UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 15/11/2024

Ex. EQUAZIONI DEL II° ORDINE $\quad y'' = h(y,y')$

$y=(y_1,\dots,y_n) \qquad z=(z_1,z_2)=(y,y')\in\mathbb{C}^{2n}$

$$y''=h(y,y') \iff \begin{cases} \underbrace{z_1'}_{z'} = \underbrace{z_2}_{g(z)} \\ z_2' = h(z_1,z_2)\end{cases} \qquad \begin{array}{l} z'=g(z)=(g_1(z),g_2(z)) \\ g_1(z)=z_2\,,\ g_2(z)=h(z)\end{array}$$

Cos'è un equilibrio? È un $z_0=(z_{01},z_{02})$ t.c. $g(z_0)=0$

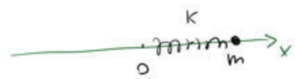
ovvero $z_{02}=0$, $h(z_0)=0$: in termini di y,

è una coppia del tipo $(y_0,0)$, t.c. $h(y_0,0)=0$

Terminologia: lo spazio delle y è detto SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI, l'immagine di una soluz. massimale $y(t)$ è detta TRAIETTORIA.

Lo spazio delle $\overset{z}{(y,y')}$ è (come detto) lo SPAZIO DELLE FASI, e il RITRATTO IN FASE è la famiglia delle orbite nello spazio (y,y')

Ex. OSCILLATORE ARMONICO

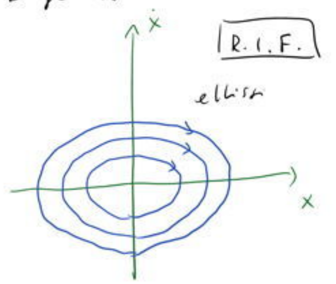


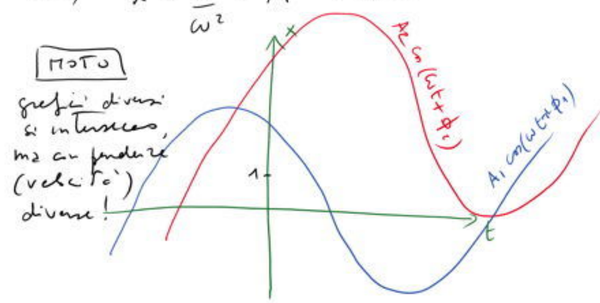
$m\ddot{x} = -Kx$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \left(\omega=\sqrt{\frac{K}{m}} \text{ pulsazione caratteristica}\right)$.

Sappiamo (Analisi I) che le soluzioni sono $x(t)=A\cos(\omega t+\phi)$

Dunque $\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t+\phi) \rightsquigarrow x^2+\frac{\dot{x}^2}{\omega^2}=A^2$ costante





Un altro paio di risultati sulle orbite:

4. Sia $\varphi: I \to \Omega$ soluz. massimale di $y'=g(y)$ (sempre $g:\Omega\to\mathbb{C}^n$ loc. Lipsch.)
Se $\exists T>0$ t.c. per qualche $t_0\in I$ si abbia $t_0+T\in I$ e $\varphi(t_0+T)=\varphi(t_0)$
allora φ è periodica, $I=\mathbb{R}$ e T è tra i periodi di $\varphi(t)$.

Dim. Il pb. di Cauchy $\begin{cases} y'=g(y) \\ y(t_0)=\varphi(t_0)\end{cases}$ è soddisfatto da $\varphi(t)$
e da $(\tau_T\varphi)(t) := \varphi(t+T) \Rightarrow$ (unicità) $\varphi(t+T)=\varphi(t)\ \forall t$

5. Se g è campo gradiente, le sue orbite non formano alcun circuito (sono "curve aperte").

Dim. Sia per assurdo $\varphi(t)$ soluz. massimale non costante t.c. $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ per qualche $t_1 < t_2$. Allora $\psi := \varphi|_{[t_1,t_2]}$ è un circuito, e vale $\oint_\psi g \cdot dx = \int_a^b g(\psi(t)) \cdot \psi'(t)\, dt \overset{\psi \text{ soluz.}}{=}$
$\int_a^b g(\psi(t)) \cdot g(\psi(t))\, dt = \int_a^b \|g(\psi(t))\|^2\, dt$.

Ma essendo g campo gradiente deve essere $\oint_\psi g \cdot dx = 0$

$\Rightarrow g(\psi(t)) \equiv 0 \;\; \forall t \Rightarrow$ tutti i punti del circuito $\psi([t_1,t_2]) = \varphi([t_1,t_2])$ sono equilibri $\Rightarrow$ assurdo perché φ è soluzione non costante. //

6. (FUGA DAI COMPATTI) Una soluz. massimale con orbita contenuta in un compatto di Ω per tutti i tempi positivi/negativi deve avere come dominio un intervallo aperto sup./inf. illimitato (in particolare, se tutta l'orbita è contenuta in un compatto il dominio deve essere $\mathbb{R}$).

Dim. È la rilettura della "Fuga dai compatti" nel caso autonomo.

Parliamo della nozione di SISTEMI EQUIVALENTI.

Due sistemi autonomi $y' = g(y)$ e $y' = \tilde{g}(y)$ si dicono equivalenti quando

- hanno gli stessi equilibri, e
- le soluzioni $\varphi(t)$ di $y' = g(y)$ si ottengono dalle soluzioni $\tilde{\varphi}(t)$ di $y' = \tilde{g}(y)$ tramite un cambio di parametro $t = \theta(\tau)$ invertibile.

ovvero, quando i due sistemi hanno lo stesso ritratto in fase!

(i vettori di $\tilde{g}$ devono avere stessa direzione di quelli di g, mentre il modulo può variare)

Prop. $y' = g(y)$ e $y' = \tilde{g}(y)$ sono equivalenti $\iff$ $\exists$ funzione $\rho(y)$ loc. lipschitziana mai nulla ($\Rightarrow$ di segno costante) t.c. $\tilde{g}(y) = \rho(y)\, g(y)$.

RISOLUZIONI DEI DUE ESERCIZI
ASSEGNATI IN PRECEDENZA

(1) Si consideri l'e.d.o. $y' = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ nell'incognita $y(x)$.

(i) Mostrare che se $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ (con $b>a>0$) è soluzione allora lo è anche $\psi :]-b,-a[\to \mathbb{R}$ con $\psi(x) = -\varphi(-x)$.

(ii) Mostrare che $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ la soluzione massimale t.c. $y(x_0)=y_0$ per un certo $x_0>0$ è definita su tutto $]0,+\infty[$.

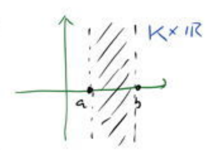
(iii) Dedurne che se $x_0<0$ la soluzione mass. è def. su $]-\infty,0[$.

(iv) Mostrare che ogni soluzione massimale con $y(0)=y_0 \neq 0$ ha come dominio tutto $\mathbb{R}$.

L'equazione non è autonoma.

$f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ è $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \Rightarrow \exists!$ locale per ogni dato iniziale del tipo $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ (e unicità globale).

Esistenza globale? Si può esaminare per $I =]-\infty,0[$ oppure $I =]0,+\infty[$.



$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}$: è limitata su ogni striscia a base compatta $K \times \mathbb{R}$ con $K = [a,b]$ oppure $K = [-b,-a]$ per $0<a<b$,

perché $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| = \dfrac{2|y|}{(x^2+y^2)^2} \leq \dfrac{2|y|}{(a^2+y^2)^2} = \dfrac{1}{a^2+y^2} \cdot \dfrac{1}{a} \cdot \overbrace{\dfrac{2a|y|}{a^2+y^2}}^{\leq 1} \leq \dfrac{1}{a^2} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a^3}$.

Dunque la soluzione massimale con dato $y(x_0)=y_0$ per $x_0>0$ è definita almeno su tutto $]0,+\infty[$ (ma forse anche oltre), e analogamente quella con dato $y(x_0)=y_0$ per $x_0<0$ lo è almeno su $]-\infty,0[$.

Questo prova (ii).

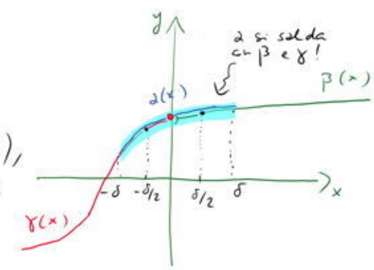
Vediamo (i). Sia $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ soluzione (con $0<a<b$), e poniamo $\psi(x) := -\varphi(-x)$ (definita sull'intervallo opposto $]-b,-a[$)

Vale allora $\psi'(x) = \varphi'(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2+\varphi(-x)^2} = \dfrac{1}{x^2+\psi(x)^2}$, dunque anche $\psi(x)$ è soluzione.

Questo prova (i) e (ricordando (ii)) ne segue anche (iii).

Passiamo infine a (iv). Sia $\alpha(x)$ la soluzione massimale del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{1}{x^2+y^2} \\ y(0) = y_0 \neq 0 \end{cases}$: allora $\alpha(x)$ sarà definita perlomeno in un intorno $]-\delta, \delta[$ di $x=0$ per un certo $\delta>0$.

D'altra parte le soluzioni massimali $\beta(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{1}{x^2+y^2} \\ y(\delta/2) = \alpha(\delta/2) \end{cases}$ sarà definita almeno su $]0,+\infty[$ (per (ii)), e le soluzioni massimali $\gamma(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{1}{x^2+y^2} \\ y(-\delta/2) = \alpha(-\delta/2) \end{cases}$ sarà definita almeno su $]-\infty, 0[$ (per (iii)): per unicità globale esse si salderanno con $\alpha(x)$ dando luogo ad una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$.



(2) Si consideri l'equazione autonoma $y'' = \frac{(y')^2}{y} + y \log y$ (con $y>0$).

(i) Scrivere il sistema equivalente del I° ordine, e dire se ci sono esistenza e unicità locali o globali.

(ii) Vi sono soluzioni costanti?

(iii) Determinare le soluzioni massimali, verificando che hanno come dominio tutto $\mathbb{R}$ (Suggerimento: porre $u := \log y$)

(i) Sistema equivalente: posto $x = (x_1, x_2) = (y, y')$ è $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_2^2/x_1 + x_1 \log x_1 \end{cases}$.
$f(x_1,x_2) = (x_2, x_2^2/x_1 + x_1 \log x_1)$ è $\mathcal{C}^1$ su $]0,+\infty[\times \mathbb{R}$, dunque c'è $\exists!$ locale per ogni dato del tipo $(t_0, (x_1)_0, (x_2)_0) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[\times \mathbb{R}$.
Quanto all'esistenza globale, non si può applicare il Teorema perché il dominio di f non è tutto $\mathbb{R}^2$. Dunque non possiamo dire nulla.

(ii) $y \equiv k^{>0}$ è soluzione $\iff 0 = 0^2/k + k \log k \iff k=1$. Perciò $y \equiv 1$.

(iii) $u = \log y \quad y = e^u \to y' = u'e^u \to y'' = u''e^u + (u')^2 e^u$.
L'equazione $y'' = \frac{(y')^2}{y} + y \log y$ diventa dunque
$$u''e^u + (u')^2 e^u = \frac{(u')^2 e^{2u}}{e^u} + e^u \log(e^u)$$

$$u''e^u + \cancel{(u')^2 e^u} = \cancel{(u')^2 e^u} + u e^u \iff u'' = u$$
$$\iff u(t) = Ae^t + Be^{-t} \iff y(t) = e^{Ae^t + Be^{-t}} = \underbrace{e^A}_{C>0}{}^{e^t} \, \underbrace{e^B}_{D>0}{}^{e^{-t}}$$

dunque $y(t) = C^{e^t} D^{e^{-t}}$ con $C, D > 0$.

Flusso di sistema autonomo $y' = g(y)$ con $g : \Omega \to \mathbb{C}^n$ campo loc.-Lipsch.
($\Rightarrow \exists!$ locale, unicità globale)

(SISTEMA COMPLESSO)

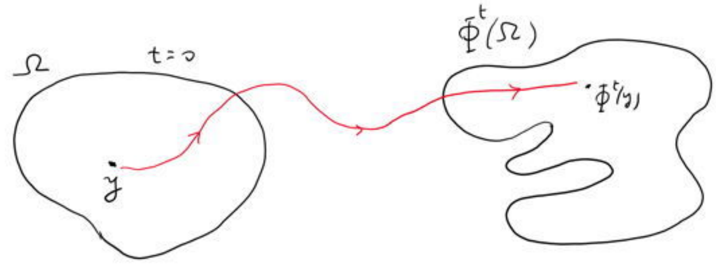
Per semplicità supponiamo che le soluzioni $y(t)$ abbiano tutte dominio $\mathbb{R}$

Dunque $\forall y \in \Omega \ \exists!$ soluz. $\varphi_y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ tale che $\varphi_y(0) = y$. ← φ_y è la soluzione che parte da y

Flusso $\Phi : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{C}^n$, $\Phi(t,y) := \varphi_y(t)$ ← Descrive istante per istante, "come il campo muove Ω"

Per $t \in \mathbb{R}$ sia $\Phi^t : \Omega \to \mathbb{C}^n$, $\Phi^t(y) := \varphi_y(t)$ ← Flusso all'istante t: descrive dove sono andati i punti di Ω all'istante t

(pertanto $\Phi^0(y) = y \ \forall y \in \Omega$, l'identità).



Prop. Vale $\Phi^s \circ \Phi^t = \Phi^{s+t}$ (in part. Φ^t è invertibile con inversa Φ^{-t}).
Φ^t è omeomorfismo (CONTINUITÀ/DIFFERENZIABILITÀ RISPETTO AI DATI INIZIALI), e se il campo g è C^1 è anche diffeomorfismo.

Dim. $(\Phi^s \circ \Phi^t)(y) = \Phi^s(\varphi_y(t)) = \varphi_{\varphi_y(t)}(s)$
$(\Phi^{s+t})(y) = \varphi_y(s+t) = (\tau_t \varphi_y)(s)$.
Ma $\varphi_{\varphi_y(t)}(0) = \varphi_y(t) = (\tau_t \varphi_y)(0) \Rightarrow$ per unicità globale $\varphi_{\varphi_y(t)} = \tau_t \varphi_y$.
In particolare per $s = -t$ si ha $\Phi^{-t} \circ \Phi^t = \Phi^0 = id_\Omega$.
La continuità e differenziabilità seguono da stime (dim. omessa).

Ex
- $y' = y \rightsquigarrow y(t) = Ke^t$.
  Qui $\Phi^t : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$, $\Phi^t(y) = \varphi_y(t) = y e^t$ (notare che $\Phi^0(y) = y$).
- $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \sim (x(t), y(t)) = (A\cos(t+\phi), A\sin(t+\phi))$
  (soluzioni girano uniformemente in senso antiorario)
  Qui $\Phi^t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ROTAZIONE di angolo t)

Sia ora $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (CASO REALE), $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ camp. loc. lipsch.

Un INTEGRALE PRIMO del sistema $y' = g(y)$ è una funzione scalare $E : \Omega \to \mathbb{R}$ costante lungo le soluzioni $y(t)$ del sistema, ovvero t.c. $E(y(t))$ NON dipende da t.

In altri termini: le orbite del sistema sono contenute negli insiemi di livello della funzione E (ipersuperfici di $\mathbb{R}^n$).

In particolare: se $n=2$ le orbite saranno porzioni delle curve di livello di E.

Prop. | $E(y)$ è integrale primo per $y' = g(y)$ $\iff$ $\nabla E(y) \cdot g(y) = 0 \quad \forall y \in \Omega$

Dim. E int. primo $\iff$ $\frac{d}{dt} E(y(t)) = 0 \quad \forall$ soluz. $y(t)$

$\iff \nabla E(y(t)) \cdot y'(t) = \nabla E(y(t)) \cdot g(y(t)) = 0 \quad \forall$ soluz. $y(t)$.

Dunque questo prova la sufficienza. Viceversa, dato $y_0 \in \Omega$, consideriamo il pb. di Cauchy $\begin{cases} y' = g(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$. Sia $y(t)$ la soluz. massimale: allora $\nabla E(y(t)) \cdot g(y(t)) = 0 \ \forall t \overset{(t=0)}{\Longrightarrow} \nabla E(y_0) \cdot g(y_0) = 0$. //

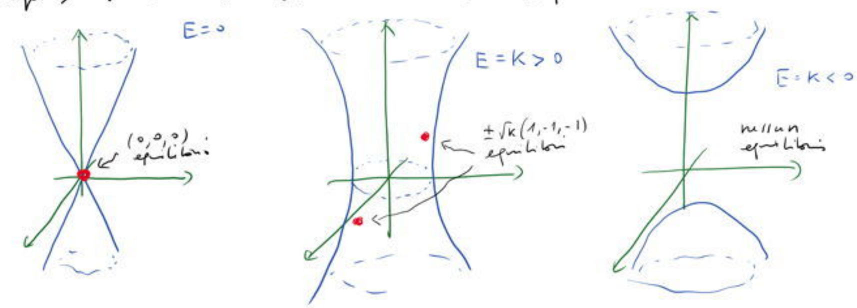
Ex. $\begin{cases} x' = z - y \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$ campo $g(x,y,z) = (z-y, x+z, x+y)$

equilibri $g(x,y,z) = (0,0,0) \iff (x,y,z) = \alpha(1,-1,-1)$ (retta)

La funzione $E(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ è un integrale primo!

Infatti $\nabla E = (2x, 2y, -2z)$, e vale $\nabla E \cdot g \equiv 0$

Dunque le soluzioni del sistema staranno sulle sup. di livello di E.



Quando sapremo risolvere i sistemi lineari (questo lo è) vedremo che le soluzioni sono tutte e sole quelle del tipo

$(x(t), y(t), z(t)) = (A + Ce^{-t}, -A + Be^{t}, -A + Be^{t} - Ce^{-t})$ per $A, B, C \in \mathbb{R}$

(notare che $E(x(t), y(t), z(t)) = A^2 + 2BC$ non dipende da t).

Per quali valori dei parametri le soluzioni soddisfano $z(t_0)=0$ per qualche t_0?
A meno di riscalare il tempo possiamo supporre $t_0=0$:
$z(0) = -A+B-C=0 \iff B=A+C$: e su queste soluzioni la funzione
E vale $A^2+2BC = A^2+2C(A+C) = (A+C)^2+C^2$, che è un valore >0
tranne nel caso $A=B=C=0$ in cui vale 0. Pertanto quando $E \leq 0$
le soluzioni stanno sempre confinate in uno dei due semispazi $z \gtrless 0$
(a seconda del dato iniziale) a parte il caso della soluzione costante
nell'equilibrio $(0,0,0)$: e questo è evidente dalla struttura delle
superfici di livello $E=K$ quando $K \leq 0$ (vedi disegno sopra).

L'esempio più classico di integrale primo è l'INTEGRALE DELL'ENERGIA
per i sistemi autonomi del II° ordine conservativi.

FORZA!

$$y'' = \cancel{h}(y,y') \rightsquigarrow \boxed{y'' = h(y) \text{ con } h \text{ campo conservativo.}}$$

Sistema equivalente del I° ordine: posto $p=y'$, equivale a $\begin{cases} y'=p \\ p'=h(y) \end{cases}$
nell'incognita $(y,p) = (y_1,\dots,y_n;\ p_1,\dots,p_n)$.

Se $h(y)$ è conservativo è definita l'(ENERGIA) POTENZIALE $U(y)$,
tale che $h(y) = -\nabla U$.

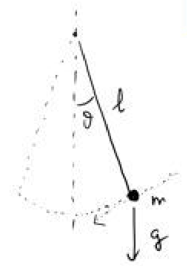
Ebbene, $\boxed{E(y,p) := \frac{1}{2}\|p\|^2 + U(y) \quad \text{ENERGIA TOTALE}}$ è integrale primo.

Infatti qui il campo $g(y,p) = (p, h(y))$, e $\nabla E = (-h(y), p)$
(perché $\nabla_y E = \nabla U$ e $\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{1}{2}\|p\|^2\right) = \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{1}{2}(p_1^2+\dots+p_j^2+\dots+p_n^2)\right) = \frac{1}{2}\cdot 2p_j = p_j$),
e dunque $\nabla E \cdot g \equiv 0 \quad \forall (y,p)$.

Ne segue che le orbite di $\begin{cases} y'=p \\ p'=h(y) \end{cases}$ (ovvero le orbite di $y''=h(y)$
nello spazio delle fasi (y,y')) devono essere contenute nelle ipersuperfici
di livello di E in $\mathbb{R}^{2n} \ni (y,y')$.

N.B.: Nel caso scalare un'equazione $y''=h(y)$ ha sempre
l'integrale dell'energia (un campo scalare $h(y)$
è ovviamente conservativo con $U(y) = -\int h(y)\,dy$), con
energia $E(y,y') = \frac{1}{2}(y')^2 - \int h(y)\,dy$.

$\boxed{\text{Ex}}$



PENDOLO SEMPLICE. Coordinata tangenziale $\ell\theta$

Meccanica $m(\ell\theta)'' = -mg\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta = h(\theta)$

Posto $\omega = \dot{\theta}$, il sistema del I° ordine equivalente è

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \end{cases}$$

Equilibri $(\omega, -\frac{g}{\ell}\sin\theta) = (0,0)$
$\iff (\theta,\omega) = (k\pi, 0) \quad (k\in\mathbb{Z})$

Equilibri stabili/instabili: punti di min/max per l'energia potenziale

$U(\theta) = -\int\left(-\frac{g}{\ell}\sin\theta\right)d\theta = -\frac{g}{\ell}\cos\theta + k$, ovvero $\theta = 2k\pi$ (stabili) / $\theta = \pi + 2k\pi$ (instabili)

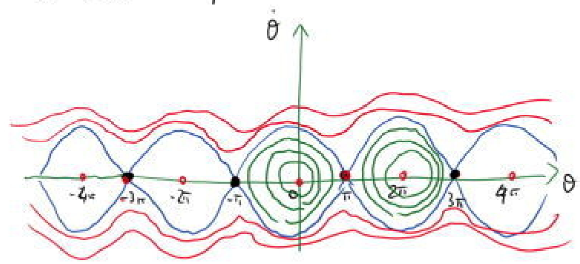
Energia totale $E(\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + U(\theta) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{\ell}\cos\theta$

$E(\theta,\dot{\theta})$ sarà costante lungo i moti $\theta(t)$.

Negli equilibri (ovvero $(\theta,\omega) = (k\pi,0)$) nello spazio delle fasi (θ,ω) vale $E(k\pi,0) = -\frac{g}{\ell}\cos(k\pi) = -\frac{g}{\ell}\cdot(-1)^k$ < $-\frac{g}{\ell}$ negli eq. stabili $\theta = 2k\pi$ / $\frac{g}{\ell}$ negli eq. instabili $\theta = \pi + 2k\pi$

- I moti con energia "bassa" ($-\frac{g}{\ell} \leq E < \frac{g}{\ell}$) sono quelli periodici in cui il pendolo oscilla attorno a un equilibrio stabile, oppure sta in esso
- I moti con energia "alta" ($E > \frac{g}{\ell}$) sono quelli periodici in cui il pendolo gira velocemente oltrepassando gli equilibri instabili (in alto)
- I moti con energia "critica" ($E = \frac{g}{\ell}$) sono di due tipi:
  - o la quiete in un equilibrio instabile
  - o la tendenza asintotica a un equilibrio instabile con velocità tendente a zero (senza mai raggiungerlo, per unicità!)

In effetti queste sono tutte e sole le curve di livello di E



- = equilibri stabili
- = equilibri instabili
- = orbite chiuse (energia bassa) (oscillazioni attorno a eq. stabile)
- = orbite aperte (energia alta) (rivoluzioni a velocità di segno costante, il pendolo continua a girare)
- = orbite separatrici (energia critica) (il pendolo tende asintoticamente a un eq. instabile senza mai raggiungerlo)