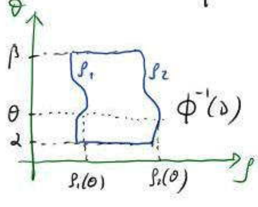
$\rho_1(\theta) \leq \rho_2(\theta)$ con $\alpha \leq \theta \leq \beta$



$$\text{Area}(D) = \int_D 1\,dx\,dy = \int_{\Phi^{-1}(D)} \rho\,d\rho\,d\theta$$

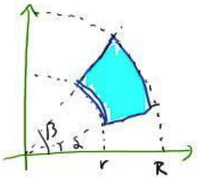
$$\Phi^{-1}(D) = \left\{(\rho,\theta) : \begin{array}{l}\rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta), \\ \alpha \leq \theta \leq \beta\end{array}\right\}$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho\,d\rho = \int_\alpha^\beta \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=\rho_1(\theta)}^{\rho=\rho_2(\theta)} d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(\rho_2^2 - \rho_1^2\right) d\theta$$



dunque
$$\boxed{\text{Area}(D) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(\rho_2(\theta)^2 - \rho_1(\theta)^2\right) d\theta}$$

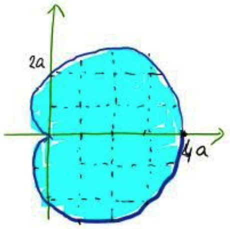
Ex. Area di un settore circolare.



$\rho_1(\theta) \equiv r \ , \ \rho_2(\theta) \equiv R$ Area $= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (R^2-r^2)\,d\theta = \frac{R^2-r^2}{2}(\beta-\alpha)$

Ex. $\alpha=0, \beta=2\pi, r=0 \Rightarrow$ Area $= \frac{R^2-0^2}{2}\cdot(2\pi-0) = R^2\pi$

Ex. Area della cardioide $\rho(\theta) = 2a(1+\cos\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $a>0$.



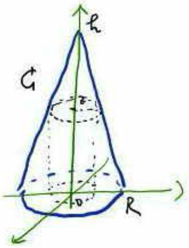
$\alpha=0, \ \beta=2\pi, \ \rho_1 \equiv 0, \ \rho_2(\theta) = 2a(1+\cos\theta)$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta = 2a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{2\pi}(1+\cancel{2\cos\theta}+\cos^2\theta)\,d\theta = 2a^2\left(\theta+\frac{\theta+\sin\theta\cos\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

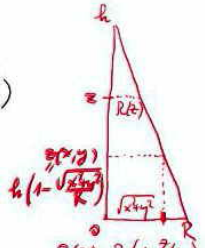
$$= 2a^2\left(\left(2\pi+\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}\right)-(0)\right) = 6\pi a^2$$

Ex. Volume del cono.



$$\text{Volume} = \int_C 1\,dx\,dy\,dz \quad \overset{\text{z-fette}}{①} \quad \int_0^h dz \int_{\bigcirc R(z)} 1\,dx\,dy$$

$$\overset{(x,y)\text{-fili}}{②} \quad \int_{\bigcirc R} dx\,dy \int_0^{h\left(1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)} 1\,dz$$



$R(z) = R(1-z/h)$

① $$\int_0^h dz \overbrace{\int_{\bigcirc R(z)} 1\,dx\,dy}^{\text{AREA}} = \int_0^h R^2\left(1-z/h\right)^2\pi\,dz$$

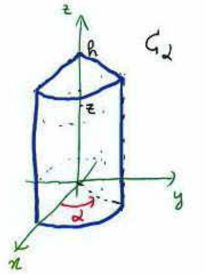
$$= R^2\pi\int_0^h \left(1-z/h\right)^2 dz = R^2\pi\left(\frac{\left(1-z/h\right)^3}{3\left(-1/h\right)}\right]_{z=0}^{z=h} = -\frac{R^2h\pi}{3}\Big((0)-(1)\Big) = \frac{R^2\pi h}{3}$$

② $$\int_{\bigcirc R} dx\,dy \int_0^{h\left(1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)} 1\,dz = \int_{\bigcirc R} dx\,dy\,\left(z\right]_0^{h\left(1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)} = \int_{\bigcirc R} h\left(1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right) dx\,dy$$

polari
$$= h\int_{[0,R]\times[-\pi,\pi]} \left(1-\rho/R\right)\rho\,d\rho\,d\theta = h\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^R \left(1-\rho/R\right)\rho\,d\rho =$$

$$h\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\,\left(\rho^2/2 - \frac{\rho^3}{3R}\right]_0^R = h\int_{-\pi}^{\pi}\left(R^2/6 - 0\right)d\theta = h\cdot\frac{R^2}{6}\cdot\left(\pi-(-\pi)\right) = \frac{R^2\pi h}{3}.$$

(21) Calcolare in più modi i volumi di sfera e cilindro.

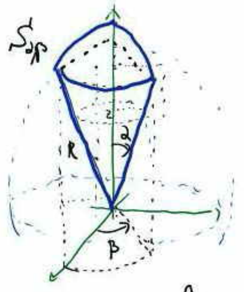
- 

$$\text{Vol}(C_\alpha) = \int_{C_\alpha} 1\,dx\,dy\,dz \overset{\text{cil.}}{\downarrow}= \int_{[0,R]\times[0,\alpha]\times[0,h]} \rho\,d\rho\,d\theta\,dz = \int_0^\alpha d\theta \int_0^h dz \int_0^R \rho\,d\rho = \int_0^\alpha d\theta \int_0^h \left(\rho^2/2\right]_0^R dz$$

$$R^2/2 \int_0^\alpha d\theta \int_0^h 1\,dz = R^2/2 \int \left(z\right]_0^h d\theta = \frac{R^2h}{2}\int_0^\alpha d\theta = \frac{R^2h\alpha}{2}$$

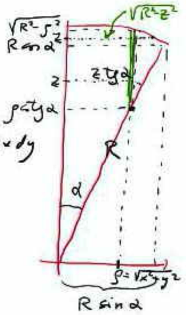
CILINDRO $(\alpha=2\pi)$ DA $R^2\pi h$

Sezioni per z-fette:
$$\text{Vol}(C_\alpha) = \int_0^h dz \overbrace{\int_{\measuredangle_R} dx\,dy}^{\text{Area}(C_\alpha)_z} = \int_0^h \frac{R^2\alpha}{2}\,dz = \frac{R^2\alpha}{2}\int_0^h dz = \frac{R^2h\alpha}{2}.$$

- 

$$\text{Vol}(S_{\alpha\beta}) = \int_{S_{\alpha\beta}} 1\,dx\,dy\,dz$$

① (per (x,y)-fili)
$$\text{Vol}(S_{\alpha\beta}) = \int_{\underset{R\sin\alpha}{\measuredangle\beta}} dx\,dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}\,\text{ctg}\,\alpha}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1\,dz = \int_{\underset{R\sin\alpha}{\measuredangle\beta}} \left(\sqrt{R^2-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\,\text{ctg}\,\alpha\right) dx\,dy$$



polari
$$= \int_0^\beta d\theta \int_0^{R\sin\alpha} \left(\sqrt{R^2-\rho^2} - \rho\,\text{ctg}\,\alpha\right)\rho\,d\rho =$$

$$= \int_0^\beta d\theta \int_0^{R\sin\alpha} \left(\rho\left(R^2-\rho^2\right)^{1/2} - \rho^2\,\text{ctg}\,\alpha\right)d\rho .$$

$$= \int_0^\beta d\theta \left(-\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{3/2} - \frac{\rho^3}{3}\operatorname{ctg}\alpha\right]_0^{R\sin\alpha} = -\frac{1}{3}\int_0^\beta d\theta \left(\left(R^3\cos^3\alpha + R^3\sin^3\alpha\operatorname{ctg}\alpha\right) - (R^3)\right)$$

$$= \frac{R^3}{3}\underbrace{(1-\cos^3\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha)}_{1-\cos\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}\int_0^\beta d\theta = \frac{R^3}{3}(1-\cos\alpha)\int_0^\beta d\theta = \frac{(1-\cos\alpha)\beta}{3}R^3$$

(per $\alpha = \pi$, $\beta = 2\pi$: SFERA $\frac{4\pi R^3}{3}$)

② z-FETTE $\quad \mathrm{Vol}(S_{\alpha\beta}) = \int_0^R \mathrm{Area}((S_{\alpha\beta})_z)\,dz = \int_0^{R\cos\alpha}(z\operatorname{tg}\alpha)^2\frac{\beta}{2}dz + \int_{R\cos\alpha}^R (R^2-z^2)\frac{\beta}{2}dz$

$$= \frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\alpha\int_0^{R\cos\alpha} z^2dz + \frac{\beta}{2}\int_{R\cos\alpha}^R (R^2-z^2)dz = \frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\alpha\left(z^3/3\right]_0^{R\cos\alpha} + \frac{\beta}{2}\left(R^2z - z^3/3\right]_{R\cos\alpha}^R$$

$$\ldots = \frac{(1-\cos\alpha)\beta}{3}R^3$$

③ COORD. SFERICHE (ρ,θ,φ). In queste coordinate $S_{\alpha\beta}$ diventa un parallelepipedo $[0,R]\times[0,\beta]\times[0,\alpha]$.

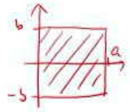
$$\mathrm{Vol}(S_\alpha) = \int_{S_{\alpha\beta}} 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^\beta d\theta\int_0^\alpha d\varphi\int_0^R \rho^2\sin\varphi\,d\rho =$$

$$= \int_0^\beta d\theta\int_0^\alpha \sin\varphi\,d\varphi\int_0^R\rho^2d\rho = \int_0^\beta d\theta\int_0^\alpha\sin\varphi\,d\varphi\left[\rho^3/3\right]_0^R$$

$$= R^3/3\int_0^\beta d\theta\left(-\cos\varphi\right]_0^\alpha = \frac{R^3}{3}(1-\cos\alpha)\left(\theta\right]_0^\beta = \frac{(1-\cos\alpha)\beta}{3}R^3.$$

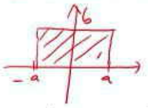
Mettiamo a fuoco due situazioni standard. Sia $f(x,y) = x^2y$.

- Calcoliamo $\int_{[0,a]\times[-b,b]} x^2y\,dx\,dy = 0$



VALE $f(x,-y) = -f(x,y)$
DUNQUE GLI INTEGRALI SOPRA E SOTTO
SI ELIDONO A VICENDA!

- Calcoliamo $\int_{[-a,a]\times[0,b]} x^2y\,dx\,dy = 2\int_{[0,a]\times[0,b]} x^2y\,dx\,dy$



VALE $f(-x,y) = f(x,y)$
DUNQUE L'INTEGRALE A SX
È UGUALE A QUELLO DI DX!

- Calcoliamo $\int_{[0,a]\times[0,b]} x^2y\,dx\,dy = \int_0^b dy\int_0^a x^2y\,dx = \int_0^b y\,dy\cdot\int_0^a x^2dx = \left(y^2/2\right]_0^b\cdot\left[x^3/3\right]_0^a$

$$= \frac{a^3b}{6}$$

INTEGRAZIONE A VARIABILI SEPARATE, QUANDO
$f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$ E IL DOMINIO È DI TIPO RETTANGOLARE

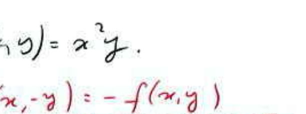
Ecco gli enunciati generali.

SIMMETRIE

Sia T un'isometria di $\mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ della forma (a meno di insiemi trascurabili) $E = E^+ \sqcup E^-$ ove E^+ e E^- sono misurabili tali che $T(E^\pm) = E^\mp$.

Data $f \in L^1(E)$, se $f\circ T = f \Rightarrow \int_E f\,d\lambda_n = 2\int_{E^+} f\,d\lambda_n$;

se invece $f\circ T = -f \Rightarrow \int_E f\,d\lambda_n = 0$.



Dim. Usando il cambio di variabili dato da T si ha che $\int_{E^-} f \, d\lambda_n = \pm \int_{E^+} f \, d\lambda_n$ a seconda dei casi: essendo $\int_E f \, d\lambda_n = \int_{E^+} f \, d\lambda_n + \int_{E^-} f \, d\lambda_n$ si conclude. //

INTEGRAZIONE DI PRODOTTI A VARIABILI SEPARATE

Siano $E' \subseteq \mathbb{R}^{n'}$ e $E'' \subseteq \mathbb{R}^{n''}$ misurabili, e si abbiano funzioni misurabili $g : E' \to \mathbb{R}$, $h : E'' \to \mathbb{R}$. Allora la funzione $f : E' \times E'' \to \mathbb{R}$ data da $f(x', x'') = g(x') h(x'')$ è integrabile su $E' \times E''$ $\iff$ g lo è su E' e h su E'', e vale

$$\boxed{\int_{E' \times E''} g(x') h(x'') \, d\lambda_n = \int_{E'} g(x') \, d\lambda_{n'} \cdot \int_{E''} h(x'') \, d\lambda_{n''}}$$

Dim. Vediamo la sufficienza (che ci interessa di più).

f è misurabile perché prodotto di misurabili, idem per $E' \times E''$ in $\mathbb{R}^n$.

Ora, poiché g e h sono integrabili su E' e E'', lo sono anche $|g|$ e $|h|$.

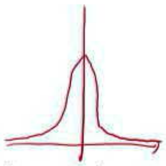
Vediamo allora Tonelli per f:

$$\int_{E''} d\lambda_{n''} \int_{E'} |f(x', x'')| \, d\lambda_n = \int_{E''} d\lambda_{n''} \int_{E'} |g(x')| \cdot \overset{\text{costante risp. } x'}{|h(x'')|} \, d\lambda_{n'} =$$

$$\int_{E''} |h(x'')| \, d\lambda_{n''} \cdot \int_{E'} |g(x')| \, d\lambda_{n'}$$, che dà risultato finito.

Allora f è integrabile (grazie a Tonelli), e si può dopo applicare Fubini che ci dice quanto afferma il Teorema. //

Ex. Calcolare l'integrale gaussiano $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$



$f(x) = e^{-x^2}$ è integrabile su $\mathbb{R}$ (alla Lebesgue) perché (assolutamente) R-integrabile.

Partiamo dal calcolo di $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 y^2} dx \, dy$.

Per Tonelli + Fubini, essendo $e^{-x^2-y^2}$ positiva sul dominio d'integrazione $\mathbb{R}^2$, possiamo provare a calcolare un integrale iterato e vedere cosa succede: se risulta finito esso sarà anche (PER FUBINI) il valore dell'integrale cercato; se invece risulta $+\infty$ allora vorrà dire che $e^{-x^2-y^2}$ non è integrabile su $\mathbb{R}^2$.

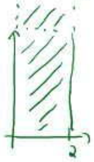
$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx \, dy \overset{\text{POLARI}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho \, d\rho = 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^{+\infty} = 2\pi \left((0) - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = \pi$$

D'altra parte $$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}}$$

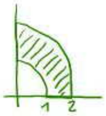
Ex Dire se le seguenti funzioni sono integrabili sui domini specificati, e se sì calcolare l'integrale.

(a) e^{-xy^2} su $[0,a]\times[0,+\infty[$. $(a>0)$



(b) $\frac{xy}{x^2+y^2}$ su $[-1,1]^2$

(c) $\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ su $[-1,1]^2$ oppure su



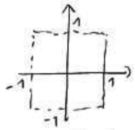
(a) $f(x,y) = e^{-xy^2}$, $E = [0,a]\times[0,+\infty[$.

Procediamo ancora con Tonelli + Fubini ($f>0$ su E). Probabilmente più incoraggianti per x-sezioni (perché risolviamo integrali gaussiani in y con parametro ...)

$$\int_0^a dx \int_0^{+\infty} e^{-xy^2}dy \quad \left[\begin{matrix}\text{PONGO} \\ v = y\sqrt{x} \\ y = \frac{1}{\sqrt{x}}v\end{matrix}\right] = \int_0^a dx \int_0^{+\infty} e^{-v^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dv =$$

$$= \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \int_0^{+\infty} e^{-v^2}dv = \left(2\sqrt{x}\right]_0^a \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi a} \quad \text{ok!}$$

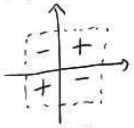
(b) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $E =$



$0 \le (|x|-|y|)^2 = -2|xy| + x^2+y^2$
$x^2+y^2 \ge 2|xy| \Rightarrow \frac{|xy|}{x^2+y^2} \le 1/2$

$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}$ ovvero f è limitata su E (non mi interessa il valore eventuale in $(0,0)$)

Dunque, essendo E misurabile di misura finita 4, f è integrabile su E.



$f(-x,y) = -f(x,y)$, $f(x,-y) = -f(x,y)$

$$\Rightarrow \int_E f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

Per curiosità calcoliamo $\int_{[0,1]^2} f(x,y)\,dx\,dy$ (verrà >0).

Fubini: $$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{y}{2}\lg(x^2+y^2)\right]_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y}{2}\left(\lg(1+y^2) - \lg(y^2)\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{y}_{g}\,\underbrace{\lg\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}_{F}dy$$

$\int Fg = FG - \int fG$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{y^2}{2}\lg\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1\left(\frac{y^2}{\cancel{2}}\cdot\frac{-\cancel{2}y^{-3}}{1+y^{-2}}\right)dy\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\lg 2 - 0\right) + \frac{1}{2}\int_0^1\frac{y}{y^2+1}\,dy\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\lg 2 + \left(\frac{1}{2}\lg(y^2+1)\right]_0^1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\lg 2 + \frac{1}{2}\lg 2 - 0\right) = \frac{1}{2}\lg 2 \sim 0{,}34$$

(c) $f(x,y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ è continua in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ma diverge a $\pm\infty$ all'intorno di $(0,0)$ (infatti $f(x,x)=\frac{1}{4x^2}\xrightarrow{x\to0}+\infty$.

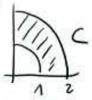
Dunque non è limitata. D'altra parte, per simmetria, se l'integrale converge esso darebbe valore 0 come prima.

Noto inoltre che $f>0$ nel 1° quadrante.

Mi conviene dunque esaminare un integrale iterato di $\overset{=f}{|f|}$ in $[0,1]^2$: se esso venisse finito, per T+F sarebbe anche il valore dell'integrale di f (e l'integrale cercato sarebbe nullo); se invece viene $+\infty$ vorrà dire che f non è integrabile su E.

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \int_0^1 y\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\right]_0^1 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 y\left(-\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{y^2}\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{y(y^2+1)}}_{\sim_0\, 1/y}\,dy = +\infty .$$ Dunque f NON è integrabile.

Invece sulla corona  C compatta ($\Rightarrow$ limitata)

f è continua, dunque integrabile.

$$\int_C \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy \overset{\text{polari}}{=} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 \frac{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta}{\rho^4}\cdot\rho\,d\rho = \int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_1^2\frac{1}{\rho}\,d\rho$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2}\cdot\left(\log\rho\right]_1^2 = \frac{1}{4}\log 2 \sim 0{,}17$$

$\boxed{\text{P.S.}}$ Prima si è visto che $\displaystyle\int_{[0,\alpha]\times[0,+\infty[} e^{-xy^2}\,dx\,dy = \sqrt{\pi\alpha}$ (finito $\forall\alpha$).

Per il calcolo, abbiamo notato che la funzione integranda è positiva sul dominio, dunque provando a calcolarne un integrale iterato, se questo ci viene finito allora lei è integrabile su quel valore (Tonelli + Fubini); se invece viene $+\infty$, allora no. Si era fatto il calcolo così: $\displaystyle\int_0^\alpha dx\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy$, sfruttando la conoscenza dell'integrale gaussiano.

Proviamo ora a invertire l'ordine di integrazione: il risultato deve essere lo stesso, ma non è detto che stavolta si riesca ad arrivarci.

$$\int_0^{+\infty} dy\int_0^\alpha e^{-xy^2}\,dx = \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{y^2}\,e^{-xy^2}\right]_0^\alpha dy = \int_0^{+\infty} \overset{\sim_0\,\frac{\alpha y^2}{y^2}=\alpha}{\underset{\sim_{+\infty}\,1/y^2}{\frac{1-e^{-\alpha y^2}}{y^2}}}\,dy$$

Già so che verrà $\sqrt{\pi\alpha}$, ma con il calcolo mi devo fermare qui (primitive non elementari).
