

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 25/10/2024

INTEGRAZIONE DI VOLUME SULLE VARIETA'

Sappiamo che in $\mathbb{R}^n$ una varietà di dimensione $K < n$ è trascurabile per la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.

Ma se volessimo considerare una misura K -dimensionale di tale varietà (la lunghezza di una curva, l'area di una superficie, ...) come potremmo fare?

Problema: data una funzione $f(x_1, \dots, x_n)$ e una varietà

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ di dim. $K \leq n$, come definire un integrale

di volume K -dimensionale sulla varietà M :

$$\int_M f(x) d\lambda_K(x)$$

Stiamo generalizzando la nozione di INTEGRALE D'ARCO:

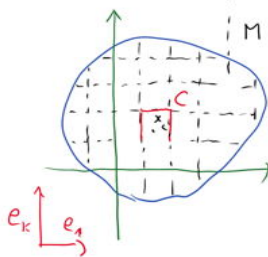
se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\Gamma = \gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^n$,

è definito

$$\int_{\Gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

(il risultato non dipende dalla parametrizzazione γ , in particolare non dipende dall'orientamento di Γ)

Come fare? Iniziamo da $M = \text{apice di } \mathbb{R}^K$.



$f \rightarrow \mathbb{R}$

Ciascun cubetto abbia lato 2^{-N} .

Sceglia dentro ogni cubetto C un punto di riferimento x_C :

L'idea di Riemann (più raffinata da Lebesgue) è di definire

$$\int_M f(x) d\lambda_K(x) := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_C f(x_C) \cdot \lambda_K(C) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (2^{-KN} \sum_C f(x_C))$$

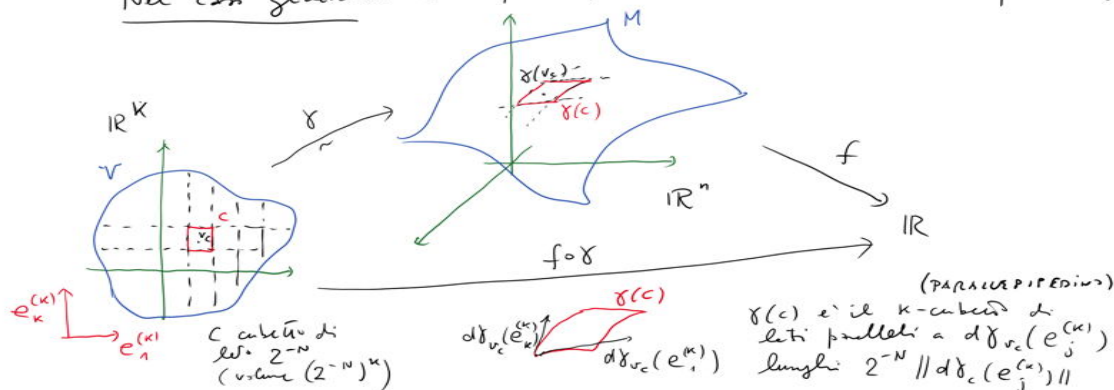
Naturalmente affinché il risultato sia finito serve il caso di

Supponi ad es. che f abbia supporto compatto ($\Rightarrow$ somma su C finiti)

Nel caso in cui f sia $\mathbb{R}$ -integrabile ($\Rightarrow$ L -integrabile) si nota che

talí valore non dipende dalle scelte dei punti di riferimento x_c .

Nel caso generale: su M scegliamo un sistema param. γ .



Ricordando che $d\gamma_{v_i}(e_j^{(k)}) = \frac{\partial \gamma}{\partial v_j}(v_i)$, il volume k -dim. di $\gamma(c)$ risulta 2^{-Nk} volte il valore k -dim. del parallelepipedo generato dai k -vettori (lin. indep!) $\frac{\partial \gamma}{\partial v_1}(v_i), \dots, \frac{\partial \gamma}{\partial v_k}(v_i)$, ovvero, per quanto visto, $2^{-Nk} \sqrt{\det(J_\gamma^t(v_i) J_\gamma(v_i))}$.

Dovremmo dunque aver capito come definire questo integrale, che nella nostra mente dovrebbe essere dato da $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum f(\gamma(v_i)) \lambda_k(\gamma(c))$,
 $\sim 2^{-Nk} \det(J_\gamma^t J_\gamma)$

Def. Dato $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, si dirà che f è INTEGRABILE (ALLA LEBESGUE) su M se $|f \circ \gamma| \cdot \sqrt{\det(J_\gamma^t J_\gamma)}$ è integrabile su V , e in questo caso

$$\int_M f(x) d\lambda_k(x) := \int_V f(\gamma(v)) \sqrt{\det(J_\gamma^t(v) J_\gamma(v))} d\lambda_k(v).$$

La quantità $\sqrt{\det(J_\gamma^t J_\gamma)} \cdot d\lambda_k(v)$ è detta ELEMENTO DI VOLUME in M (per le superfici in $\mathbb{R}^3$, ovvero $k=2$ e $n=3$, l'elemento di volume si denota di solito con ds , oppure $dS, \dots$)

Nel caso $f \equiv 1$ tale integrale fornisce il volume k -dim. di M .

E' importante dimostrare subito che

Prop. | Le definizioni date per $\int_M f(x) d\lambda_k(x)$ non dipendono dalle param. scelte γ .

Dim. $V \xrightarrow{\gamma} M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\phi = \tilde{\gamma}^{-1} \circ \gamma$ è diffeomorfismo tra V e $\tilde{V}$,
 $\downarrow \phi = \tilde{\gamma}^{-1} \circ \gamma$ $\tilde{\gamma}$ $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$
 Abbiamo che

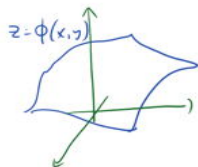
$$\begin{aligned} \int_V f(\gamma(v)) \cdot \sqrt{\det(J_\gamma(v)^t J_\gamma(v))} d\lambda_n(v) &= \int_{\tilde{V}} f(\tilde{\gamma}(\phi(v))) \sqrt{\det((J_{\tilde{\gamma}}(\phi(v)) \cdot J_\phi(v))^t \cdot (\dots))} d\lambda_n(v) \\ &= \int_{\tilde{V}} f(\tilde{\gamma}(\phi(v))) \sqrt{\det(J_\phi(v)^t \underbrace{J_{\tilde{\gamma}}(\phi(v))^t}_{\text{quadrato } K \times K} \underbrace{J_{\tilde{\gamma}}(\phi(v))}_{\text{quadrato } K \times K} J_\phi(v))} d\lambda_n(v) \\ &= \int_{\tilde{V}} f(\tilde{\gamma}(\phi(v))) \sqrt{(\det J_\phi(v))^2 \det(J_{\tilde{\gamma}}(\phi(v))^t J_{\tilde{\gamma}}(\phi(v)))} d\lambda_n(v) \\ &= \int_{\tilde{V}} f(\tilde{\gamma}(\phi(v))) \sqrt{\det(J_{\tilde{\gamma}}(\phi(v))^t J_{\tilde{\gamma}}(\phi(v)))} \cdot |\det J_\phi(v)| d\lambda_n(v) \\ &\stackrel{(\text{cambi di variabile})}{\tilde{v} = \phi(v)} \int_{\tilde{V}} f(\tilde{\gamma}(\tilde{v})) \sqrt{\det(J_{\tilde{\gamma}}(\tilde{v})^t J_{\tilde{\gamma}}(\tilde{v}))} \cdot d\lambda_n(\tilde{v}) \quad // \end{aligned}$$

Prima di fare degli esempi, evidenziamo i casi particolari più importanti.

- CURVE** ($n=1$): si ritrova l'integrale d'arco $\int_M f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$
- SUPERFICI IN $\mathbb{R}^3$** ($n=2, m=3$): dati (v_1, v_2) i parametri in $V \subseteq \mathbb{R}^2$,
 la jacobiana è $J_\gamma = \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial v_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial v_2} \end{pmatrix}$ lungo l'elemento d'area normale

$$ds = \sqrt{\det(J_\gamma^t J_\gamma)} dv_1 dv_2 = \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial v_2} \right\| dv_1 dv_2.$$

- GRAFICI AUREWIM**: Sia $M = \{x = (x', x_n) : x_n = \phi(x')\}$



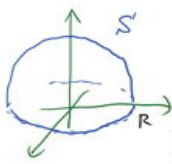
In gergo con $\gamma(x') = (x', \phi(x'))$, dove

$$J_\gamma(x') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J_\gamma^t J_\gamma) dx_1 \dots dx_{n-1} = \sqrt{1 + \|\nabla \phi\|^2} dx_1 \dots dx_{n-1}$$

$$\left(\text{Es. per una superficie in } \mathbb{R}^3 \text{ espresse come } z = \phi(x, y) : J_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2} dx dy \right)$$

Ora alcuni esempi.

Ex. Calcolare in più modi l'area delle semisuperfici sferiche.



(1) Coordinate sferiche $\gamma(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi)$
 con $-\pi < \theta < \pi, 0 < \varphi < \pi/2$

$$J_\gamma = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \sin \varphi & 0 \\ R \cos \theta \sin \varphi & R \sin \theta \sin \varphi & 0 \\ 0 & -R \sin \varphi & R \cos \varphi \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\text{elem. d'area } dS = \sqrt{R^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + R^4 \sin^2 \varphi \sin^2 \varphi + R^4 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi} d\theta d\varphi$$

$$= \sqrt{R^4 \sin^2 \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} d\theta d\varphi = R^2 \sin \varphi d\theta d\varphi \quad \text{dunque}$$

$$\text{Area}(S) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} R^2 \sin \varphi d\varphi = R^2 \cdot 2\pi \cdot [-\cos \varphi]_0^{\pi/2} = 2\pi R^2$$

(2) Grafici $z = \phi(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ $(x, y) \in \text{disco } R$ $dS = \sqrt{1 + \|\nabla \phi\|^2} dx dy$

$$\nabla \phi = \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right) \Rightarrow dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

dunque $\text{Area}(S) = \int \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho$

$$= 2\pi R \int_0^R (R^2 - \rho^2)^{-1/2} d\rho = 2\pi R [-\sqrt{R^2 - \rho^2}]_0^R = 2\pi R^2$$

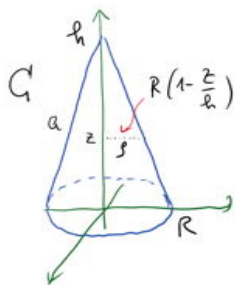
(3) Calcolo (ρ, θ, z) $f(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ $\gamma(\theta, z) = (\sqrt{R^2 - z^2} \cos \theta, \sqrt{R^2 - z^2} \sin \theta, z)$
 $-\pi < \theta < \pi, 0 < z < R$

$$J_\gamma = \begin{pmatrix} -\sqrt{R^2 - z^2} \sin \theta & \sqrt{R^2 - z^2} \cos \theta & 0 \\ \sqrt{R^2 - z^2} \cos \theta & -\sqrt{R^2 - z^2} \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow dS = \sqrt{z^2 + (R^2 - z^2) \sin^2 \theta + (R^2 - z^2) \cos^2 \theta} d\theta dz$$

$$= R d\theta dz$$

$$\text{Area}(S) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^R R dz = 2\pi R^2$$

Ex. Area laterale del cono retto.



$$\gamma(\theta, z) = (R(1 - z/h) \cos \theta, R(1 - z/h) \sin \theta, z) \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq z \leq h$$

$$J_\gamma = \begin{pmatrix} -R(1 - z/h) \sin \theta & -R/h \sin \theta & 0 \\ R(1 - z/h) \cos \theta & -R/h \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$dS = \sqrt{R^2(1 - z/h)^2 \sin^2 \theta + R^2(1 - z/h)^2 \cos^2 \theta + R^2/h^2} d\theta dz = \frac{R}{h} (1 - z/h) \sqrt{R^2 + h^2} d\theta dz$$

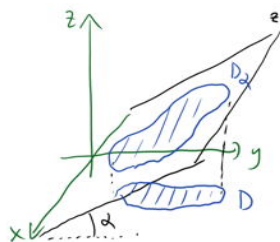
$$\text{Area lat} = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^h \frac{R}{h} (1 - z/h) \cdot a dz = \frac{R a}{h} \cdot 2\pi \left[z - \frac{z^2}{2h} \right]_0^h = \frac{R a}{h} \cdot 2\pi \left(h - \frac{h}{2} \right) = \frac{R a \pi}{2} \quad (OK)$$

Un classico errore sarebbe di "ragionare per z = costante"

integrando per $0 \leq z \leq h$ le lunghezze delle circonferenze delle z-fette,
 ovvero $2R(1 - z/h)\pi$. $\int_0^h 2R(1 - z/h)\pi dz = 2R\pi \left[z - \frac{z^2}{2h} \right]_0^h = \pi R h$ ERRATO!

Ex. LEGGE DEL COSENDO

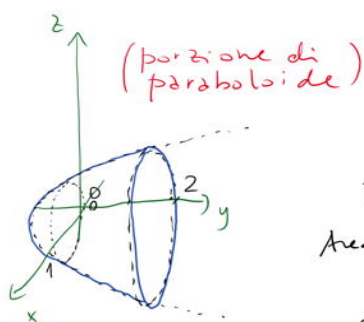
$$\text{Area}(D_2) = \frac{1}{\cos \alpha} \text{Area}(D)$$



$$\begin{aligned} D_2 &= \{z = \phi(x, y) = y \tan \alpha, (x, y) \in D\} \\ \nabla \phi &= (0, \tan \alpha) \rightarrow d\sigma = \sqrt{1 + \|\nabla \phi\|^2} dx dy = \\ d\sigma &= \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} dx dy = \frac{1}{\cos \alpha} dx dy \\ \Rightarrow \text{Area}(D_2) &= \int_D \frac{1}{\cos \alpha} dx dy = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \text{Area}(D) \end{aligned}$$

Ex. Area di P: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2 - x, y \leq 2\}$

$$\begin{aligned} y &= \phi(x, z) = x^2 + z^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 + z^2 - \frac{1}{4} \\ y=0 &: (x - \frac{1}{2})^2 + z^2 = \frac{1}{4} \text{ cerchio centrato in } (\frac{1}{2}, 0) \text{ raggio } \frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y=2 &: 2 = (x - \frac{1}{2})^2 + z^2 - \frac{1}{4} \text{ cerchio} \\ (x - \frac{1}{2})^2 + z^2 &= \frac{9}{4} \text{ cerchio centrato in } (\frac{1}{2}, 0) \text{ raggio } \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= (2x-1, 2z) \rightarrow d\sigma = \sqrt{1 + (2x-1)^2 + 4z^2} dx dz \\ \text{Area}(P) &= \int_{\text{cerchio } 3/2} \sqrt{1 + (2x-1)^2 + 4z^2} dx dz \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{3/2} \sqrt{1 + (x + 2\rho \cos \theta - 1)^2 + 4\rho^2 \sin^2 \theta} \rho d\rho = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{3/2} \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = 2\pi \left(\frac{1}{12} (1 + 4\rho^2)^{3/2} \right) \Big|_0^{3/2} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Geno. P. di TRANSFER
x = 1/2 + rho cos theta
z = rho sin theta
con 0 <= rho <= 3/2, -pi <= theta <= pi

Terminiamo ricordando le definizioni di baricentro e momento d'inerzia per una K -varietà materiale M in $\mathbb{R}^m$.

Sia data una densità puntuale di massa $\mu: M \rightarrow [0, +\infty[$ (kg/m^K).

BARICENTRO $\underline{x}_G = (x_{G1}, \dots, x_{Gn})$, $x_{Gj} = \frac{1}{m(M)} \int_M \mu x_j d\lambda_M$

(o.e. $m(M) = \int_M \mu d\lambda_M$ è la massa totale, in kg).

MOMENTO D'INERZIA rispetto a una retta $r \subseteq \mathbb{R}^m$:

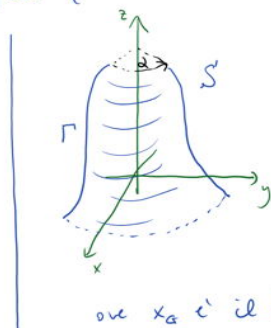
$$I_r = \int_M \mu \cdot \text{dist}_r^2(x) d\lambda_M$$

Nel caso omogeneo ($\mu = \text{cost.} \Rightarrow m(M) = \mu \cdot \text{Vol}_k(M)$)

BARICENTRO GEOMETRICO $\underline{x}_G = \frac{1}{\text{Vol}_k(M)} \left(\int_M x_1 d\lambda_n, \dots, \int_M x_n d\lambda_n \right)$.

Vale inoltre il seguente analogo del T. Guldino per le superfici di rotazione:

Ter. (GULDINO PER LE SUPERFICIE DI ROTAZIONE)



Sia Γ curva piana rettificabile contenuta nel semipiano (x, z) con $x > 0$.

Le si faccia ruotare di un angolo α attorno all'asse z . Allora

$$\text{Area}(S) = \alpha \int_{\Gamma} x \, dl = \alpha \cdot x_G \cdot l(\Gamma)$$

ove x_G è il baricentro geometrico di Γ e $l(\Gamma)$ è la sua lunghezza

Dim. Se $[a, b] \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^2_{(x,z)}$ con $\psi(t) = (\overset{x(t)}{\psi_1(t)}, \overset{z(t)}{\psi_2(t)})$, allora S è parametrizzata da $\gamma: [a, b] \times [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$\gamma(t, \theta) = (\psi_1(t) \cos \theta, \psi_1(t) \sin \theta, \psi_2(t))$: dunque

$$J_{\gamma}(t, \theta) = \begin{pmatrix} \psi_1'(t) \cos \theta & -\psi_1(t) \sin \theta \\ \psi_1'(t) \sin \theta & \psi_1(t) \cos \theta \\ \psi_2'(t) & 0 \end{pmatrix} \leadsto$$

elem. d'area $dS = \sqrt{\psi_1^2 \psi_1'^2 + \psi_1^2 \psi_2'^2} \, dt \, d\theta = |\psi_1| \cdot \|\psi'\| \, dt \, d\theta$

dunque $\text{Area}(S) = \int_0^\alpha d\theta \int_a^b \overset{x(t)}{\psi_1(t)} \cdot \|\psi'(t)\| \, dt = \alpha \int_{\Gamma} x \, dl$.

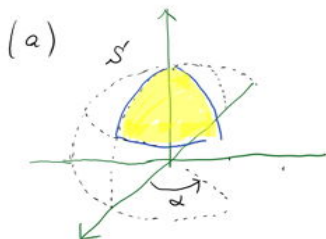
Si noti poi che il baricentro di Γ ha ascissa

$$x_G = \frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} x \, dl \quad //$$

Ex. Calcolare area e baricentro di

(a) S' = porzione di sup. sferica di raggio R con longitudine $0 \leq \theta \leq \alpha$ e latitudine $0 \leq \varphi \leq \beta$;

(b) T = porzione di toro di raggi R e r e apertura angolare $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

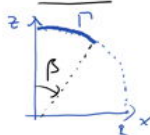


Area.

Sferiche $d\sigma = R^2 \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi$

$$\text{Area}(S) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\beta R^2 \sin \varphi \, d\varphi = 2(1 - \cos \beta) R^2$$

• Guldino



$$\psi(\varphi) = (R \sin \varphi, R \cos \varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq \beta)$$

$$\psi'(\varphi) = (R \cos \varphi, -R \sin \varphi) \Rightarrow \|\psi'\| = R$$

$$\int_R x \, d\ell = \int_0^\beta R \sin \varphi \cdot R \cdot d\varphi = R^2 (1 - \cos \beta)$$

$$\Rightarrow \text{Area}(S) = 2 \int_R x \, d\ell = 2(1 - \cos \beta) R^2$$

(in seguito che il baricentro geometrico delle curve γ soddisfa $2 \cdot x_G \cdot \ell(\gamma) = \text{Area}(S)$)
 dunque $2 x_G \cdot \frac{R\beta}{2} = 2(1 - \cos \beta) R^2 \Rightarrow x_G = \frac{1 - \cos \beta}{\beta} R$

Baricentro di S :

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}(S)} \int_S x \, d\sigma = \frac{1}{2(1 - \cos \beta) R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\beta R \cos \theta \sin \varphi \cdot R^2 \sin \varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{R}{2(1 - \cos \beta) R^2} (\sin \theta)_0^{2\pi} \left(\frac{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi}{2} \right)_0^\beta = \frac{\sin 2(\beta - \sin \beta \cos \beta)}{2 \cdot 2(1 - \cos \beta)} R$$

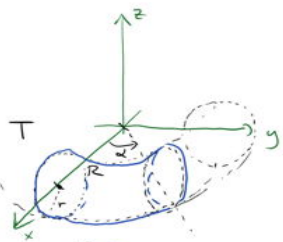
$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(S)} \int_S y \, d\sigma = \frac{1}{2(1 - \cos \beta) R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\beta R \sin \theta \sin \varphi \cdot R^2 \sin \varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{R}{2(1 - \cos \beta) R^2} (-\cos \theta)_0^{2\pi} \left(\frac{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi}{2} \right)_0^\beta = \frac{(1 - \cos 2)(\beta - \sin \beta \cos \beta)}{2 \cdot 2(1 - \cos \beta)} R$$

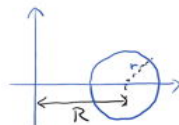
$$z_G = \frac{1}{\text{Area}(S)} \int_S z \, d\sigma = \frac{1}{2(1 - \cos \beta) R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\beta R \cos \varphi \cdot R^2 \sin \varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{2R}{2(1 - \cos \beta) R^2} \left(-\frac{1}{4} \cos 2\varphi \right)_0^\beta = \frac{1 - \cos 2\beta}{4(1 - \cos \beta)} R = \frac{\sin^2 \beta}{2(1 - \cos \beta)} R = \frac{1 + \cos \beta}{2} R$$

(b)



• Guldino



$$\text{Area}(T) = 2 \cdot R \cdot 2\pi r = 2\pi^2 R r$$

Parametrizzazione naturale del toro (pieno, e in part. la superficie)

$$P \left(R + \xi \cos \psi, \xi \sin \psi, z(\xi, \psi) \right) \quad \begin{matrix} 0 \leq \xi \leq r \\ 0 \leq \psi \leq 2\pi \end{matrix}$$

Quando inizia la rotazione attorno a z , z rimane costante mentre x e y diventano

$$x(\xi, \psi, \theta) = (R + \xi \cos \psi) \cos \theta$$

$$y(\xi, \psi, \theta) = (R + \xi \cos \psi) \sin \theta$$

Dunque il Toro (PIENO) è naturalmente parametrizzato da
 $\tilde{\gamma}(\varphi, \psi, \theta) = ((R + \varphi \cos \psi) \cos \theta, (R + \varphi \cos \psi) \sin \theta, \varphi \sin \psi)$ $0 \leq \varphi \leq r$
 $0 \leq \psi \leq 2\pi$
 $0 \leq \theta \leq \pi$
 e la SUPERFICIE ESTERNA DEL TORO sarà dunque data da $\varphi = r$:

$$\gamma(\psi, \theta) = ((R + r \cos \psi) \cos \theta, (R + r \cos \psi) \sin \theta, r \sin \psi).$$

$$J_{\gamma} = \begin{pmatrix} -r \sin \psi \cos \theta & -(R + r \cos \psi) \sin \theta \\ -r \sin \psi \sin \theta & (R + r \cos \psi) \cos \theta \\ r \cos \psi & 0 \end{pmatrix} \leadsto d\sigma = \sqrt{\begin{matrix} r^2 \sin^2 \psi (R + r \cos \psi)^2 \\ + r^2 \cos^2 \psi (R + r \cos \psi)^2 \sin^2 \theta \\ + r^2 \sin^2 \psi (R + r \cos \psi)^2 \cos^2 \theta \end{matrix}} d\psi d\theta = r(R + r \cos \psi) d\psi d\theta$$

$$\Rightarrow \text{Area}(T) = \int_0^2 d\theta \int_0^{2\pi} r(R + r \cos \psi) d\psi = 2Rr \cdot 2\pi \quad (\text{come prima}).$$

Per calcolare il baricentro di T devo usare le parametrizzazioni...

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{2\pi R r 2} \int_S x d\sigma = \frac{1}{2\pi R r 2} \int_0^2 d\theta \int_0^{2\pi} (R + r \cos \psi) \cos \theta \cdot r(R + r \cos \psi) d\psi \\ &= \frac{r \sin 2}{2\pi R r 2} \int_0^{2\pi} (R + r \cos \psi)^2 d\psi = \frac{\sin 2}{2\pi R r 2} \left(R^2 \psi + 2Rr \psi + r^2 \frac{\sin 2\psi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\sin 2}{2\pi R r 2} (2\pi R^2 + 2\pi Rr) = \frac{\sin 2}{2} \frac{2R^2 + r^2}{2R} \quad (\text{N.B.: } \lim_{2 \rightarrow 0} x_G = \frac{2R^2 + r^2}{2R} < R + r) \end{aligned}$$

$$y_G = \frac{1}{2\pi R r 2} \int_S y d\sigma = \frac{1}{2\pi R r 2} \int_0^2 d\theta \int_0^{2\pi} (R + r \cos \psi) \sin \theta \cdot r(R + r \cos \psi) d\psi = \frac{1 - \cos 2}{2} \cdot \frac{2R^2 + r^2}{2R}.$$

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{2\pi R r 2} \int_S z d\sigma = \frac{1}{2\pi R r 2} \int_0^2 d\theta \int_0^{2\pi} r \sin \psi \cdot r(R + r \cos \psi) d\psi \\ &= \frac{r^2}{2\pi R r 2} \int_0^{2\pi} \sin \psi (R + r \cos \psi) d\psi = \frac{r}{2\pi R} \left(-R \cos \psi - \frac{r}{2} \sin 2\psi \right) \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad (\text{ovvio per simmetria!}) \end{aligned}$$

P.S. Volendo posso usare le parametrizzazioni del Toro pieno per ricalcolare il volume già trovato nelle lezioni precedenti (veniva $2\pi^2 R r^2$).

Intendo $\tilde{\gamma}(\varphi, \psi, \theta) = ((R + \varphi \cos \psi) \cos \theta, (R + \varphi \cos \psi) \sin \theta, \varphi \sin \psi)$
 che un cambio di variabili in $\mathbb{R}^3$ (il toro pieno diviso il parallelepipedo $[0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, 2]$):

$$J_{\tilde{\gamma}} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\varphi \sin \psi \cos \theta & -(R + \varphi \cos \psi) \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta & -\varphi \sin \psi \sin \theta & (R + \varphi \cos \psi) \cos \theta \\ \sin \psi & \varphi \cos \psi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto |\det J_{\tilde{\gamma}}| = \varphi(R + \varphi \cos \psi), \text{ e dunque il volume è}$$

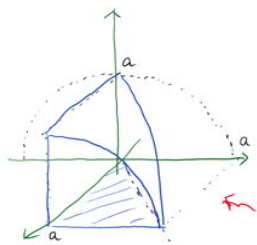
$$\int_0^2 d\theta \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^r \varphi (R + \varphi \cos \psi) d\varphi = 2 \cdot 2\pi \cdot R \cdot \left(\frac{\varphi^2}{2} \right) \Big|_0^r = 2\pi^2 R r^2$$

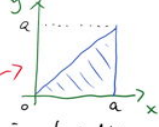
$$(\text{dunque per } 2 = 2\pi \text{ si ritrova } 2\pi^2 R r^2)$$

SOLUZIONE DI UN ESERCIZIO
ASSEGNATO IN PRECEDENZA

- (23) Disegnare e calcolare (se possibile in più modi) i volumi di
 $E_1 = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq x \leq a, 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - y^2}\}$
 $E_2 = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq a^2, z^2 + x^2 \leq a^2\}$ (ove $a > 0$).

- Iniziamo da E_1 . La condizione $z \leq \sqrt{a^2 - y^2}$, una volta che $z \geq 0$ (come vedremo) equivale a $z^2 \leq a^2 - y^2$, ovvero $y^2 + z^2 \leq a^2$: si tratta dunque della porzione del cilindro $y^2 + z^2 \leq a^2$ che sta sopra il piano orizzontale. C'è inoltre la condizione $0 \leq y \leq x \leq a$, che ci dice che di questa porzione dobbiamo



prendere il pezzo che sta sopra il triangolo del piano orizzontale $0 \leq y \leq x \leq a$, dato da questa figura a destra  e che ripartiamo anche nelle situazioni tridim. a sinistra.

ATTENZIONE: Contrariamente a questo potrebbe sembrare, non si tratta delle metà del quarto di cilindro!

Calcoliamo il volume in ben 6 modi diversi, cercando ogni volta di far attenzione a quali sono le sezioni.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Prima di iniziare, evidenziamo due primitive utili:} \\ \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2} \left(a^2 \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + u \sqrt{a^2 - u^2} \right) + K, \\ \int \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) du = u \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + a^2 - u^2 + K. \end{array} \right]$$

① Per (y,z)-fili : per un filo $(y,z) \in \square_a$ si ha $y \leq x \leq a$, dunque

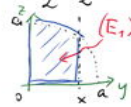
$$Vol(E_1) = \int_{\square_a} dy dz \int_y^a dx = \int_{\square_a} (a-y) dy dz = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a (a - \rho \sin \theta) \rho d\rho$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} \sin \theta \right) \Big|_0^a d\theta = a^3 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sin \theta \right) d\theta = a^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right).$$

② Per y-filare : filo $0 \leq y \leq a$ si ha $\begin{cases} 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - y^2} \\ y \leq x \leq a \end{cases}$ (rettangolo), dunque

$$Vol(E_1) = \int_0^a dy \int_{\square} dx dz = \int_0^a (a-y) \sqrt{a^2 - y^2} dy =$$

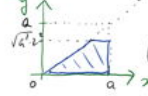
$$= \left[\frac{a^2}{2} (a^2 \arcsin \frac{y}{a} + y \sqrt{a^2 - y^2}) + \frac{1}{3} (a^2 - y^2)^{3/2} \right]_0^a = \left(\frac{a^3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \frac{a^3}{3} \quad (\text{come prima})$$

③ Per x-filare : filo $0 \leq x \leq a$ si ha $\begin{cases} 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - y^2} \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$  dunque

$$Vol(E_1) = \int_0^a dx \int_{(E_1)_x} dy dz = \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{a^2 - y^2} dy =$$

$$= \int_0^a \left(\frac{1}{2} (a^2 \arcsin \frac{y}{a} + y \sqrt{a^2 - y^2}) \right) \Big|_{y=0}^{y=x} dx = \frac{1}{2} \int_0^a (a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[a^2 (x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}) - \frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{3/2} \right]_0^a = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} a^3 - \frac{2}{3} a^3 \right) \quad (\text{ok})$$

④ Per z-filare : filo $0 \leq z \leq a$ si ha $\begin{cases} y \leq \sqrt{a^2 - z^2} \\ 0 \leq y \leq x \leq a \end{cases}$  (trapezio):

$$Vol(E_1) = \int_0^a dz \int_{\square} dy dx = \int_0^a Area(\square) dz = \int_0^a \frac{1}{2} (a + (a - \sqrt{a^2 - z^2})) \sqrt{a^2 - z^2} dz$$

$$= \int_0^a \left(a \sqrt{a^2 - z^2} - \frac{1}{2} (a^2 - z^2) \right) dz = \dots = \frac{a^3}{3} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) \quad (\text{ok})$$

⑤ Per (x,z)-fili : filo $(x,z) \in [0,a]^2$ si ha $\begin{cases} y \leq \sqrt{a^2 - z^2} \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$ dunque

$$0 \leq y \leq \min \{ x, \sqrt{a^2 - z^2} \} : \text{ si ha } x \leq \sqrt{a^2 - z^2} \Leftrightarrow x^2 + z^2 \leq a^2,$$

dunque $\begin{cases} x \geq 0, z \geq 0, x^2 + z^2 \leq a^2 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0, z \geq 0, x^2 + z^2 \geq a^2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - z^2} \end{cases}$

$$Vol(E_1) = \int_{\square} dx dz \int_0^x dy + \int_{\square} dx dz \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} dy = \int_{\square} x dx dz + \int_{\square} \sqrt{a^2 - z^2} dx dz$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a \rho \cos \theta \rho d\rho + \int_0^a dz \int_{\sqrt{a^2 - z^2}}^a \sqrt{a^2 - z^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho +$$

$$+ \int_0^a \sqrt{a^2 - z^2} (a - \sqrt{a^2 - z^2}) dz = \frac{a^3}{3} + \int_0^a (a \sqrt{a^2 - z^2} - (a^2 - z^2)) dz =$$

$$\dots = \frac{a^3}{3} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) \quad (\text{ok})$$

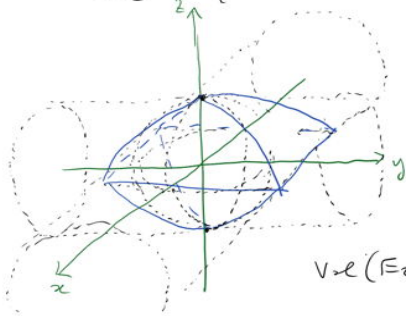
⑥ Per (x,y)-fili : filo $(x,y) \in \square_a$ si ha $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - y^2}$:

$$\int_{\square} dx dy \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} dz = \int_{\square} \sqrt{a^2 - y^2} dx dy = \int_0^a y \int_y^a \sqrt{a^2 - y^2} dx = \int_0^a (a-y) \sqrt{a^2 - y^2} dy$$

che è lo stesso integrale del calcolo ② per y-filare.

- $E_2 = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leq a^2, y^2 + z^2 \leq a^2\}$ è l'intersezione di due cilindri uguali di assi centrali rispettivamente l'asse x e l'asse y .



① z-fine: fissi $-a \leq z \leq a$ e la

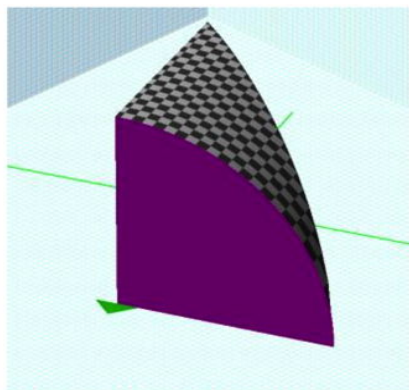
$$\begin{cases} |x| \leq \sqrt{a^2 - z^2} \\ |y| \leq \sqrt{a^2 - z^2} \end{cases} \quad \left(\text{quadrato di lato } 2\sqrt{a^2 - z^2} \right)$$

$$\text{Vol}(E_2) = \int_{-a}^a dz \int_{\square} dx dy = \int_{-a}^a 4(a^2 - z^2) dz = 4 \left(a^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-a}^a = \frac{16a^3}{3}.$$

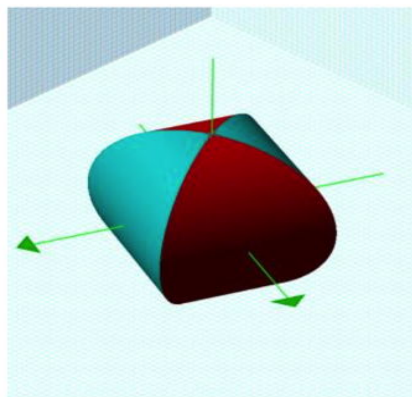
② Per (x,y)-fine: fissi $(x, y) \in [-a, a]^2$, e la $\begin{cases} |z| \leq \sqrt{a^2 - x^2} \\ |z| \leq \sqrt{a^2 - y^2} \end{cases}$
ovvero $|z| \leq \min \{ \sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 - y^2} \}$.

Ragionando per simmetria, possiamo limitarci al triangolo $(x, y) \in \triangle$ sul quale, essend $x \geq y$, vale $|z| \leq \sqrt{a^2 - x^2}$, e poi moltiplicare il volume ottenuto per 8.

$$\begin{aligned} \text{Vol}(E_2) &= 8 \int_{\triangle} dx dy \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} dz = 16 \int_{\triangle} \sqrt{a^2 - x^2} dx dy = \\ &= 16 \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} dy = 16 \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = 16 \left(-\frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{3/2} \right) \Big|_0^a = \frac{16a^3}{3} \quad (\text{OK}) \end{aligned}$$



L'insieme E_1



L'insieme E_2