UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 14/11/2024

E.D.O. AUTONOME

$$y' = \cancel{f(t,y)} \rightsquigarrow \boxed{y' = g(y)}$$

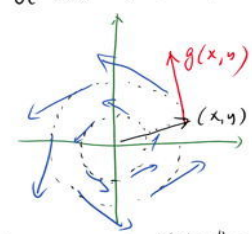
ove $g : \Omega \to \mathbb{C}^n$ è una funzione continua su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$.
(in altre parole: g è un campo vettoriale in Ω)

In sostanza, a una soluzione $y(t)$ (curva parametrica in Ω) sto assegnando il vettore tangente $y'(t) = g(y(t))$. Pertanto assegnare g e visualizzarlo mi permette di visualizzare subito l'immagine di $y(t)$, ovvero il sostegno della curva $y(t)$, detta **ORBITA** della soluzione $y(t)$ (più impropriamente: "traiettoria").

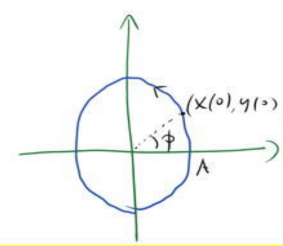
Le famiglie delle orbite dentro Ω è detta **RITRATTO IN FASE** del sistema autonomo.
Il R.I.F. fornisce dunque una visione geometrica delle soluzioni (delle loro immagini a dire il vero!) prescindendo dalle legge orarie con cui sono percorse.

Ex. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

$g(x,y) = (-y, x)$



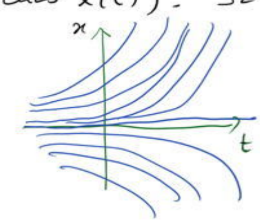
Soluzioni $\begin{cases} x(t) = A\cos(t+\phi) \\ y(t) = A\sin(t+\phi) \end{cases}$



Ex. • $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$: visto a dx, si ottengono le circonferenze.

• caso scalare: $x' = x$ (cerco $x(t)$). $\Omega = \mathbb{R}$, $g(x) = x$.

soluzioni: $x(t) = K e^t$



ritratto in fase:

Osservazione: anche una e.d.o. non autonoma si può vedere, volendo come una autonoma: basta aggiungere una coordinata.

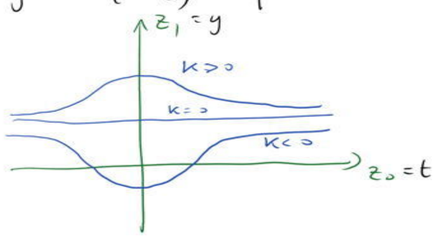
$y = (y_1, \dots, y_n)$ $\quad y' = f(t, y)$ si può scrivere usando

$z = (z_0, \underbrace{z_1, \dots, z_n}_{z'})$ con $z_0 = t$, $z_j = y_j$ $(j = 1, \dots, n)$:

$$y' = f(t,y) \iff z' = g(z) \quad \text{ove } g(z) = g(z_0, z') = (1, f(z'))$$

$$\begin{cases} z_0' = 1 \\ z_1' = f_1(z) \\ \vdots \\ z_n' = f_n(z) \end{cases}$$

Ex. $y' = 2t(1-y)$ eq. scalare che equivale a $\begin{cases} z_0' = 1 \\ z_1' = 2z_0(1-z_1) \end{cases}$



soluzioni: $y(t) = 1 + Ke^{-t^2}$

Il ritratto in fase per (z_0, z_1) equivale al disegno del grafico per $y(t)$. Le curve sono in ogni punto tangenti al campo vettoriale $(1, 2z_0(1-z_1))$ ovvero $(1, 2t(1-y))$

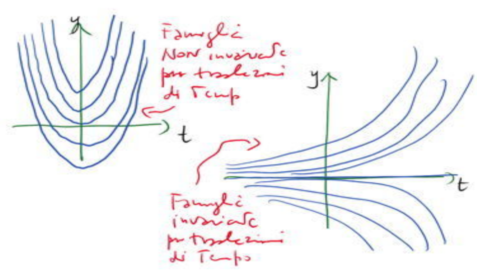
Prop. Lo spazio delle soluzioni di una e.d.o. autonoma è invariante per traslazioni temporali, ovvero, se se $\varphi : I \to \mathbb{C}^n$ è soluzione, lo è anche $\varphi(t+K) : I - K \to \mathbb{C}^n$

Dim. $y' = g(y)$ $\quad \varphi(t)$ soluzione. Consideriamo $\varphi(t+K)$:

$$\varphi(t+K)' = \varphi'(t+K) \cdot 1 = \varphi'(t+K) = g(\varphi(t+K)) \quad //$$

Ex. $\quad y' = 2t \Rightarrow y(t) = t^2 + K$

$\quad y' = 2y \Rightarrow y(t) = Ke^{2t}$



Nel caso di un sistema autonomo $y' = g(y)$, i teoremi di C.L. si enunciano come segue:

Teor. (ESISTENZA E UNICITÀ PER I SISTEMI AUTONOMI, CAUCHY-LIPSCHITZ)

(a) ($\exists!$ locale) Se il campo $g(y)$ è localmente lipschitziano (ad es: se g è C^1 in Ω) allora c'è esistenza e unicità locale per ogni dato iniziale in Ω ($\Rightarrow$ unicità globale!)
ovvero: il problema $\begin{cases} y' = g(y) \\ y(t_0) = y_0 \in \Omega \end{cases}$ ha soluzione una e una sola soluzione, cioè $\exists\, \delta > 0$ e $\varphi :]t_0-\delta, t_0+\delta[\to \Omega$ t.c. $\varphi'(t) = g(\varphi(t))$ $\forall t : |t-t_0| < \delta$, $\varphi(t_0) = y_0$.

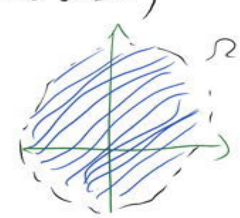
(b) ($\exists!$ GLOBALE) Nel caso $\Omega = \mathbb{C}^n$, se g è globalmente lipschitziano (ad es: se g è C^1 e $\frac{\partial g}{\partial y_j}$ sono tutte limitate) o se g è loc. lipsch. con crescita sublineare
$\Rightarrow$ c'è esistenza e unicità globale su tutto $\mathbb{R}$ per ogni dato $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$.

D'ora in poi lavoreremo con un campo g loc. LIPSCHITZIANO (dunque c'è $\exists!$ locale, e unicità globale).
In particolare ha anche senso parlare di soluzioni MASSIMALI $y(t)$ di $y' = g(y)$.

ORBITA : immagine di una soluzione massimale $y(t)$ di $y' = g(y)$.

RITRATTO IN FASE : la famiglia delle orbite in Ω (foliazione di Ω)

EQUILIBRIO : $y_0 \in \Omega$ t.c. $g(y_0) = 0$



Prop. | $y_0 \in \Omega$ equilibrio $\Leftrightarrow$ $y \equiv y_0$ è soluzione costante

Dim. "$\Rightarrow$" consideriamo $\begin{cases} y' = g(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$: è risolto dalla costante $y \equiv y_0$

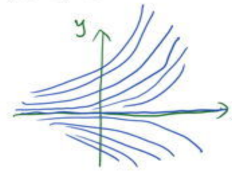
"$\Leftarrow$" $0 = (y_0)' = g(y_0)$. //

Per la nozione di "equilibrio stabile" ci sono varie possibilità.
Quella forse più semplice (ma più restrittiva) è la seguente:

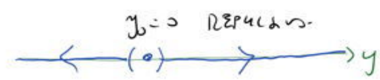
Si dice che un equilibrio $y_0 \in \Omega$ è ATTRATTIVO se
$\exists$ intorno V di y_0 in Ω t.c. $\forall \tilde{y} \in V$ la soluzione $y(t)$ del pb di Cauchy $\begin{cases} y' = g(y) \\ y(0) = \tilde{y} \end{cases}$ soddisfa $\lim_{t \to +\infty} y(t) = y_0$

Si dice che è REPULSIVO se è attrattivo nel passato ($\lim_{t \to -\infty} y(t) = y_0$)

$\boxed{\text{Ex}}$ • $y' = \alpha y$ $\quad \alpha > 0$:



R.I.F.



$g(y) = \alpha y$
equilibrio $y_0 = 0$

E per $\alpha < 0$: $y_0 = 0$ ATTRATTIVO.

Vediamo vari fatti fondamentali su soluzioni e orbite di un sistema autonomo $y' = g(y)$ con g campo loc. LIPSCHITZIANO.

1. Orbite diverse non si intersecano mai
2. Due soluzioni $y(t)$ che percorrono la stessa orbita sono l'una la traslata temporale dell'altra

Dim. Siano $\varphi_1 : I_1 \to \Omega$ e $\varphi_2 : I_2 \to \Omega$ soluzioni massimali con $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2) =: y_0$ per certi istanti $t_1 \in I_1$ e $t_2 \in I_2$. Notiamo allora che sia φ_2 che $\tau_{t_2 - t_1} \varphi_1$ soddisfano alla condizione $y(t_2) = y_0 \overset{\text{unicità}}{\Longrightarrow} \varphi_2 = \tau_{t_2 - t_1} \varphi_1$.

3. Sia $y(t)$ una soluz. massimale di $y' = g(y)$ che sia non costante.
Allora la velocità $y'(t)$ non si annulla mai.
Inoltre se $\lim_{t \to +\infty} y(t) = y_0$, allora $\begin{cases} y_0 \in \partial\Omega \\ y_0 \in \Omega \text{ ed è un equilibrio.} \end{cases}$

Dim. Se per assurdo $\exists\, t_0 : y'(t_0) = 0 \Rightarrow y'(t_0) = g(y(t_0)) = 0 \Rightarrow y(t_0) =: y_0$ è equilibrio.

Ma allora, visto che $\begin{cases} y' = g(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ è soddisfatto sia da $y(t)$ che dalla costante $y \equiv y_0$, per unicità $y(t)$ è la costante y_0: assurdo!

Sia poi $\lim_{t\to+\infty} y(t) = y_0$. Se $y_0 \notin \Omega \Rightarrow y_0 \in \partial\Omega$ (perché $y(t)\in\Omega$ $\forall t$)

Se invece $y_0 \in \Omega$, sia per assurdo y_0 non di equilibrio, cioè $g(y_0) \neq 0$.

$\Rightarrow \exists j$ con $g_j(y_0) \neq 0 \overset{\text{perm. segno}}{\Rightarrow} \exists$ intorno V limitato di y_0 in Ω t.c. $|g_j(y)| > K > 0$ $\forall y \in V$.

Poiché $\lim_{t\to+\infty} y(t) = y_0$, $\exists T>0$ t.c. $y(t) \in V$ $\forall t > T$: allora

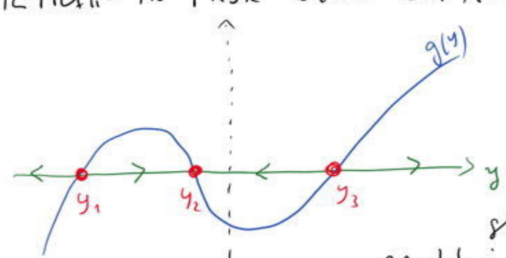
$$|y_j(t) - y_j(T)| = \left| \int_T^t \overset{g_j(y(\tau))}{y_j'(\tau)}\, d\tau \right| = \left| \int_T^t g_j(y(\tau))\, d\tau \right|$$

g_j ha segno costante in V, quello di $g_j(y_0)$

$$= \int_T^t |g_j(y(\tau))|\, d\tau \geq \int_T^t K\, d\tau = K|t-T|$$

ma questo è assurdo, perché quando t cresce il 1° m. dovrebbe restare limitato (tende a $|(y_0)_j - y_j(T)|$) ma il 2° m. diverge a $+\infty$. //

Ex. RITRATTO IN FASE DELLE EQ. AUTONOME SCALARI $y' = g(y)$



y_1, y_2, y_3 equilibri

$g(y) \gtrless 0 \Rightarrow y$ cresce / decresce

Le orbite sono gli equilibri e gli intervalli aperti in cui gli equilibri spezzano il dominio di g, ovvero Ω

(si è detto che le soluzioni devono tendere o a punti di frontiera o a equilibri ...).

Esempi. EFFETTO ALLEE IN ECOLOGIA: se la popolazione scende sotto un livello minimo s inizia a deperire e si estingue. Ciò raffina il modello logistico $y' = \gamma y (1 - y/S)$: $(\gamma > 0)$ dati $0 < s < S$, il modello diventa

$$y' = \gamma y (1 - y/S)(y/s - 1) = g(y)$$