UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 31/10/2024

Ricordiamo brevemente la nozione e risultati sui **CAMPI VETTORIALI**.

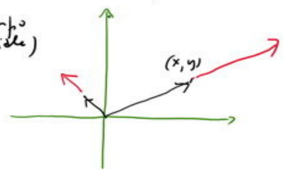
La definizione: dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, un CAMPO VETTORIALE su A è una funzione $F : A \to \mathbb{R}^n$ (ad ogni punto di A associa un vettore di $\mathbb{R}^n$).

Ex. $n = 1$

$F : A \to \mathbb{R}$ funzione

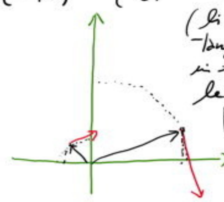
$n = 2$ $\quad F_1(x,y) = (x,y)$

(campo radiale)



$F_2(x,y) = (y, -x)$

(linee di campo, tangenti al campo in ogni punto, sono le circonferenze percorse in senso orario).



Se $\gamma : [a,b] \to A$ di classe C^1, l'INTEGRALE DI LINEA di F lungo γ è

$$\boxed{\int_\gamma F \cdot dx := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt}$$

(Es. se F è un campo di forze, l'integrale di linea calcola il lavoro di F)

Rimandiamo alcune proprietà già viste in Analisi II.

Prop.

(a) (INTEGRALE DI LINEA DI UN CAMPO CONSERVATIVO)

Se F è campo conservativo con potenziale $f : A \to \mathbb{R}$ (ovvero $F = \nabla f$) si ha $\int_\gamma F \cdot dx = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

In part.: l'integrale di linea di F non dipende dal percorso seguito per andare da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

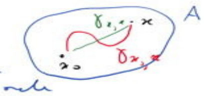
(b) Le sgg. proprietà sono equivalenti:

(i) F è conservativo

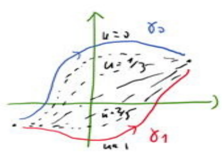
(ii) l'integrale di linea di F dipende solo dagli estremi.

(iii) l'integrale di linea di F lungo un circuito è nullo.

In tali ipotesi, fissato a piacere un punto $x_0 \in A$, un potenziale di F è dato da $f(x) = \int_{\gamma_{x_0,x}} F \cdot dx$ ove $\gamma_{x_0,x}$ è una qualunque curva che va da x_0 a x.



(c) L'integrale di linea di un campo irrotazionale è invariante sia per omotopie di curve a estremi fissati sia per omotopie di circuiti (non necessariamente con punto base fissato).
In particolare: un campo irrotazionale su un A sempl. connesso è conservativo.

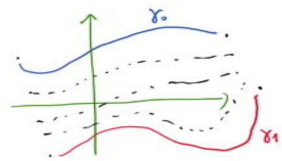


OMOTOPIA: deformazione continua tra cammini

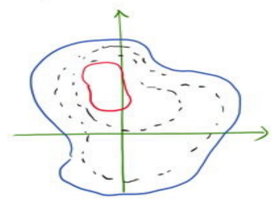
$\Gamma : \overset{t}{[a,b]} \times \overset{u}{[0,1]} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continua

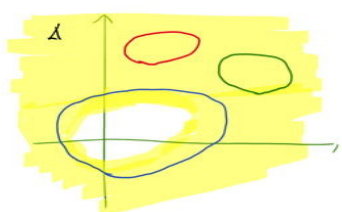
con $\Gamma(t,0) = \gamma_0(t)$, $\Gamma(t,1) = \gamma_1(t)$

(qui si richiede che l'omotopia sia anche a estremi fissati, ovvero $\Gamma(a,u)$ e $\Gamma(b,u)$ non dipendano da u



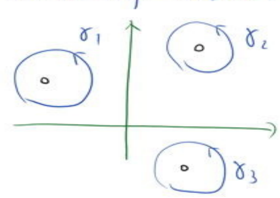
Queste invece sono omotopie a estremi non fissati





In questo dominio bucato (non semplicemente connesso) il circuito blu non è omotopo agli altri due, che invece lo sono tra loro.

(d) Sia A non sempl. connesso, e si consideri una famiglia massimale di circuiti semplici in A non nullomotopi (non omotopi a una costante) e non omotopi tra loro.
Se un campo irrotazionale ha integrale nullo su ciascuno di questi circuiti, allora esso è conservativo.

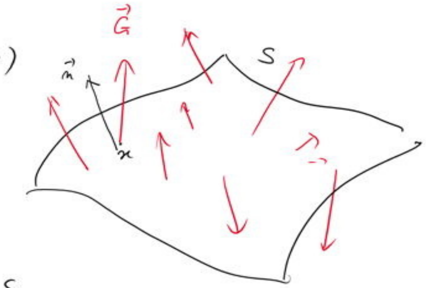


FLUSSO DI UN CAMPO ATTRAVERSO UN'IPERSUPERFICIE ORIENTATA

$G: A \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale ($A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto)

$S \subseteq A$ ipersuperficie orientata

$\vec{n}$ versore normale positivo.



Voglio definire una grandezza che descriva "come" e "quanto" il campo G attraversa S.

Essa dovrà dipendere:

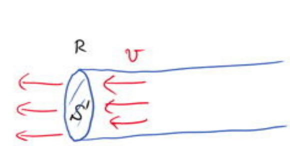
- dall'intensità del campo G;
- dalla estensione di S;
- dalla posizione reciproca di G e S (quanto più G è perpendicolare a S, tanto maggiore sarà l'attraversamento).

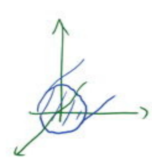
È allora naturale definire il flusso di G attraverso S così:

$$\boxed{\phi_S(G) := \int_S (G\cdot\vec{n})\, d\lambda_S}$$

Ex. Se G è il campo delle velocità di un fluido (m/sec), e S è superficie di $\mathbb{R}^3$, allora $\phi_S(G)$ è la PORTATA MEDIA del fluido attraverso S (quantità di fluido/unità di tempo, m^3/sec).

Ad esempio, facciamo il conto in un caso semplice: condotta cilindrica con scorrimento di liquido a velocità costante

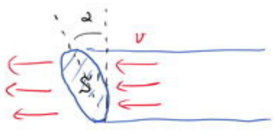
• 

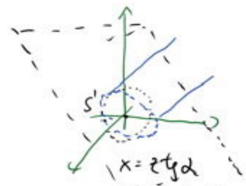


$\vec{G} = v\vec{e}_1$, $\vec{n} = \vec{e}_1$, $\vec{G}\cdot\vec{n} = v$

$$\phi_S(\vec{G}) = \int_{\{y^2+z^2\le R^2\}} v\, dy\,dz = v\cdot \text{Area}(S) = vR^2\pi$$

Ma il flusso (in questo quadro costante) non dovrebbe cambiare con altre sezioni del tubo: vediamone due.

• 



$S' : \{ (z \,\mathrm{tg}\,\alpha, y, z) : (y,z) \in S \}$

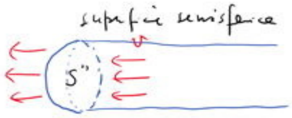
$\vec{G} = v \vec{e}_1 \qquad g(x,y,z) = x - z\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0$

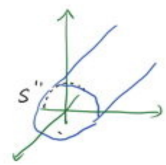
$\nabla g = (1, 0, -\mathrm{tg}\,\alpha) \qquad \vec{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}}_{\cos\alpha} (1, 0, -\mathrm{tg}\,\alpha)$

$\Rightarrow \vec{n} = (\cos\alpha, 0, -\sin\alpha)$

$\vec{G} \cdot \vec{n} = (v, 0, 0) \cdot (\cos\alpha, 0, -\sin\alpha) = v\cos\alpha \qquad d\sigma = \frac{1}{\cos\alpha}\, dy\, dz$ (usare coseni)

$$\phi_{S'}(\vec{G}) = \int_{S'} (\vec{G}\cdot\vec{n})\, d\sigma = \int_S v \cancel{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos\alpha}}\, dy\, dz = vR^2\pi$$

• 



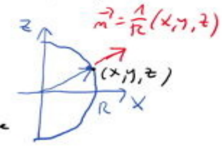
$S'' : \{ (R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi) \}$

$-\pi/2 \le \theta \le \pi/2, \quad 0 \le \varphi \le \pi$

$d\sigma = R^2 \sin\varphi \, d\theta\, d\varphi$

$\vec{n}(x,y,z) = \frac{1}{R}(x,y,z)$ (sulla superficie S'')

$G = v\vec{e}_1 = (v, 0, 0)$

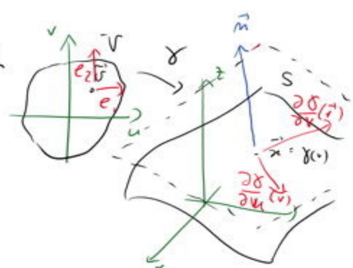


$$\Phi_{S''}(G) = \int_{S''} (G\cdot\vec{n})\, d\sigma = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^\pi (v,0,0) \cdot \frac{1}{\cancel{R}} (\cancel{R}\cos\theta\sin\varphi, \cancel{R}\sin\theta\sin\varphi, \cancel{R}\cos\varphi) \cdot R^2 \sin\varphi\, d\varphi$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^\pi R^2 v \cos\theta \sin^2\varphi\, d\varphi = R^2 v \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^\pi \sin^2\varphi\, d\varphi = R^2 v \pi$$

Questi sopra sono in realtà esempi facili, in cui la descrizione di $\vec{n}$ è intuitiva.
Nella pratica servirà invece una formula che permetta di calcolare il flusso in termini di una descrizione parametrica di S.

Supponiamo che S sia parametrizzata come varietà orientata da $\gamma : V \xrightarrow{\sim} S \subseteq \mathbb{R}^n$ con V aperto di $\mathbb{R}^{n-1}$ con parametri $(v_1, \dots, v_{n-1})$: si intende altresì che $\left(\frac{\partial\gamma}{\partial v_1}(v), \dots, \frac{\partial\gamma}{\partial v_{n-1}}(v)\right)$ è una base positiva di $T_{\gamma(v)} S$.



Prop.

$$\Phi_S(G) = \int_V \det\left(G(\gamma(v)), J_\gamma(v)\right) dv_1 \cdots dv_{n-1}$$

$$= \int_V \det \begin{pmatrix} G_1(\gamma(v)) & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \frac{\partial\gamma}{\partial v_1}(v) & \cdots & \frac{\partial\gamma}{\partial v_{n-1}}(v) \\ G_n(\gamma(v)) & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} dv_1 \cdots dv_{n-1}$$

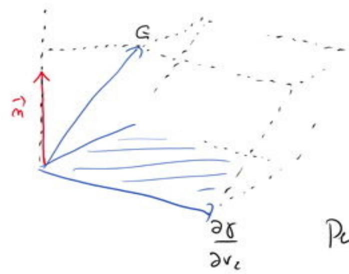
Dim. In $\vec{x} = \gamma(\vec{v})$ sia $\vec{m}(\vec{x})$ il versore normale a S positivo (ovvero $\left(\vec{m}, \frac{\partial\gamma}{\partial v_1}(v), \dots, \frac{\partial\gamma}{\partial v_n}(v)\right)$ è base positiva di $\mathbb{R}^n$).

Si ha allora
$$G(\gamma(v))\cdot\vec{m}(\gamma(v))\sqrt{\det\left(J_\gamma^t J_\gamma\right)} = \det\left(G(\gamma(v)), J_\gamma(v)\right).$$

dell' vettore G sulle direzioni ortogonale a $\frac{\partial\gamma}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial\gamma}{\partial v_{n-1}}$

volume $(n-1)$-dim del parallelepipedo gener. dalle $\frac{\partial\gamma}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial\gamma}{\partial v_{n-1}}$

volume n-dim del parallelepipedo gener. da $G, \frac{\partial\gamma}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial\gamma}{\partial v_{n-1}}$



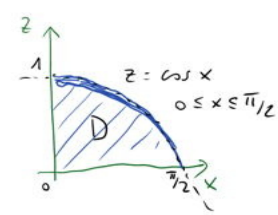
Pertanto, integrando ambo i membri su V ottengo ottengo il risultato. //

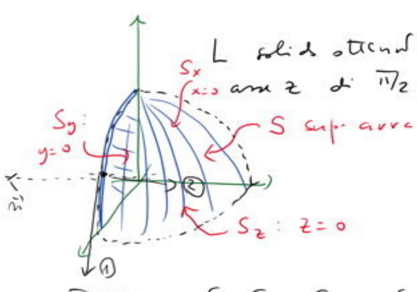
Mettiamo bene in evidenza il caso di una superficie in $\mathbb{R}^3$:

$$\Phi_S(G) = \int_V \det\begin{pmatrix} G_1(\gamma(u,v)) & \frac{\partial\gamma_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\gamma_1}{\partial v}(u,v) \\ G_2(\gamma(u,v)) & \frac{\partial\gamma_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\gamma_2}{\partial v}(u,v) \\ G_3(\gamma(u,v)) & \frac{\partial\gamma_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\gamma_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} du\,dv$$

$$= \int_V \left(G(\gamma(u,v)) \times \frac{\partial\gamma}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial\gamma}{\partial v}(u,v) \right) du\,dv.$$

Ex.





L solido ottenuto ruotando D attorno asse z di $\pi/2$ in senso antiorario.

Calcoliamo i flussi attraverso S, S_x, S_y e S_z dei due campi

$G_1 = (x, -y, 0)$, $G_2 = (x, y, 0)$.

G_1 e G_2 sono campi orizzontali $\Rightarrow$ $\Phi_{S_z}(G_1) = \Phi_{S_z}(G_2) = 0$

S_y $(y=0)$: G_1 su S_y diventa $(x, 0, 0)$ (parallelo asse x perché le sue componenti y e z sono nulle)

$\Rightarrow \Phi_{S_y}(G_1) = 0$ (perché G_1 su S_y è parallelo a S_y stessa)

Idem per G_2; e idem per S_x, dunque anche $\Phi_{S_x}(G_1) = \Phi_{S_x}(G_2) = 0$

$$S = \Big\{ \overset{\gamma(\rho,\theta)\,=}{\big(\underset{x(\rho,\theta)}{\rho\cos\theta},\ \underset{y(\rho,\theta)}{\rho\sin\theta},\ \underset{z(\rho,\theta)}{\cos\rho}\big)} : 0 \le \rho \le \pi/2,\ 0 \le \theta \le \pi/2 \Big\}$$

Orientazione applicata: normale uscente

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} = (\cos\theta, \sin\theta, -\sin\rho) \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial\theta} = (-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, 0)$$

$$\Phi_S(G_1) = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \det \begin{pmatrix} \overset{(x)}{\rho\cos\theta} & \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \overset{(-y)}{-\rho\sin\theta} & \sin\theta & \rho\cos\theta \\ \underset{\uparrow\, G_1}{\overset{(0)}{0}} & -\sin\rho & 0 \end{pmatrix} d\rho$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\rho \cdot \rho^2 \cos 2\theta \, d\rho = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta \, d\theta}_{=0} \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\rho \, d\rho = 0$$

$$\Phi_S(G_2) = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \det \begin{pmatrix} \overset{(x)}{\rho\cos\theta} & \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \overset{(y)}{\rho\sin\theta} & \sin\theta & \rho\cos\theta \\ \underset{\uparrow\, G_2}{\overset{(0)}{0}} & -\sin\rho & 0 \end{pmatrix} d\rho$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\rho \, d\rho = \frac{\pi}{2}\Big(-\rho^2\cos\rho + 2\rho\sin\rho + 2\cos\rho\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi(\pi-2)}{2}$$