UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

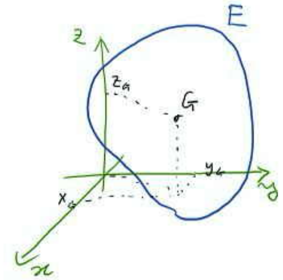
ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 24/10/2024

BARICENTRO



$E \subseteq \mathbb{R}^3$ misurabile e limitato, rappresenta un corpo.

$\mu: E \to [0,+\infty[$ densità di massa (kg/m^3)

massa totale di E: $\boxed{m = \int_E \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$ (kg)

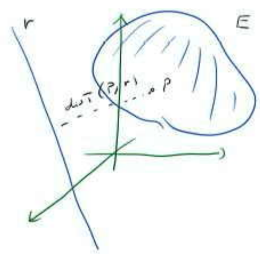
$$\boxed{\text{Baricentro di } E: \ (x_G, y_G, z_G) = \left(\frac{1}{m}\int_E \mu x\,dx\,dy\,dz,\ \frac{1}{m}\int_E \mu y\,dx\,dy\,dz,\ \frac{1}{m}\int_E \mu z\,dx\,dy\,dz\right)}$$

CASO OMOGENEO (μ = cost.): $m = \mu \cdot Vol(E)$, quindi (dim. fisica: m)

$$\boxed{\text{Baricentro geometrico di } E \quad (x_G, y_G, z_G) = \left(\frac{1}{Vol(E)}\int_E x\,dx\,dy\,dz,\ \frac{1}{Vol(E)}\int_E y\,dx\,dy\,dz,\ \frac{1}{Vol(E)}\int_E z\,dx\,dy\,dz\right)}$$

MOMENTO D'INERZIA

Sia r retta affine di $\mathbb{R}^n$.



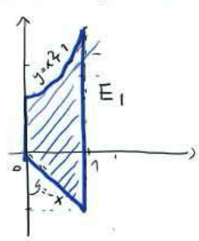
$$\boxed{I_r = \int_E \mu \cdot dist^2(x,y,z;r)\,dx\,dy\,dz} \quad (kg \cdot m^2)$$

CASO OMOGENEO: $\frac{m}{Vol(E)}\int_E dist^2(x,y,z;r)\,dx\,dy\,dz.$

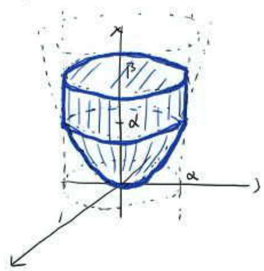
Ex. Calcolare area/volume, baricentro e momento d'inerzia dei corpi

$E_1 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ -x \le y \le x^2+1\}$

$E_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le \min\{\alpha z, \alpha^2\},\ 0 \le z \le \beta\}$ (ove $0<\alpha<\beta$)



(E_1 è una specie di ascia)



$x^2+y^2 \le \min\{\alpha z, \alpha^2\}$ significa

$\begin{cases} x^2+y^2 \le \alpha z \ (\text{paraboloide } z \ge \frac{1}{\alpha}(x^2+y^2)) \\ x^2+y^2 \le \alpha^2 \ (\text{cilindro}) \end{cases}$

(E_2 è una sorta di pallottola)

- Area(E_1) = $\int_0^1 dx \int_{-x}^{x^2+1} dy = \int_0^1 \left(x^2+1-(-x)\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{11}{6}$

$x_G = \frac{1}{11/6}\int x\,dx\,dy = \frac{6}{11}\int_0^1 x\,dx \int_{-x}^{x^2+1} dy = \frac{6}{11}\int_0^1 x\left(x^2+1-(-x)\right)dx = \frac{6}{11}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{13}{22}$

$$x_G = \frac{1}{11/6}\int_{E_1} x\,dx\,dy = \frac{6}{11}\int_0^1 x\,dx\int_{-x}^{x^2+1} dy = \frac{6}{11}\int_0^1 x\left(x^2+1-(-x)\right)dx = \frac{6}{11}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{13}{22}$$

$$y_G = \frac{1}{11/6}\int_{E_1} y\,dx\,dy = \frac{6}{11}\int_0^1 dx\int_{-x}^{x^2+1} y\,dy = \frac{6}{11}\int_0^1\left(\frac{y^2}{2}\right]_{-x}^{x^2+1}dx = \frac{3}{11}\int_0^1\left((x^2+1)^2-(-x)^2\right)dx$$

$$= \frac{3}{11}\quad \frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\Big]_0^1 = \frac{23}{55}$$

Momento d'inerzia di E_1 risp. asse y (densità superficiale μ costante)

$$I_y = \mu\int_{E_1} x^2\,dx\,dy = \mu\int_0^1 x^2\,dx\int_{-x}^{x^2+1} dy = \mu\int_0^1 x^2(x^2+1+x)\,dx = \dots = \frac{47}{60}\mu$$

Risp. asse x:

$$I_x = \mu\int_{E_1} y^2\,dx\,dy = \mu\int_0^1 dx\int_{-x}^{x^2+1} y^2\,dy = \mu\int_0^1 \frac{1}{3}\left((x^2+1)^3-(-x)^3\right)dx = \frac{619}{420}\mu$$

Per gli altri momenti d'inerzia rispetto a rette parallele agli assi posso usare il Teorema di Huygens-Steiner: ad es, rispetto alla retta $r = \{x$ detta r_G la parallela passante per il baricentro ($x = x_G = \frac{13}{22}$) si avrà

$$I_r = I_{r_G} + m(x_G-\alpha)^2 = (I_y - m x_G^2) + m(x_G-\alpha)^2 = I_y + m(\alpha^2 - 2\alpha x_G)$$

- Volume di E_2: $\displaystyle\int_{E_2} dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\alpha} dz\int_0^{\sqrt{\alpha z}} \rho\,d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta\int_{\alpha}^{\beta} dz\int_0^{\alpha} \rho\,d\rho = \pi\alpha^2\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right).$

  Per simmetria materiale si ha $x_G = y_G = 0$, e

  $$z_G = \frac{1}{\pi\alpha^2(\beta-\alpha/2)}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\alpha} z\,dz\int_0^{\sqrt{\alpha z}} \rho\,d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta\int_{\alpha}^{\beta} z\,dz\int_0^{\alpha} \rho\,d\rho\right) = \frac{3\beta^2-\alpha^2}{3(2\beta-\alpha)} \qquad \left(\text{se } \beta=\alpha:\ z_G = \frac{2}{3}\alpha\right)$$

  Momento d'inerzia rispetto all'asse z (baricentrico):

  $$I_z = \mu\int_{E_2}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \mu\left(\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\alpha} dz\int_0^{\sqrt{\alpha z}} \rho^2\rho\,d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta\int_{\alpha}^{\beta} dz\int_0^{\alpha} \rho^2\rho\,d\rho\right) = \frac{\pi\mu\alpha^4}{6}(3\beta-2\alpha)$$

  (DIMENSIONE $Kg/m^3 \cdot m^4 \cdot m = Kg \cdot m^2$)

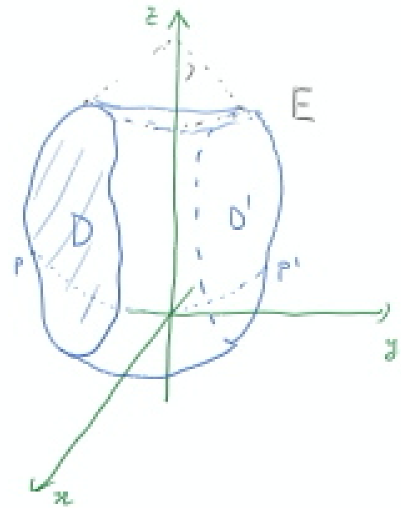
ESERCIZI

(22) Disegnare e calcolare volume e baricentro di
$$D = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2},\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$$
Dire poi se la funzione $f(x,y,z) = \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}$ è integrabile su D, e, nel caso, calcolare il valore dell'integrale.

(23) Disegnare e calcolare (se possibile in più modi) i volumi di
$$E_1 = \{(x,y,z) : 0 \le y \le x \le a,\ 0 \le z \le \sqrt{a^2-y^2}\}$$
$$E_2 = \{(x,y,z) : y^2+z^2 \le a^2,\ z^2+x^2 \le a^2\}$$
(ove $a>0$).

Si vedano inoltre gli esercizi del foglio n° 1, pubblicato nella pagina web.

VOLUME DEI SOLIDI DI ROTAZIONE



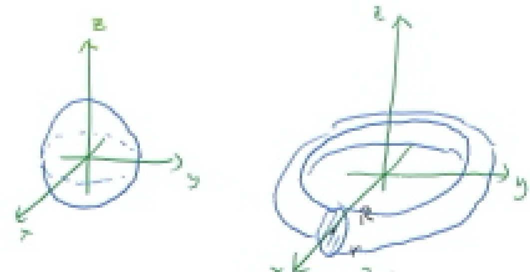
Prop. (TEOREMA DI GULDINO PER I VOLUMI DI ROTAZIONE)
Sia D un insieme piano misurabile e limitato contenuto nel semipiano (x,z) con $x>0$. Sia E il solido ottenuto facendo ruotare D di un angolo α attorno all'asse z. Allora

$$\boxed{\mathrm{Vol}(E) = \alpha \int_D x \, dx\, dz = \alpha \cdot x_G \cdot \mathrm{Area}(D)}$$

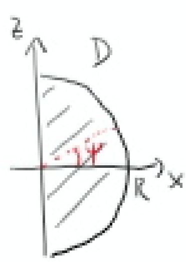
(ove x_G è la x del baricentro di D)

Dim. In coordinate cilindriche (ρ, θ, z), si ha $E = \{(\rho,\theta,z) : (\rho, z) \in D,\ 0 \le \theta \le \alpha\}$
dunque $\mathrm{Vol}(E) = \int_0^\alpha d\theta \int_D \rho \, d\rho\, dz = \alpha \int_D \rho\, d\rho\, dz$, come si voleva. //

Es. Volume della sfera e del toro.



· Sfera

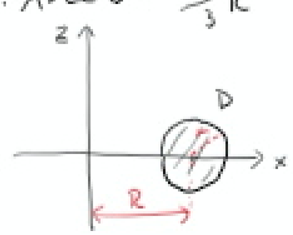


$$\text{Volume} = 2\pi \int_D x\, dx\, dz \overset{\text{polari}}{=} 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int_0^R \rho \cos\psi \cdot \rho \, d\rho$$

$$= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\psi \, d\psi \int_0^R \rho^2 d\rho = \left(\sin\psi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot \left(\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} R^3$$

Se G è il baricentro di D, per simmetria si avrà $z_G = 0$, e per Guldino
$2\pi \cdot x_G \cdot \mathrm{Area}\, D = \frac{4\pi}{3} R^3$ cioè $\cancel{2}\cancel{\pi} \cdot x_G \cdot \frac{R^{\cancel{2}} \cancel{\pi}}{\cancel{2}} = \frac{4\cancel{\pi}}{3} R^{\cancel{3}} \Rightarrow x_G = \frac{4}{3\pi} R$

· Toro

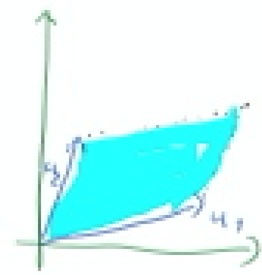


$$\text{Volume} = 2\pi \cdot x_G \cdot \mathrm{Area}\, D = 2\pi \cdot R \cdot r^2 \pi = 2\pi^2 R r^2$$

Occupiamoci ora, in preparazione alla spiegazione ormai vicina del calcolo del volume k-dimensionale di una varietà di dim k in $\mathbb{R}^n$, di un piccolo problema di geometria elementare:

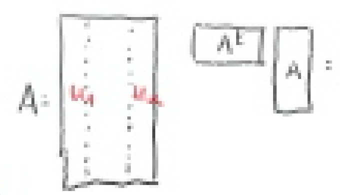
DATI K VETTORI $u_1, \dots, u_k$ IN $\mathbb{R}^n$, QUAL È IL VOLUME K-DIM. DEL PARALLELEPIPEDO DA ESSI GENERATO, OVVERO

$$P = \{ x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k \ : \ 0 \le \lambda_j \le 1 \}$$



Proposizione Data una matrice quadrata $A \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$, la misura k-dim. del parallelepipedo generato in $\mathbb{R}^k$ dai k vettori colonna di A è data da $|\det A|$.

Più in generale: data una matrice rettangolare $A \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ con $k \le n$, la misura k-dim. del parallelepipedo generato in $\mathbb{R}^n$ dai k vettori colonna di A è $\sqrt{\det(A^t \cdot A)}$, ove A^t è la matrice trasposta.



Dim. Iniziamo dal caso quadrato (k vettori in $\mathbb{R}^k$).

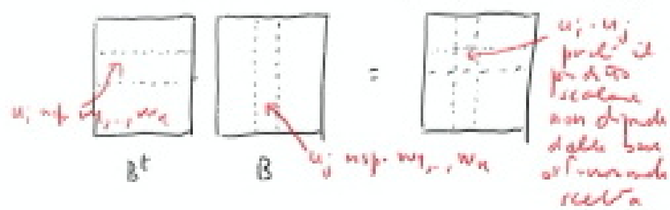
Se $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^k$ sono dipendenti, allora Volume = 0, e il risultato è vero. Se invece sono indipendenti, possiamo considerare il cambio di variabile $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, ovvero l'identità la cui nelle basi $u_1, \dots, u_k$ in partenza e $e_1, \dots, e_k$ (base canonica) in arrivo è data (le cui colonne sono giustamente le immagini dei vettori di in partenza rispetto a quelli di base in arrivo), e per

$$\mathrm{Vol}(P) = \int_P dx_1 \cdots dx_n = \int_{[0,1]^k} |\det A| \, dy_1 \cdots dy_n = |\det A| \int_{[0,1]^k} dy_1 \cdots dy_k = |\det A| .$$

Nel caso generale, siano $w_1, \ldots, w_k$ un sistema ortonormale di k vettori di $\mathbb{R}^n$ t.c. $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle \subseteq \langle w_1, \ldots, w_k \rangle$.

Allora, se B è la matrice di $M_{k \times k}(\mathbb{R})$ le cui colonne riportano le coordinate degli u_j rispetto ai w_ℓ (ovvero $B_{ij} = u_i \cdot w_j$) allora per quanto detto prima si ha $\mathrm{Vol}(P) = |\det B| \overset{\text{ovvio}}{=} \sqrt{\det(B^t B)}$.

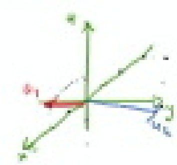
Poi $(B^t \cdot B)_{ij} = u_i \cdot u_j$
$= (A^t A)_{ij}$



dunque $B^t B = A^t A$. //

La matrice $A^t A$ è detta MATRICE DI GRAM dei $u_1, \ldots, u_k$ e ha elementi $(A^t A)_{ij} = u_i \cdot u_j$.
Il suo determinante $\det(A^t A)$ è detto GRAMIANO di $u_1, \ldots, u_k$.
Per il calcolo del gramiano è utile la seguente

Prop. (IDENTITÀ DI CAUCHY-BINET)
Il gramiano $\det(A^t A)$ è uguale alla somma dei quadrati dei determinanti di tutti i minori di A di ordine k.



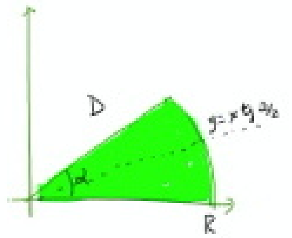
Es. $u_1 = (2,0,1)$, $u_2 = (-3,1,-2)$ in $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Gramiano $\det(A^t A) = (2)^2 + (-4+3)^2 + (-1)^2 = 6$
Il parallelogramma ha area $\sqrt{6}$.

Qualche semplice esercizio su aree, baricentri, momenti d'inerzia ...

<u>Ex.</u>



Area: $\int_D 1\,dx\,dy = \int_0^\alpha d\theta \int_0^R \rho\,d\rho = \frac{\alpha}{2}R^2$

Baricentro.

$$\int_D x\,dx\,dy = \int_0^\alpha d\theta \int_0^R \rho\cos\theta\cdot\rho\,d\rho = \int_0^\alpha \cos\theta\,d\theta \int_0^R \rho^2\,d\rho = \frac{\sin\alpha}{3}R^3$$

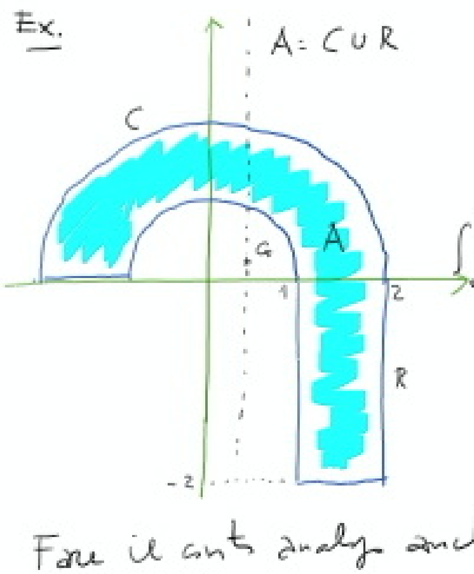
$$\Rightarrow \quad x_G = \frac{1}{\text{Area}(D)}\int_D x\,dx\,dy = \frac{2}{\alpha R^2}\cdot\frac{\sin\alpha}{3}R^3 = \frac{2\sin\alpha}{3\alpha}R$$

Notare che $\lim_{\alpha\to 0} x_G = \frac{2}{3}R$ ($> R/2$, come è naturale attendersi ...)

$$\int_D y\,dx\,dy = \int_0^\alpha d\theta \int_0^R \rho\sin\theta\cdot\rho\,d\rho = \frac{2(1-\cos\alpha)}{3\alpha}R \qquad \left(\lim_{\alpha\to 0} y_G = 0\right)$$

Notiamo che $y_G/x_G = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\left(\begin{array}{l} t = \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} \\ \sin\alpha = 2t/(1+t^2) \\ \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right)$ $= \dfrac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = t$ (ok)

<u>Ex.</u>



Trovare il baricentro di A.

<u>Area A</u> $= \frac{1}{2}(2^2\pi - 1^2\pi) + 1\cdot 2 = \frac{3\pi+4}{2}$

$$\int_A x\,dx\,dy = \int_C x\,dx\,dy + \int_R x\,dx\,dy = \int_0^\pi d\theta\int_1^2 \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho + \int_1^2 dx\int_{-2}^0 x\,dy$$

$$\int_0^\pi \cos\theta\,d\theta\int_1^2 \rho^2\,d\rho + \int_1^2 x\,dx\int_{-2}^0 dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2\cdot\left[y\right]_{-2}^0 = 3$$

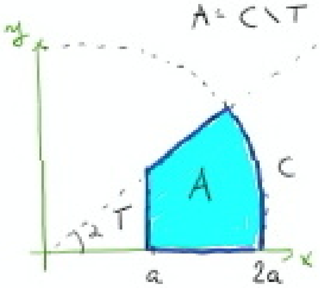
$$\Rightarrow \quad x_G = \frac{1}{\text{Area}(A)}\cdot\int_A x\,dx\,dy = \frac{6}{3\pi+4} \sim \frac{6}{13} \sim 0{,}45$$

In generale:
$$x_{G(A)} = \frac{\text{Area}(C)\cdot x_{G(C)} + \text{Area}(R)\cdot x_{G(R)}}{\text{Area}(A)}$$

(media pesata delle due coordinate x dei baricentri di C e R)

Fare il conto analogo anche per y_G.

$A = C \setminus T$



$$\text{Area}(A) = \text{Area}(C) - \text{Area}(T) = \frac{\alpha}{2}(2a)^2 - \frac{1}{2}a \cdot a\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha}{2}a^2$$

$$\int_A x\,dx\,dy = \int_C x\,dx\,dy - \int_T dx\,dy = \int_0^\alpha d\theta \int_0^{2a} \rho\cos\theta \cdot \rho\,d\rho - \int_0^a dx \int_0^{x\,\mathrm{tg}\,\alpha} x\,dy$$

$$= \int_0^\alpha \cos\theta\,d\theta \int^{2a} \rho^2\,d\rho - \int_0^a x\,dx \int_0^{x\,\mathrm{tg}\,\alpha} dy = \frac{8}{3}a^3 \sin\alpha - \int_0^a x^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,dx$$

$$= \frac{8\sin\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha}{3}a^3 \Rightarrow x_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \int_A x\,dx\,dy = \ldots$$

Fare il conto anche per y_G (ragionando sempre per differenza tra C e T)

Momento d'inerzia di A rispetto all'asse y. Sia μ densità superficiale (kg/m^2).

$$I_y = \int_A \mu \cdot x^2\,dx\,dy = \mu\int_A x^2\,dx\,dy = \mu\left(\int_C x^2\,dx\,dy - \int_T x^2\,dx\,dy\right) =$$

$$= \mu\left(\int_0^\alpha d\theta \int_0^{2a} \rho^2\cos^2\theta \cdot \rho\,d\rho - \int_0^a dx \int_0^{x\,\mathrm{tg}\,\alpha} x^2\,dy\right)$$

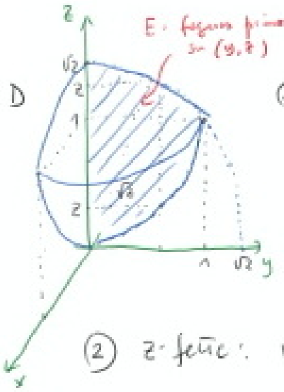
$$= \mu\left(\int_0^\alpha \cos^2\theta\,d\theta \int_0^{2a} \rho^3\,d\rho - \int_0^a x^3\,\mathrm{tg}\,\alpha\,dx\right) = \ldots$$

Ora la risoluzione dettagliata di uno degli esercizi assegnati...

(22) Disegnare e calcolare volume e baricentro di

$D = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2},\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

Dire poi se la funzione $f(x,y,z) = \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}$ è integrabile su D, e, nel caso, calcolare il valore dell'integrale.



Volume: vediamolo in tre modi.

① Guldino: $Vol(D) = \frac{\pi}{2}\int_E y\,dy\,dz = \frac{\pi}{2}\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} y\,dz$

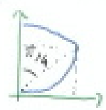
$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 y\left(\sqrt{2-y^2}-y^2\right)dy = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{3}(2-y^2)^{3/2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1$

$= \frac{\pi}{2}\left(\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{2\sqrt2}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2\sqrt2}{3}-\frac{7}{12}\right) = \frac{(8\sqrt2-7)\pi}{24}$

② z-fette: $Vol(D) = \int_0^1 dz\int_{D_{\sqrt z}} dx\,dy + \int_1^{\sqrt2} dz \int_{D_{\sqrt{2-z^2}}} dx\,dy$

$= \int_0^1 \frac{(\sqrt z)^2\pi}{4}dz + \int_1^{\sqrt2}\frac{(\sqrt{2-z^2})^2\pi}{4}dz = \frac{\pi}{4}\left(\int_0^1 z\,dz + \int_1^{\sqrt2}(2-z^2)\,dz\right)$

$= \frac{\pi}{4}\left(\left(\frac{z^2}{2}\right]_0^1 + \left(2z-\frac{z^3}{3}\right]_1^{\sqrt2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\left(\frac{1}{2}\right)-(0)+\left(\frac{4\sqrt2}{3}\right)-\left(\frac{5}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{4\sqrt2}{3}-\frac{7}{6}\right)$ (come prima)

③ coordinate sferiche: 

sul paraboloide: $z = x^2+y^2 \iff \rho\cos\varphi = \rho^2\sin^2\varphi \iff \rho = \cos\varphi/\sin^2\varphi$

$$Vol(D) = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt2}\rho^2\sin\varphi\,d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}\rho^2\sin\varphi\,d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\sqrt2}\rho^2\,d\rho + \int_0^{\pi/4}\sin\varphi\left(\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}} d\varphi\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\left(-\cos\varphi\right]_0^{\pi/4}\left(\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1}{3}\cancel{\sin\varphi}\cdot\frac{\cos^3\varphi}{\sin^{\cancel{6}\,5}\varphi}\,d\varphi\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(\left(1-\frac{\sqrt2}{2}\right)\cdot 2\sqrt2 + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\varphi\cdot\frac{1-\sin^2\varphi}{\sin^5\varphi}\,d\varphi\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(2(\sqrt2-1) + \int_{\sqrt2/2}^1 \frac{1-t^2}{t^5}\,dt\right) = \frac{\pi}{6}\left(2(\sqrt2-1) + \left(-\frac{1}{4t^4}+\frac{1}{2t^2}\right]_{\sqrt2/2}^1\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(2(\sqrt2-1) + \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) - (-1+1)\right) = \frac{\pi}{6}\left(2\sqrt2 - \frac{7}{4}\right)$$ (come prima).

- Baricentro: per simmetria materiale avrò $x_G = y_G$, dunque basta calcolare x_G e z_G. Procediamo ad esempio per z-fette:

$$x_G = \frac{1}{Vol(D)}\int_D x\,dx\,dy\,dz = \frac{24}{(8\sqrt2-7)\pi}\left(\int_0^1 dz\int_{D_{\sqrt z}} x\,dx\,dy + \int_1^{\sqrt2}dz\int_{D_{\sqrt{2-z^2}}} x\,dx\,dy\right)$$

$$= \frac{24}{(8\sqrt2-7)\pi}\left(\int_0^1 dz\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\sqrt z}\rho\cos\theta\,\rho\,d\rho + \int_1^{\sqrt2}dz\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\sqrt{2-z^2}}\rho\cos\theta\,\rho\,d\rho\right)$$

$$= \frac{\cancel{24}^{\,8}}{(8\sqrt2-7)\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\int_0^1\left(\frac{\rho^3}{\cancel{3}}\right]_0^{\sqrt z}dz + \int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\int_1^{\sqrt2}\left(\frac{\rho^3}{\cancel{3}}\right]_0^{\sqrt{2-z^2}}dz\right)$$

$$= \frac{8}{(8\sqrt{2}-7)\pi}\left(\int_0^1 z^{3/2}\,dz + \int_1^{\sqrt{2}}(2-z^2)^{3/2}\,dz\right)$$

$$= \frac{8}{(8\sqrt{2}-7)\pi}\left(\left(\frac{z^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 + \left(\frac{1}{4}\sin t\cos^3 t + \frac{3}{8}(t+\sin t\cos t)\right]_{\pi/4}^{\pi/2}\right)$$

$$= \frac{8}{(8\sqrt{2}-7)\pi}\left(\left(\frac{2}{5}\right)-(0)+\left(\frac{3\pi}{16}\right)-\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{8}{(8\sqrt{2}-7)\pi}\left(\frac{2}{5}+\frac{3\pi}{16}-\frac{1}{4}-\frac{3\pi}{32}\right) = \frac{\quad}{20\pi(8\sqrt{2}-7)} \sim 0{,}28.$$

$$\int (2-z^2)^{3/2}\,dz = \begin{bmatrix} z=\sqrt{2}\sin t \\ dz=\sqrt{2}\cos t\,dt \end{bmatrix}$$

$$= \int \cos^4 t\,dt = \int \underset{g}{\cos t}\cdot \underset{F}{\cos^3 t}\,dt$$

$$= \sin t\cos^3 t - \int \sin t(-3\sin t\cos^2 t)\,dt$$

$$= \sin t\cos^3 t + 3\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt$$

$$= \sin t\cos^3 t + 3\int (1-\cos^2 t)\cos^2 t\,dt$$

$$= \sin t\cos^3 t + 3\int \cos^2 t\,dt - 3\int \cos^4 t\,dt$$

$$\Rightarrow 4\int \cos^4 t\,dt = \sin t\cos^3 t + 3\,\frac{t+\sin t\cos t}{2} + k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\sin t\cos^3 t + \frac{3}{8}(t+\sin t\cos t) + k$$

$$z_G = \frac{1}{Vol(D)}\int_D z\,dx\,dy\,dz = \frac{24}{(8\sqrt{2}-7)\pi}\left(\int_0^1 z\,dz\int_{\triangledown_{\sqrt{z}}} dx\,dy + \int_1^{\sqrt{2}} z\,dz\int_{\triangledown_{\sqrt{2-z^2}}} dx\,dy\right)$$

$$= \frac{24}{(8\sqrt{2}-7)\pi}\left(\int_0^1 \frac{z\pi}{4}\cdot z\,dz + \int_1^{\sqrt{2}}\frac{(2-z^2)\pi}{4}\cdot z\,dz\right) = \frac{6}{8\sqrt{2}-7}\left(\left(\frac{z^3}{3}\right]_0^1 + \left(z^2-\frac{z^4}{4}\right]_1^{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{6}{8\sqrt{2}-7}\left(\left(\frac{1}{3}\right)-(0)+(1)-\left(\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{7}{2(8\sqrt{2}-7)} \sim 0{,}85$$

- La funzione $f(x,y,z) = \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}$ non è limitata nell'intorno di $(0,0,0)\in D$ (notare che sull'asse z vale $f(0,0,z) = 1/z \xrightarrow[z\to 0]{} \infty$) dunque non è possibile dire subito se f sia o meno integrabile su D.

  D'altra parte f è ≥ 0 su D, dunque per Tonelli + Fubini essa sarà integrabile $\Leftrightarrow$ un suo qualsiasi integrale iterato è finito, e tale sarà il valore dell'integrale.

  Per vedere se è così, calcoliamolo sia per z-fette che con le coord. sferiche.

① Per z-fette:

$$\int_0^1 dz\int_{\triangledown_{\sqrt{z}}}\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy + \int_1^{\sqrt{2}} dz\int_{\triangledown_{\sqrt{2-z^2}}}\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy =$$

questo addendo è certamente finito, ma lo aggiungo per completezza del calcolo. Quello di convergenza incerta è solo il primo addendo.

$$= \int_0^1 z\,dz\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\frac{1}{\rho^2+z^2}\,\rho\,d\rho + \int_1^{\sqrt{2}} z\,dz\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\sqrt{2-z^2}}\frac{1}{\rho^2+z^2}\,\rho\,d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^1 z\left(\frac{1}{2}\log(\rho^2+z^2)\right]_0^{\sqrt{z}}dz + \int_1^{\sqrt{2}} z\cdot\left(\frac{1}{2}\log(\rho^2+z^2)\right]_0^{\sqrt{2-z^2}}dz\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\int_0^1 z\left(\log(z^2+z)-\log(z^2)\right)dz + \int_1^{\sqrt2} z\left(\log 2-\log z^2\right)dz\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\int_0^1 z\log\left(1+\frac{1}{z}\right)dz + \int_1^{\sqrt2} z\left(\log 2-2\log z\right)dz\right)$$

$\cdot\ \int z\log\left(1+\frac1z\right)dz = \frac{z^2}{2}\log\left(1+\frac1z\right) - \int\frac{z^2}{2}\cdot\frac{1}{1+1/z}\left(-\frac{1}{z^2}\right)dz = \frac{z^2}{2}\log\left(1+\frac1z\right)+\frac12\int\frac{z}{z+1}\,dz$

$= \frac12\left(z^2\log\left(1+\frac1z\right)+z-\log(z+1)\right)+k$

$\cdot\ \int z\log z\,dz = \frac{z^2}{2}\log z - \int\frac{z^2}{2}\cdot\frac1z\,dz = \frac{z^2}{2}\log z-\frac{z^2}{4}+k = \frac{z^2}{4}(2\log z-1)+k$

$$= \pi/4\left(\frac12\left(z^2\log\left(1+\frac1z\right)+z-\log(z+1)\right)\Big]_0^1 + \left(\frac{\log 2}{2}z^2-\cancel{2}\cdot\frac{z^2}{\cancel{4}\,2}(2\log z-1)\right)\Big]_1^{\sqrt2}\right)$$

$$= \pi/8\left((\cancel{\log 2}+1-\cancel{\log 2})-(0)+\left(2\cancel{\log}2-2(\cancel{\log 2}-1)\right)-(\log 2+1)\right)$$

$= \pi/8\,(2-\log 2)$ valore finito ($\varepsilon>0$).

(2) In coord. sferiche: (dal punto (1) già so che l'integrale converge, dunque sono tranquillo...)

$$\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\sqrt2}\frac{\rho\cos\varphi}{\cancel{\rho^2}}\cancel{\rho^2}\sin\varphi\,d\rho + \int_{\pi/4}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}\frac{\rho\cos\varphi}{\cancel{\rho^2}}\cancel{\rho^2}\sin\varphi\,d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\cos\varphi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt2}d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}d\varphi\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi + \frac12\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cancel{\sin\varphi}\cos\varphi\cdot\frac{\cos^2\varphi}{\sin^{\cancel{4}\,3}\varphi}\,d\varphi\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\left(-\frac{\cos 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi/4} + \frac12\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1-\sin^2\varphi}{\sin^3\varphi}\cos\varphi\,d\varphi\right) \qquad t=\sin\varphi$$

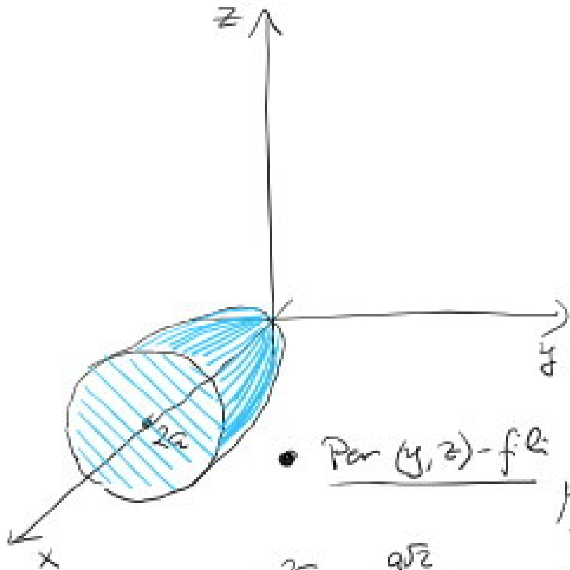
$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac14+\frac12\int_{\sqrt2/2}^1\left(\frac{1}{t^3}-\frac1t\right)dt\right)$$

$$= \pi/2\left(\frac14+\frac12\left(-\frac{1}{2t^2}-\log t\right]_{\sqrt2/2}^1\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac14+\frac12\left(\left(-\frac12\right)-\left(-1+\frac12\log 2\right)\right)\right)$$

$= \pi/8\,(2-\log 2)$, lo stesso valore trovato in precedenza.

In conclusione, f è integrabile su D con $\int_D f\,dx\,dy\,dz = \frac{\pi}{8}(2-\log 2)$.

Calcolare i momenti d'inerzia rispetto agli assi coordinati del corpo $E=\{(x,y,z):\ y^2+z^2\le ax\le 2a^2\}$ (con $a>0$) di densità di massa $\mu>0$, possibilmente in vari modi.



(a) RISPETTO ASSE X

• Per x-fette

$$\int_E \mu (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \mu \int_0^{2a} dx \int_{r=\sqrt{ax}} (y^2+z^2)\,dy\,dz$$

$$= \mu \int_0^{2a} dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{ax}} r^2 \cdot r\,dr = 2\pi\mu \int_0^{2a} dx \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{ax}}$$

$$= \frac{1}{2}\pi\mu \int_0^{2a} a^2x^2\,dx = \frac{1}{2}\pi\mu a^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a} = \frac{4\pi}{3}\mu a^5$$

• Per (y,z)-fili

$$\mu\int_{r=a\sqrt{2}} dy\,dz \int_{\frac{y^2+z^2}{a}}^{2a} (y^2+z^2)\,dx = \mu\int_{r=a\sqrt{2}}(y^2+z^2)\left(2a-\frac{y^2+z^2}{a}\right)dy\,dz$$

$$=\mu\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a\sqrt{2}} \rho^2\left(2a-\rho^2/a\right)\rho\,d\rho = 2\pi\mu\left[\frac{2a\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6a}\right]_0^{a\sqrt{2}} = 2\pi\mu\left(2a^5-\frac{4}{3}a^5\right) = \frac{4\pi}{3}\mu a^5$$

(b) RISPETTO ASSE Z (E ANCHE RISPETTO ASSE Y)

• Per x-fette

$$\mu\int_0^{2a}dx\int_{r=\sqrt{ax}}(x^2+y^2)\,dy\,dz = \mu\int_0^{2a}dx\int_0 (x^2+r^2\cos^2\alpha)\,r\,dr =$$

$$=\mu\int_0^{2a}dx\int_0^{2\pi}d\alpha\left[\frac{x^2r^2}{2}+\frac{r^4\cos^2\alpha}{4}\right]_0^{\sqrt{ax}} = \mu\int_0^{2a}dx\int_0^{2\pi}\left(\frac{ax^3}{2}+\frac{a^2x^2\cos^2\alpha}{4}\right)d\alpha =$$

$$=\frac{1}{4}\mu\int_0^{2a}\left[2ax^3\alpha+a^2x^2\,\frac{\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{2}\right]_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} = \frac{1}{4}\mu\int_0^{2a}\left(2ax^3\cdot 2\pi+\frac{a^2x^2}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\mu\pi a\int_0^{2a}(4x^3+ax^2)\,dx = \frac{1}{4}\mu\pi a\left[x^4+\frac{ax^3}{3}\right]_{x=0}^{x=2a} = \frac{14\pi}{3}\mu a^5$$

• Per (y,z) fili

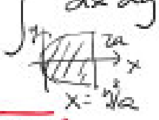
$$\mu\int_{r=a\sqrt{2}}dy\,dz\int_{\frac{y^2+z^2}{a}}^{2a}(x^2+y^2)\,dx = \mu\int_{a\sqrt{2}}dy\,dz\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{x=\frac{y^2+z^2}{a}}^{x=2a} =$$

$$=\mu\int_{a\sqrt{2}}\left(\frac{8a^3}{3}+2ay^2-\frac{1}{3}\left(\frac{y^2+z^2}{a}\right)^3-\left(\frac{y^2+z^2}{a}\right)y^2\right)dx\,dy$$

$$=\mu\int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^{a\sqrt{2}}\left(\frac{8a^3}{3}+2a\rho^2\cos^2\alpha-\frac{\rho^6}{3a^3}-\rho^2\cos^2\alpha\cdot\frac{\rho^2}{a}\right)\rho\,d\rho = \cdots = \frac{14\pi}{3}\mu a^5$$

• Per (x,y)-fili

$$2\cdot\mu\int dx\,dy\int_0^{\sqrt{ax-y^2}}(x^2+y^2)\,dz = 2\mu\int(x^2+y^2)\sqrt{ax-y^2}\,dx\,dy$$



Pongo $\begin{cases}u=\sqrt{ax-y^2}\\ v=y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{u^2+v^2}{a},\ u\geq 0\\ y=v\end{cases}$

Poi $y^2/a \leq x\leq 2a \iff v^2/a \leq \frac{u^2+v^2}{a}\leq 2a$ (con $u\geq 0$)

$\iff v^2\leq u^2+v^2\leq 2a^2$ (con $u\geq 0$)

Dunque 

Jacobiano $\begin{pmatrix} 2u/a & 2v/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det = \frac{2u}{a} > 0$

$$= 2\mu \iint_{a\sqrt{2}} \left(\frac{(u^2+v^2)^2}{a^2} + v^2 \right) \cdot u \cdot \frac{2u}{a} \, du\, dv = 2\mu \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\sqrt{2}} \left(\frac{\rho^4}{a^2} + \rho^2 \sin^2\theta \right) \cdot \frac{2}{a} \rho^2 \cos^2\theta$$

$$= \frac{4\mu}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta \cdot \left[\frac{\rho^8}{8a^2} + \frac{\rho^6}{6} \sin^2\theta \right]_{\rho=0}^{\rho=a\sqrt{2}} = 8\mu a^5 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + \frac{2}{3} \sin^2\theta \right) \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 8\mu a^5 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos^2\theta + \frac{1}{6} \sin^2(2\theta) \right) d\theta = \dots = \frac{14\pi}{3} \mu a^5 .$$

- Cambio di variabili, poi coordinate sferiche

$$\begin{cases} u = \sqrt{ax - y^2 - z^2} \geq 0 \\ v = y \\ w = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u^2+v^2+w^2}{a} \\ y = v \\ z = w \end{cases} \quad \text{Jac} = \begin{pmatrix} 2u/a & 2v/a & 2w/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det =$$

$$E = \{ y^2 + z^2 \le x \le 2a \} \longleftrightarrow D : \begin{cases} u^2+v^2+w^2 \le 2a^2 \\ u \geq 0 \end{cases} \text{(semisfera)}$$

$$\mu \iiint_E (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz = \mu \iiint_D \left(\frac{(u^2+v^2+w^2)^2}{a^2} + v^2 \right) \frac{2u}{v} \, du\, dv\, dw$$

(PASSO IN COORD. SFERICHE)

$$= \mu \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \left(\frac{\rho^4}{a^2} + \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi \right) \cdot \frac{2}{a} \rho \cos\theta \sin\varphi \cdot \rho^2 \sin$$

$$= \frac{2\mu}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta \int_0^{\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi \left[\frac{\rho^8}{8a^2} + \frac{\rho^6}{6} \sin^2\theta \sin^2\varphi \right]_{\rho=0}^{\rho=a\sqrt{2}}$$

$$= 6\mu a^5 \int_0^{\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \left(1 + \frac{2}{3} \sin^2\theta \sin^2\varphi \right) d\theta$$

$$= 6\mu a^5 \int_0^{\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi \left[\sin\theta + \frac{2}{9} \sin^2\varphi \sin^3\theta \right]_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2}$$

$$= 6\mu a^5 \int_0^{\pi} \sin^2\varphi \left(2 + \frac{2}{9} \sin^2\varphi \right) d\varphi = \dots = \frac{14\pi}{3} \mu a^5 .$$