UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 08/11/2024

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE: TEORIA GENERALE

Ci occuperemo di trovare una n-upla di funzioni incognite $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ a valori complessi a partire da un dato sistema di equazioni differenziali, che porremo fin da subito in FORMA NORMALE:

$$y' = f(t, y) \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \qquad \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

ove $f : U \to \mathbb{C}^n$ è una funzione continua definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, ovvero $f_j : U \to \mathbb{C}$ son funzioni scalari continue.

Questa forma è in realtà molto generale, perché comprende anche ad esempio le e.d.o. scalari di ordine superiore:

$$y^{(n)} = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

(e.d.o. scalare nell'incognita $y(t) : I \to \mathbb{C}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ in forma normale di ordine n)

ponendo $(z_1, \dots, z_n) := (y, y', \dots, y^{(n-1)})$, l'equaz. data equivale al sistema del I° ordine

$$z' = f(t, z) : \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1}' = z_n \\ z_n' = g(t, z_1, \dots, z_n) \end{cases} \qquad \text{con } f(t, z_1, \dots, z_n) = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ g(t, z_1, \dots, z_n) \end{pmatrix}$$

Ma anche i sistemi differenziali di ordine superiore: es.:

$$\begin{cases} u'' = g(t, u, u', v, v', v'', w, w') \\ v''' = h(\;\text{"}\quad \text{"}\quad \text{"}\;) \\ w'' = k(\;\text{"}\quad \text{"}\quad \text{"}\;) \end{cases} \qquad \text{ponendo}$$

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7) = (u, u', v, v', v'', w, w')$$

equivale a

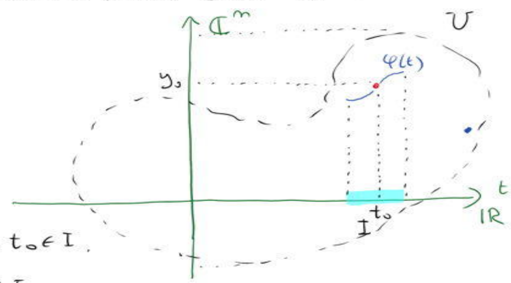
$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = g(t, z_1, \dots, z_7) \\ z_3' = z_4 \\ z_4' = z_5 \\ z_5' = h(t, z_1, \dots, z_7) \\ z_6' = z_7 \\ z_7' = k(t, z_1, \dots, z_7) \end{cases}$$

Sia dunque dato un sistema differenziale del I° ordine

$y' = f(t,y)$ con $y = (y_1, \dots, y_n)(t)$, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$, U aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$.

PROBLEMA DI CAUCHY : assegnare, oltre all'e.d.o., anche il valore y_0 che la soluzione cercata deve assumere in un certo t_0 :

$$(\ast) \qquad \boxed{\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}}$$



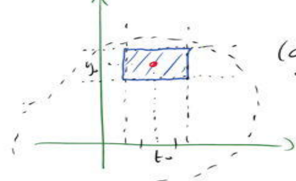
ove $(t_0, y_0) \in U$

Ovvero, cerco le funzioni $\varphi : I \to \mathbb{C}^n$ di classe C^1 su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ con $t_0 \in I$, tali che
$$\begin{cases} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in I \\ \varphi(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Bisognerà dunque che i valori di φ non escano dalla proiezione di U su $\mathbb{C}^n$. A tal fine scegliamo fin da subito $a, b > 0$ tali che, denotando $I_a := [t_0 - a, t_0 + a] = \overline{B_{t_0}(a)}$ e $J_b := \{ y \in \mathbb{C}^n : \|y - y_0\| \le b \} = \overline{B_{y_0}(b)}$

si abbia che $I_a \times J_b \subset U$

(tali a, b esistono perché U è aperto e i rettangoli chiusi sono una base di intorni di (t_0, y_0)).



(cilindro di sicurezza)

Ci interessa studiare esistenza e unicità di una tale soluzione $\varphi(t)$ e ottenere informazioni anche sull'intervallo I su cui è definita.

Il risultato fondamentale è il seguente:

Teo. (CAUCHY-LIPSCHITZ, ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE)

Se in $I_a \times J_b$ la funzione f oltre che continua (che è per ipotesi) è anche lipschitziana rispetto a y uniformemente risp. a t:

$$\exists L \geq 0 : \|f(t,y_1)-f(t,y_2)\| \leq L\|y_1-y_2\| \quad \forall t \in I_a \ \forall y_1,y_2 \in J_b$$

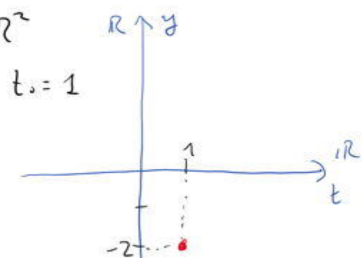
allora esistono $0<\delta\leq a$ e un'unica soluzione $\varphi: I_\delta \to J_b$ di classe $\mathcal{C}^1$ del problema $(*)$.

$\boxed{\text{Ex.}}$ Un paio di esempi su e.d.o. scalari già note.

- $\begin{cases} y' = ty^3 \\ y(1) = -2 \end{cases}$ e.d.o. a variabili separabili del I° ord. in forma normale

$y' = f(t,y) = ty^3$ è $\mathcal{C}^\infty$ su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ (per Cauchy-Lipsch.) $\exists!$ soluz. $\varphi(t)$ all'intorno di $t_0=1$



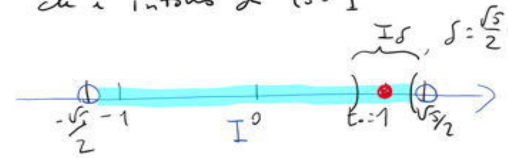
È a var. separabili, dunque sappiamo risolverla.

$y^{-3}\,dy = t\,dt \rightsquigarrow \dfrac{y^{-2}}{-2} = \dfrac{t^2}{2}+k \to \dfrac{1}{y^2} = k-t^2$

$\xrightarrow{y(1)=-2} \dfrac{1}{(-2)^2} = k - 1^2 \Rightarrow k = 5/4$. Dunque

$\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5-4t^2}{4} \to y(t) \overset{y(1)<0}{=} \cancel{\pm}\dfrac{2}{\sqrt{5-4t^2}}$ dunque $y(t) = -\dfrac{2}{\sqrt{5-4t^2}}$

$y(t)$ è definita in $I = \left]-\sqrt{5}/2, \sqrt{5}/2\right[$ che è intorno di $t_0=1$



- $y''+2y'+3y = 9t-4\cos t$ E.D.O. LINEARE DEL $\overline{\text{II}}^\circ$ ORDINE IN "F. NORMALE"

Posto $(z_1,z_2) = (y,y')$, l'equazione equivale al sistema del I° ordine

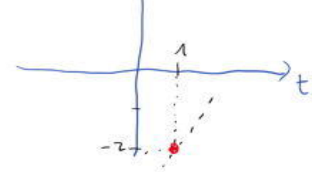
$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -3z_1 - 2z_2 + 9t - 4\cos t \end{cases}$ cioè $z' = g(t,z) = (z_2, -3z_1-2z_2+9t-4\cos t)$

Dato di Cauchy: $z(t_0) = (z_1(t_0), z_2(t_0)) = (y(t_0), y'(t_0)) = (\alpha, \beta)$

g è $\mathcal{C}^\infty \xrightarrow{\text{C.L.}} \exists!\ y(t)$ all'intorno di t_0 t.c. $y(t_0)=\alpha$, $y'(t_0)=\beta$

Risolviamo: $y''+2y'+3y = \overbrace{9t}^{b_1(t)} - \overbrace{4\cos t}^{b_2(t)}$

Eq. caratteristica $\lambda^2+2\lambda+3=0 \quad \lambda = -1\pm\sqrt{1-3} = -1\pm i\sqrt{2}$



$\Rightarrow$ soluzioni dell'omogenea associata sono
$$y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = e^{-t}\left(Ae^{i\sqrt{2}t} + Be^{-i\sqrt{2}t}\right) \quad (A, B \in \mathbb{C})$$
$$= e^{-t}\left(C\cos(\sqrt{2}t) + D\sin(\sqrt{2}t)\right) \quad (C, D \in \mathbb{C})$$

Per $b_1(t) = 9t$: $\tilde{y}_1(t) = at + b$ $\quad \tilde{y}_1'' + 2\tilde{y}_1' + 3\tilde{y}_1 = 9t \quad 0 + 2a + 3(at+b) = 9t$
$3at + (2a+3b) = 9t \quad (3a, 2a+3b) = (9, 0) \Rightarrow a = 3,\ b = -2$

Per $b_2(t) = -4\cos t$: $\tilde{y}_2(t) = a\cos t + b\sin t \quad \tilde{y}_2'' + 2\tilde{y}_2' + 3\tilde{y}_2 = -4\cos t$
$(-a+2b+3a)\cos t + (-b-2a+3b)\sin t = -4\cos t \quad (2a+2b, -2a+2b) = (-4, 0)$
$\begin{cases} a+b = -2 \\ -a+b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \tilde{y}_2(t) = -\cos t - \sin t$

Soluzione generale: $y(t) = e^{-t}\left(C\cos(t\sqrt{2}) + D\sin(t\sqrt{2})\right) + 3t - 2 - \cos t - \sin t \quad (C, D \in \mathbb{C})$

Aggiungiamo un dato di Cauchy, ad es. $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$

Derivo: $y'(t) = e^{-t}\left((-C+D\sqrt{2})\cos(t\sqrt{2}) + (-D-C\sqrt{2})\sin(t\sqrt{2})\right) + 3 + \sin t - \cos t$

$\begin{cases} y(0) = C - 2 - 1 = -1 \\ y'(0) = -C + D\sqrt{2} + 3 - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 2 \\ D = \sqrt{2} \end{cases}$

Quindi $y(t) = e^{-t}\left(2\cos(t\sqrt{2}) + \sqrt{2}\sin(t\sqrt{2})\right) + 3t - 2 - \cos t - \sin t$

Dominio: $I = \mathbb{R}$, $\delta = +\infty$ (non si perde nulla nel dominio: è una buona proprietà delle eq. diff. lineari...)

Ci occupiamo ora della dimostrazione del Teorema di C-L locale.

Primo passo: riformulazione integrale del problema di Cauchy (Volterra).

Prop. $(*)\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \iff y = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau \quad (**)$

Dim. "$\Rightarrow$" se $y(t)$ soddisfa le cond. a sx, integrando ambo i membri di $y' = f(t, y)$ tra $\tau = t_0$ e $\tau = t$ otteniamo
$$\int_{t_0}^{t} y'(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau \quad \text{ma a sx}: \left(y(\tau)\right]_{t_0}^{t} = y(t) - \underset{y(t_0)}{y_0}$$
dunque $y - y_0 = \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau$ come si voleva

"$\Leftarrow$" La $y(t)$ al 1° m. è $\mathcal{C}^1$ (perché lo è il 2° membro).
Poi, derivando ambo i membri risp. t e ricordando il

T.F.C., ottengo $y' = f(t, y(t))$.

Inoltre, calcolando ambo i membri in $t=t_0$ ho $y(t_0) = y_0 + 0 = y_0$.

Dobbiamo ora richiamare un già noto (ANALISI 2) risultato di Topologia.

Ricordiamo che, se (X,d) è uno spazio metrico, una CONTRAZIONE è una funzione $T : X \longrightarrow X$ che "contrae le distanze":

$\exists\ 0 \le \alpha < 1$ t.c. $d(Tx_1, Tx_2) \le \alpha\, d(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X$.

Sappiamo che una contrazione è uniformemente continua, ovvero

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(Tx_1, Tx_2) < \varepsilon$ (dato $\varepsilon > 0$ basta porre $\delta = \varepsilon/\alpha$).

Serve inoltre ricordare la nozione di spazio metrico COMPLETO, nel quale ogni successione di Cauchy (ovvero, ad elementi sempre più vicini tra loro) ammette limite.

Teorema (LEMMA DELLE CONTRAZIONI)

(a) Se (X,d) è spazio metrico completo, e $T : X \to X$ contrazione, allora T ha un unico punto unito, cioè $\exists!\, \tilde{x} \in X : T(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

Più in generale:

(b) Se $\exists r \in \mathbb{N}$ t.c. $T^r = \overbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}^{r \text{ volte}} : X \to X$ sia contrazione, allora T ha un unico punto unito, che è quello di T^r.

Dim (a) Già provato nel Corso di Analisi II.

(b) UNICITÀ: se $\tilde{x}$ è punto unito per T lo è anche per T^r, che è contrazione (dunque è unico per (a)).

ESISTENZA: sia ora $\tilde{x}$ il punto unito di T^r.

Allora $T^r(T\tilde{x}) = T(T^r \tilde{x}) = T\tilde{x}$, dunque $T\tilde{x}$ è punto unito di $T^r \Rightarrow T\tilde{x} = \tilde{x}$ per unicità. //

Passiamo ora alla dimostrazione vera e propria del T. Cauchy-Lipschitz locale.

Poniamo $M := \max\{\|f(t,y)\| : (t,y) \in I_a \times J_b\}$ (finito e ≥ 0 per Weierstrass).

- Se $M = 0$ il Teor. è dimostrato: in tal caso il problema diventa

$$\begin{cases} y' \equiv 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$ che ha soluz. costante $y \equiv y_0$ con $\delta = a$

- Se $L = 0$, idem: in tal caso f è costante risp. y ovvero $f(t,y) = a(t)$:

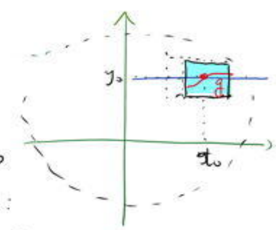
• se $L=0$, idem: in tal caso f è costante risp. y ovvero $f(t,y)=a(t)$:

$$\begin{cases} y' = a(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$ che ha soluzione $y(t) = y_0 + \int_{t_0} a(t)\,dt$, definita per $t \in I_\delta$ t.c. $0<\delta< b/M$ con $M := \max_{t\in I_a} |a(t)|$

• Nel caso generale, in cui $M>0$, $L>0$, scegliamo $0<\delta<\min\left\{a, \frac{1}{L}, \frac{b}{M}\right\}$. Scelto un tal δ, consideriamo

$V = \mathcal{C}^0(\overset{[t_0-\delta,\,t_0+\delta]}{I_\delta}, \mathbb{C}^n)$ che è uno spazio vettoriale normato e completo (SPAZIO DI BANACH) rispetto alla sup-norma $\|\psi\|_\infty = \max\{\|\psi(t)\| : t\in I_\delta\}$.
(il limite uniforme di una succ. di funzioni continue è continua).

All'interno di V consideriamo



$B = \{g \in V : \|g-y_0\|_\infty \le b\}$

(la palla delle funzioni $I_\delta \to \mathbb{C}^n$ che distano $\le b$ dalla costante y_0, ovvero le funzioni $I_\delta \to J_b$):
poiché B è una palla chiusa dentro V, anche B sarà uno spazio di Banach rispetto alla sup-norma.

Definiamo un operatore $T : B \longrightarrow B$ in questo modo:

se $\psi : I_\delta \to J_b$ (ovvero $\psi \in B$), definiamo

$$T\psi : I_\delta \to J_b, \quad (T\psi)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \psi(\tau))\,d\tau \quad (\text{come in } (**))$$

Se dimostro che T è una contrazione, ho finito:
infatti ci sarà un unico "punto" unito (cioè: funzione unita!) $\varphi : I_\delta \to J_b$ t.c. $T\varphi = \varphi$, ovvero φ soddisfa $(**)$.

Prima di tutto verifichiamo che, se $\psi\in B$, anche $T\psi \in B$, ovvero che $\|(T\psi)(t) - y_0\| \le b \quad \forall t \in I_\delta$:

$$\left\|\left(\cancel{y_0} + \int_{t_0}^t f(\tau,\psi(\tau))\,d\tau\right) - \cancel{y_0}\right\| = \left\|\int_{t_0}^t f(\tau,\psi(\tau))\,d\tau\right\|$$

$$\le \left|\int_{t_0}^t \underbrace{\|f(\tau,\psi(\tau))\|}_{\le M}\,d\tau\right| \le M\left|\int_{t_0}^t d\tau\right| = M|t-t_0| \le M\delta < \cancel{M}\frac{b}{\cancel{M}} = b \quad (\text{ok}).$$

$\exists \alpha < 1$

Vediamo ora che è contrazione, ovvero che $\|T\psi_1 - T\psi_2\|_\infty \le \alpha\|\psi_1-\psi_2\|_\infty$

se $t\in I_\delta$:

$$\|(T\psi_1)(t) - (T\psi_2)(t)\| = \left\|\cancel{y_0} + \int_{t_0}^t f(\tau,\psi_1(\tau))\,d\tau - \left(\cancel{y_0} + \int_{t_0}^t f(\tau,\psi_2(\tau))\,d\tau\right)\right\|$$

$$= \left\|\int_{t_0}^t \left(f(\tau,\psi_1(\tau)) - f(\tau,\psi_2(\tau))\right)d\tau\right\| \le \left|\int_{t_0}^t \underbrace{\|f(\tau,\psi_1(\tau)) - f(\tau,\psi_2(\tau))\|}_{\le L\|\psi_1(t)-\psi_2(t)\|}\,d\tau\right|$$

$$\le \left| \int_{t_0}^{t} L \,\|\varphi_1(\tau)-\varphi_2(\tau)\|\, d\tau \right| \le L\, \|\varphi_1-\varphi_2\|_\infty \left|\int_{t_0}^{t} d\tau\right|$$

$\le\delta$ $\quad$ $\alpha<1$

$$= L\cdot|t-t_0|\cdot\|\varphi_1-\varphi_2\|_\infty \le L\delta\, \|\varphi_1-\varphi_2\|_\infty \qquad //$$

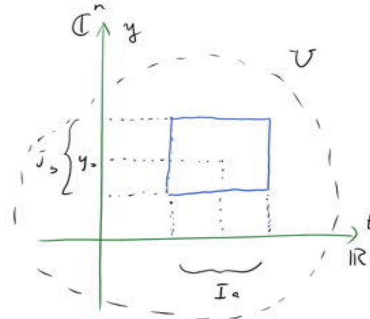
POSTILLA IMPORTANTE: in realtà si può scegliere $0<\delta<\min\{a, b/M\}$ (cioè non serve tener conto della costante di Lipschitz L).
Infatti si può provare per induzione che

$$\|(T^r\varphi_1)(t)-(T^r\varphi_2)(t)\| \le \frac{L^r}{r!}|t-t_0|^r\cdot\|\varphi_1-\varphi_2\|_\infty \le \underbrace{\frac{(L\delta)^r}{r!}}_{\text{INFINITESIMO!}}\|\varphi_1-\varphi_2\|_\infty$$

Se $r\in\mathbb{N}$ è abbastanza grande affinché $\frac{(L\delta)^r}{r!}<1$ allora T^r è contrazione: per quanto visto poco fa, T ammette comunque un unico punto unito. //

Alcuni commenti al T. Cauchy-Lipschitz di $\exists!$ locale ...

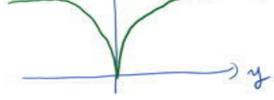
Se in $I_a\times J_b$ f è di classe $\mathcal{C}^1$ rispetto a y (caso molto comune!) le ipotesi del T. sono soddisfatte, con $L = \max\left\{\left\|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right\| : (t,y)\in I_a\times J_b\right\}$



Se le ipotesi del Teorema non sono soddisfatte, cosa succede?
Succede che potrebbero saltare esistenza e unicità della soluzione.
In realtà l'esistenza non salta, perché già è assicurata dalla sola continuità di f (Teorema di Peano: solo enunciato, Teor. 4.1.4)
Rischia invece di saltare l'unicità (non è certo, ma si rischia!)

Ex. $(*)\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$ $\quad f(t,y)=2\sqrt{|y|}$ EQ. DIFF. AUTONOMA (f non dip. da t)
Per Peano, certamente c'è esistenza locale delle soluzioni.

Però...

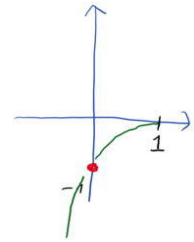


$2\sqrt{|y|}$ è continua MA non lipschitziana in $y=0$, mentre per $y\neq0$ è $\mathcal{C}^\infty$

$\Rightarrow$ se $y(t_0)=y_0 \begin{cases} \neq 0 & \text{avrò } \exists! \text{ locale} \\ = 0 & \text{rischio di perdere l'unicità} \end{cases}$

Vediamo due esempi.

1. $\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = -1 \neq 0 \end{cases}$ Facciamo i conti (mi aspetto soluzione strett. crescente perché $y' > 0$)



$$\frac{dy}{2\sqrt{|y|}} = dt \rightsquigarrow \int_{-1}^{y} \frac{d\eta}{2\sqrt{|\eta|}} = \int_0^t d\tau \Rightarrow \left[(\operatorname{sign}\eta)\sqrt{|\eta|}\right]_{-1}^{y} = [\tau]_0^t$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{(\operatorname{sign} y)}_{=-1}\sqrt{|y|} - \left((-1)\sqrt{1}\right) = t \qquad 1 - \sqrt{|y|} = t$$

$\sqrt{|y|} = 1 - t$ (condiz. $1 - t \geq 0$ cioè $t \leq 1$) $\exists !$

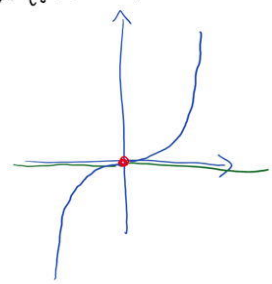
$\Rightarrow |y| = (1-t)^2 \Rightarrow y(t) = -(1-t)^2$ (dominio $]-\infty, 1]$ intorno di $t_0 = 0$)

2. $\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ Soluzione evidente: $y \equiv 0$

Ma non è la sola:

ma c'è anche $y(t) = \sigma t^2$ con $\sigma = \operatorname{sign} t$

Sono due soluzioni diverse anche in un intorno di $t_0 = 0$ (ho perso l'unicità!)



Una situazione simile si presenta più in generale per un'equazione del tipo $y' = \alpha |y|^\beta$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 < \beta < 1$. (v. sulle note)