Università degli Studi di Padova

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di martedì 12/11/2024

La dim. del T. Cauchy-Lipschitz mostra un criterio costruttivo per ottenere una soluzione concreta del problema, criterio basato sul Lemma delle Contrazioni:

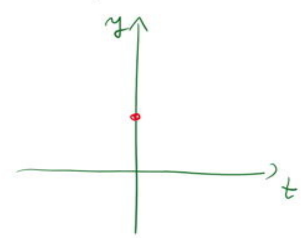
$$\psi_0(t) \equiv y_0,$$
$$\psi_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \overset{y_0}{\psi_0(\tau)})\, d\tau$$
$$\psi_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \psi_1(\tau))\, d\tau$$
$$\vdots$$
$$\psi_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \psi_{n-1}(\tau))\, d\tau \qquad \text{e così via:}$$

la successione $\psi_n(t)$ convergerà nella norma $\|\cdot\|_\infty$ alla soluzione "punto unito" $\psi(t)$.

Vediamo un esempio concreto.

$\boxed{\text{Ex}}$ $\boxed{\begin{cases} y' = 2y^2 = f(t,y) \\ y(\overset{t_0}{0}) = \overset{y_0}{1} \end{cases}}$ f è C^∞, dunque $\exists!$ è assicurata $\forall$ dato iniziale $y(t_0) = y_0$

Scegliamo $\psi_0(t)$ la costante $\underline{1}$



$$\psi_1(t) = (T\psi_0)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \psi_0(\tau))\, d\tau$$
$$= 1 + \int_0^t 2\cdot 1^2\, d\tau = 1 + \int_0^t 2\, d\tau = 1 + 2t$$

$$\psi_2(t) = (T\psi_1)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \psi_1(\tau))\, d\tau = 1 + \int_0^t 2(1+2\tau)^2\, d\tau$$
$$= 1 + \left(\frac{(1+2\tau)^3}{3}\right]_0^t = 1 + \frac{1}{3}\left((1+2t)^3 - 1\right) = 1 + 2t + 4t^2 + \tfrac{8}{3}t^3$$

$$\psi_3(t) = (T\psi_2)(t) = \cdots = 1 + 2t + 4t^2 + 8t^3 + \frac{32}{3}t^4 + \frac{32}{3}t^5 + \frac{64}{9}t^6 + \frac{128}{63}t^7$$

La successione $\psi_n(t)$ tende a $1 + 2t + 4t^2 + 8t^3 + \cdots + (2t)^n + \cdots = \sum_{n\geq 0}(2t)^n$

ovvero $\psi(t) = \dfrac{1}{1-2t}$ per $|2t| < 1$ ovvero $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$ (intorno di $t_0 = 0$)

Ma il problema $\begin{cases} y' = 2y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ lo sappiamo già risolvere da Analisi 1:

$$\frac{1}{2y^2}\,dy = dt \qquad \int_1^y \frac{1}{2\eta^2}\,d\eta = \int_0^t d\tau \qquad \left(-\frac{1}{2\eta}\right]_1^y = (\tau]_0^t$$

$$-\frac{1}{2y} - \left(-\frac{1}{2}\right) = t-0 \qquad -\frac{1}{y} = 2t-1 \qquad y(t) = \frac{1}{1-2t} \qquad (\text{ok!})$$

Il T. Cauchy-Lipschitz di $\exists !$ locale dice, leggendolo così com'è, che due soluzioni di uno stesso pb. di Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ nelle ipotesi del Teorema sono obbligate a essere uguali solo vicino a t_0. In realtà l'unicità vale in generale a patto che le ipotesi del Teorema siano soddisfatte anche per gli altri dati iniziali nel dominio U di f.

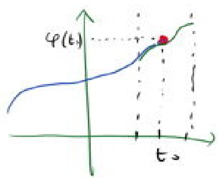
Prop. (UNICITÀ LOCALE IN OGNI PUNTO IMPLICA UNICITÀ GLOBALE)
Se $y' = f(t,y)$ ha esistenza e unicità locali in ogni punto $(t_0, y_0) \in U$ (ovvero, per ogni dato iniziale $y(t_0) = y_0$), allora due soluzioni di $y' = f(t,y)$ definite su uno stesso intervallo I che coincidono in un punto di I devono essere uguali dappertutto.

Dim. Siano $\varphi_1, \varphi_2 : I \longrightarrow \mathbb{C}^n$ due soluzioni di $y' = f(t,y)$ t.c. $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ per un certo $t_0 \in I$.
Poniamo $I' = \{t \in I : \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$, $I'' = \{t \in I : \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)\}$.
Ovviamente $I = I' \cup I''$. Notiamo che I' è un aperto di I (è il T. Cauchy: due soluz. che coincidono in un punto devono coincidere in tutto un intorno del punto). Ma anche I'' lo è (φ_1, φ_2 continue!)
Ma I intervallo (connesso) $\Rightarrow I' = \emptyset$ oppure $I'' = \emptyset$, ma $I' \neq \emptyset$ perché $t_0 \in I'$ $\Rightarrow I'' = \emptyset$. //

Una conseguenza di questo fatto è la nozione di SOLUZIONE MASSIMALE di $y' = f(t,y)$ che soddisfa $\exists!$ locale in ogni dato: è quella con il dominio non ulteriormente allargabile da una con dominio più grande.

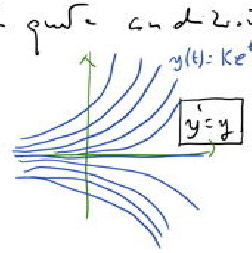
Prop. | Una soluzione massimale ha come dominio un intervallo aperto di $\mathbb{R}$.

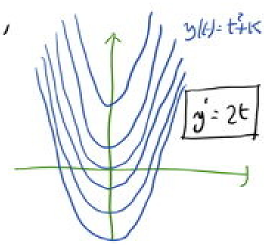
Dim. Sia ad esempio $\varphi : I \to \mathbb{C}^n$ una soluz. massimale, e per assurdo sia $t_0 = \max(I)$: consideriamo il pb. di Cauchy $(*) \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = \varphi(t_0) \end{cases}$



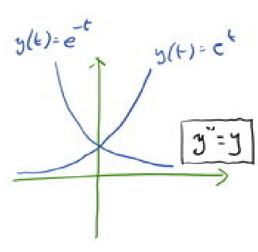
Per il T. Cauchy $\exists\, \delta > 0$ e un'unica soluzione $\tilde\varphi(t)$ di $(*)$ con dominio $]t_0-\delta, t_0+\delta[$.
Per unicità globale sarà $\tilde\varphi(t) = \varphi(t) \quad \forall\, t \in]t_0-\delta, t_0]$
Ma allora ottengo una soluzione $\tilde{\tilde\varphi} : I \cup]t_0-\delta, t_0+\delta[\to \mathbb{C}^n$ saldando le due. Assurdo, perché I era l'intervallo massimale e invece l'ho esteso! Dunque $\max I$ non può esistere. //

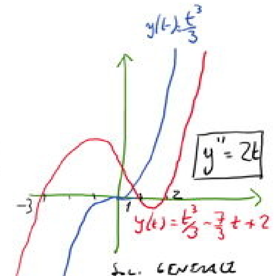
Conseguenza dell'unicità globale: in queste condizioni, i grafici di due diverse soluzioni di uno stesso problema del I° ordine non possono mai intersecarsi!





Invece: grafici di due diverse soluzioni di uno stesso problema del II° ordine possono sì intersecarsi, ma con pendenze diverse! (Il dato iniziale è formato dai valori $y(t_0)$ e $y'(t_0)$).





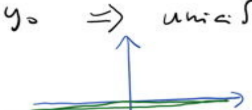
Sol. GENERALE
$y' = t^2 + K$
$y = \frac{1}{3}t^3 + Kt + h$
$(K, h \in \mathbb{C})$

Un altro fenomeno interessante è questo:

Prop. (FUGA DAI COMPATTI) Una soluzione massimale "esce definitivamente da ogni sottoinsieme compatto di U", nel senso che:
data $\varphi : I \to \mathbb{C}^n$ soluzione massimale di $y' = f(t,y)$ (con $\exists !$ locale ovunque)
e un compatto $K \subset U$, esistono $t_-, t_+ \in I$ tali che
$(t, \varphi(t)) \notin K \quad \forall t < t_- \text{ e } \forall t > t_+$.

Ex. $y' = \overset{f(t,y)}{2ty^2}$ $\quad f$ è C^∞ dunque $\exists !$ è assicurata per ogni dato iniziale $y(t_0) = y_0 \Rightarrow$ unicità globale!

Integrando: sol. costante $y \equiv 0$



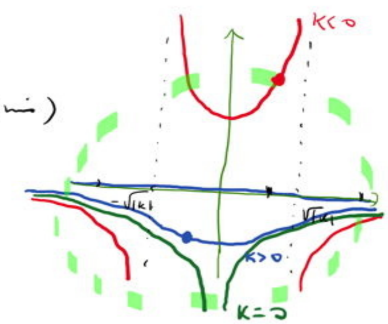
$\Rightarrow$ per unicità globale, le altre soluzioni non si annulleranno in alcun istante, ovvero avranno segno costante!

$\frac{1}{y^2} dy = 2t\, dt \qquad -\frac{1}{y} = t^2 + k \qquad y(t) = -\frac{1}{t^2+k} \quad (k \in \mathbb{R})$

Le soluzioni massimali sono quelle i cui grafici sono le componenti connesse delle curve evidenziate in figura.

La fuga dai compatti si apprezza in ognuno dei casi evidenziati:

- se $k<0$ la fuga avviene nei valori y (codominio)
- se $k>0$ la fuga avviene nell'ampiezza del dominio ($\mathbb{R}_t$)
- se $k=0$, in entrambi i sensi.

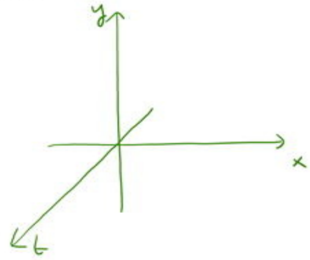


Ex. $\begin{cases} x' = -2y \\ y' = 2x \end{cases} \qquad Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad f(t,Y) = \begin{pmatrix} -2y \\ 2x \end{pmatrix}$

$Y' = f(t,Y)$ sistema diff. lineare AUTONOMO nel piano.

Soluzione evidente (a parte quella nulla): $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = (\cos 2t, \sin 2t)$

Le altre? Le vedremo tra un po'.



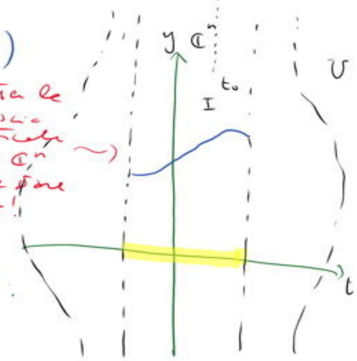
La fuga dai compatti si legge nel fatto che $(\bar{x}, \bar{y})$, limitate nei valori assunti (già sulle circonferenze unitarie in (x,y)) è "eterna" nel dominio di definizione ($\forall t \in \mathbb{R}$).

Parliamo ora di ESISTENZA E UNICITÀ GLOBALI: con quali ulteriori ipotesi su f si può sperare di ottenere $\delta = a$, ovvero una soluzione definita su <u>TUTTA</u> la base I_a del cilindro di sicurezza $I_a \times \overline{B}_{b}$?

Teor. (CAUCHY-LIPSCHITZ DI ESISTENZA E UNICITÀ GLOBALI)

Sia I intervallo di $\mathbb{R}$ t.c. <u>$I \times \mathbb{C}^n \subset U$</u>

tutte le strisce verticali $I \times \mathbb{C}^n$ devono stare in U!



Si suppone che valga una delle seguenti due ipotesi (la 1ª è più forte della 2ª, dunque dà luogo a una versione più debole del Teorema).

(a) (Lipschitzianità risp. y su ogni compatto di I).
$\forall$ intervallo compatto $K \subseteq I$ si ha che
$$\exists\, L_K > 0 : \quad \|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \le L_K \|y_1 - y_2\| \quad \forall t \in K,\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{C}^n$$

(b) (Crescita sublineare)
f sia localmente lipschitziana risp. y (dunque c'è $\exists!$ locale) e che per ogni intervallo compatto $K \subseteq I$ si abbia
$$\exists\, A_K, B_K > 0 : \quad \|f(t,y)\| \le A_K \|y\| + B_K \quad \forall (t,y) \in K \times \mathbb{C}^n$$

Allora $\forall (t_0, y_0) \in I \times \mathbb{C}^n$ esiste (ed è unica) una soluzione del pb. di Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ con dominio <u>TUTTO I</u>.

Dim. (del Teo. di C.L. globale)

Iniziamo mostrando che (a) $\Rightarrow$ (b).

In (a) scegliamo $y_1 = y$, $y_2 = 0$:

$\forall K$ compatto in I $\exists L_K \geq 0$:

$\| f(t,y) - f(t,0) \| \leq L_K \|y\| \quad \forall t \in K, \forall y \in \mathbb{C}^n$. Allora:

$$\| f(t,y) \| \leq \| f(t,y) - f(t,0) \| + \| f(t,0) \| \leq \overbrace{L_K}^{A_K} \|y\| + \overbrace{\max_{t \in K} \| f(t,0) \|}^{B_K}.$$

Dimostriamo ora il Teorema nella forma debole (supponendo (a)).

Sia $a > 0$: $I_a = [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq I$. Esiste una soluzione su tutto I_a?

Sì! Perché esiste su I_δ con $\delta = \min\{a, \frac{\overset{=+\infty \text{ per ipotesi}}{b}}{M}\} = a$.

Stesso ragionamento vale per qualsiasi compatto $K \subseteq I$.

Infine esiste una successione crescente K_n di compatti in I t.c. $I = \bigcup K_n$. Su ciascun K_n troviamo una soluzione del problema, e quella su K_{n+1} coincide, una volta ristretta, con quella su K_n (perché l'ipotesi (a) fa funzionare il Teo. C.L. locale, dunque c'è $\exists!$ per gli dati iniziali in $I \times \mathbb{C}^n$ $\Rightarrow$ unicità globale su $I \times \mathbb{C}^n$) e quindi dà luogo a una soluzione su tutto I. //

A proposito del T. Cauchy-Lipschitz di esistenza e unicità globale:

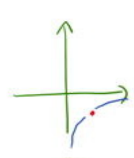
Ex. $y' = y^2$ e $y' = 2\sqrt{|y|}$:

In entrambi questi casi (in cui $y' = f(t,y)$ con f continua su $\overset{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}{\overset{\parallel}{\mathbb{R}^2}}$) il Teo. di C.L. in grande non è applicabile.

- Per $y' = y^2$ ($f(t,y) = y^2$) non ha crescita sublineare
- Per $y' = 2\sqrt{|y|}$ non sussistono nemmeno le ipotesi del Teo. di C.L. locale.

E in effetti la soluzione generica di entrambe NON HA dominio $\mathbb{R}$:

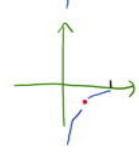
- $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(1) = -1 \end{cases}$



$\frac{1}{y^2} dy = dt \quad -\frac{1}{y} = t + K \quad K = 0$

$y(t) = -\frac{1}{t}$ dominio $]0, +\infty[$ (non $\mathbb{R}$)

- $\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(1) = -1 \end{cases}$



$y(t) = -(t-2)^2$ definita per $t < 2$ ovvero su $]-\infty, 2[$ (non $\mathbb{R}$)

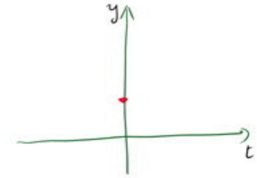
Ex

$y' = \operatorname{arctg}(ty)$. Sia $\varphi(t)$ la soluzione massimale con $\varphi(0) = 1$.

(i) Provare che φ ha dominio $\mathbb{R}$.

(ii) Studiare parità, crescenza, convessità di φ

(iii) Provare che φ è illimitata.



$f(t,y) = \operatorname{arctg}(ty)$ è C^∞ su $U = \mathbb{R}^2 = \overset{I}{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists!$ locale $\forall$ dato iniziale

$\Rightarrow$ unicità globale $\Rightarrow$ ha senso parlare di soluzione massimale!

$y \equiv 0$ soluzione evidente $\Rightarrow$ per unicità globale sarà $\varphi(t) > 0 \quad \forall t$

(i) Infatti $\overset{I}{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \subset U = \mathbb{R}^2$.

Dobbiamo provare che $\frac{\partial f}{\partial y}$ è limitata su ogni striscia verticale del tipo $\overset{t}{K} \times \overset{y}{\mathbb{R}}$ con K compatto.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{t}{1+t^2y^2} \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{|t|}{1+t^2y^2} \leq |t| \leq \max_{t \in K} |t| \quad \text{ok!}$$

Perciò $\varphi(t)$ ha dominio tutto $\mathbb{R}$.

(ii) Parità: poniamo $\psi(t) := \varphi(-t)$, e proviamo che anche $\psi(t)$ è soluzione.

$$\psi'(t) = -\varphi'(-t) = -\operatorname{arctg}((-t)\cdot\varphi(-t)) = \operatorname{arctg}(t\,\varphi(-t)) = \underset{(\text{ok})}{\operatorname{arctg}(t \cdot \psi(t))}$$

Inoltre $\psi(0) = \varphi(-0) = \varphi(0) \Rightarrow \psi \equiv \varphi$ per unicità globale.

Dunque φ è pari.

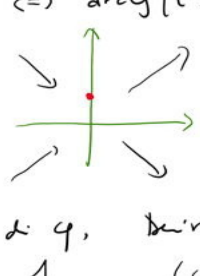
Crescenza di φ.

$$\varphi'(t) = 0 \iff \operatorname{arctg}(t \cdot \varphi(t)) = 0 \iff \begin{cases} t = 0 \\ \varphi(t) = 0 \end{cases}$$

$\to$ per $t=0$ ha pto stazionario di φ. Che cosa sarà?

Mai ($\nexists t$) per unicità globale, essendo $y \equiv 0$ evidente soluzione.

$\varphi'(t) > 0 \iff \operatorname{arctg}(t \cdot \varphi(t)) > 0 \iff$ I°, III° quadr.



Dunque $t=0$ sarà punto di minimo assoluto stretto per $\varphi(t)$.

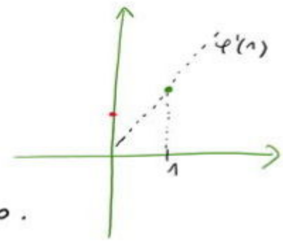
Convessità di φ, Derivando ambo i membri di $\varphi'(t) = \operatorname{arctg}(t\,\varphi(t))$

$$\varphi'' = \frac{1}{1+t^2\varphi^2(t)} \cdot (\varphi(t) + t\,\varphi'(t)) = \frac{\overset{>0}{\varphi(t)} + \underbrace{t \cdot \operatorname{arctg}(t \cdot \overset{>0}{\varphi(t)})}_{>0}}{\underbrace{1 + t^2 \varphi(t)^2}_{>0}} > 0$$

dunque $\varphi(t)$ è strettamente convessa.

dunque $\varphi(t)$ è strettamente convessa.

(iii) Per $t>0$ si ha $\varphi'(t)>0$, dunque ad esempio $\varphi'(1)>0$.
Per convessità (stretta), il grafico di φ stanno sopra la retta tangente in $t=1$, che va a $+\infty$ $\Rightarrow \varphi(t) \to +\infty$.



Un caso di fondamentale importanza in cui c'è $\exists!$ globale è quello delle

EQUAZIONI LINEARI $\boxed{y' = f(t,y) = A(t)y + b(t)}$

ove $A(t)$ è una matrice $n\times n$ di funzioni continue $a_{ij}(t)$, e $b(t)$ è un vettore di funzioni continue.

$y(t) = e^{-A(t)}\left(\int e^{A(t)} b(t)\,dt + k\right)$

Ex. • $t(y' - \log t) + y = 0 \rightsquigarrow y' + \overset{A(t)=a(t)}{\frac{1}{t}}\, y = \overset{b(t)}{\log t}$ è lineare

le soluzioni massimali $y(t)$ saranno definite su tutto $]0,+\infty[$.

• $\begin{cases} x' = 4t^2 x - \frac{1}{\sqrt{1+2t}}\, y - e^t \\ y' = x\cos t + y/t + \operatorname{arctg}(3t) \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \overset{A(t)}{\begin{pmatrix} 4t^2 & -\frac{1}{\sqrt{1+2t}} \\ \cos t & 1/t \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \overset{b(t)}{\begin{pmatrix} -e^t \\ \operatorname{arctg} 3t \end{pmatrix}}$

Vedendo: è lineare $\Rightarrow$ le soluzioni (massimali) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ saranno definite su $]-\frac{1}{2}, 0[$ oppure su $]0,+\infty[$. (a seconda di t_0 nel dato iniziale $y(t_0)=y_0$).

Prop. (ESISTENZA E UNICITÀ GLOBALE PER LE E.D.O. LINEARI)

Sia $y' = A(t)y + b(t)$, ove $A: I \to M_n(\mathbb{C})$ e $b: I \to \mathbb{C}^n$ sono funzioni continue su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.
Allora $\forall (t_0, y_0) \in I \times \mathbb{C}^n$ $\exists!$ soluzione di $\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ su tutto I

Dim. Vediamo che nel T.C.L. globale è soddisfatta l'ipotesi (a), ovvero che

$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \le L_K \|y_1 - y_2\| \quad \forall t \in K \text{ compatto } \subseteq I, \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{C}^n.$$

$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| = \|A(t)\cdot(y_1 - y_2)\| = \left\| A(t)\left(\overset{\text{Più scalare!}}{\|y_1-y_2\|}\cdot \overset{\text{vettore } v:\ \|v\|=1}{\frac{y_1-y_2}{\|y_1-y_2\|}}\right)\right\|$$

$$\| f(t,y_1) - f(t,y_2) \| = \| A(t)\cdot(y_1-y_2) \| = \left\| A(t) \left(\|y_1-y_2\| \cdot \frac{y_1-y_2}{\|y_1-y_2\|} \right) \right\|$$

$$= \| A(t)(\underline{v}) \| \cdot \|y_1-y_2\| \le \left(\max_{\|\underline{v}\|=1} \| A(t)(\underline{v}) \| \right) \cdot \|y_1-y_2\|$$

sfera, compatto di $\mathbb{C}^n$

norma operatoriale di $A(t)$: max delle norme dei suoi valori sulla sfera unitaria: $\|A(t)\|_{op}$

$$= \|A(t)\|_{op} \cdot \|y_1-y_2\| \le \underbrace{\max_{t\in K} \|A(t)\|_{op}}_{L_K} \cdot \|y_1-y_2\| . \quad //$$

Ex. Risolvere $t(y' - \log t) + y = 0$

$y' + \underbrace{+\frac{1}{t}}_{a(t)} y = \underbrace{\log t}_{b(t)}$ lineare $\Rightarrow$ sol. massimali saranno definite su $]0,+\infty[$

$A(t) = \int a(t)\,dt = +\log t$; $\int e^{A(t)} b(t)\,dt = \int \underbrace{t}_{g} \cdot \underbrace{\log t}_{F}\,dt \overset{\text{PARTI}}{=} \frac{t^2}{2}\log t - \int \frac{1}{t}\cdot\frac{t^2}{2}\,dt$

$= \frac{t^2}{2}\log t - \frac{t^2}{4} = \frac{t^2}{4}(2\log t - 1)$

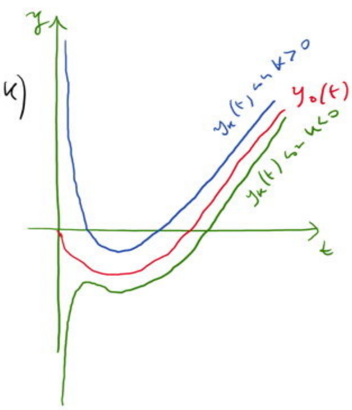
$y(t) = e^{-A(t)}\left(\int e^{A(t)} b(t)\,dt + K\right) = \frac{1}{t}\left(\frac{t^2}{4}(2\log t - 1) + K\right)$

$= \frac{K}{t} + \frac{t}{4}(2\log t - 1) \qquad (K \in \mathbb{R})$

$y_K(t) = \frac{K}{t} + \frac{t}{4}(2\log t - 1)$

$\lim_{t\to 0^+} y_K(t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } K>0 \\ 0^- & \text{se } K=0 \\ -\infty & \text{se } K<0 \end{cases} \qquad \lim_{t\to+\infty} y_K(t) = +\infty$

$|y_K(t) - y_0(t)| = K/t \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$



$\boxed{\text{ESERCIZI}}$

(1) Si consideri l'e.d.o. $y' = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ nell'incognita $y(x)$.

(i) Mostrare che se $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ (con $b>a>0$) è soluzione allora lo è anche $\psi :]-b,-a[\to \mathbb{R}$ con $\psi(x) = -\varphi(-x)$.

(ii) Mostrare che $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ la soluzione massimale t.c. $y(x_0) = y_0$ per un certo $x_0 > 0$ è definita su tutto $]0,+\infty[$.

(iii) Dedurne che se $x_0 < 0$ la soluzione mass. è def. su $]-\infty, 0[$.

(iv) Mostrare che ogni soluzione massimale con $y(0) = y_0 \neq 0$ ha come dominio tutto $\mathbb{R}$.

(2) Si consideri l'equazione autonoma $y'' = \dfrac{(y')^2}{y} + y \log y$ (con $y>0$).

(i) Scrivere il sistema equivalente del I° ordine, e dire se ci sono esistenza e unicità locali o globali.

(ii) Vi sono soluzioni costanti?

(iii) Determinare le soluzioni massimali, verificando che hanno come dominio tutto $\mathbb{R}$ (<u>Suggerimento</u>: porre $u := \log y$)