Università degli Studi di Padova

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di martedì 19/11/2024

Ex

$$\begin{cases}\ddot{x} = 2x^2+y\\ \ddot{y} = x-\cos y\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}'' = h\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}h_1(x,y)\\h_2(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x^2+y\\x-\cos y\end{pmatrix}$$

h è campo su tutto $\mathbb{R}^2$, che è sempl. connesso, dunque h conservativo $\iff$ h irrotazionale cioè $\frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{\partial h_2}{\partial x}$ (VERO! $=1$)

Energia potenziale $U(x,y)$: $\nabla U = -h$

$$\begin{cases}\frac{\partial U}{\partial x} = -h_1 = -2x^2-y \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -h_2 = -x+\cos y\end{cases} \Rightarrow U = -\tfrac{2}{3}x^3 - xy + \psi(y) \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \cancel{-x} + \psi'(y) = \cancel{-x} + \cos y \Rightarrow \psi(y) = \sin y$$

Dunque $U(y) = -\frac{2x^3}{3} - xy + \sin y$

$\Rightarrow$ Energia Totale $E(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{2x^3}{3} - xy + \sin y$

La conoscenza di un integrale primo può essere decisiva NON solo per fornire informazioni geometriche sulle orbite (in cui il Tempo non c'è), ma anche per trovare le soluzioni complete $y(t)$ del problema originario $y' = g(y)$, ad esempio sfruttando l'informazione per disaccoppiare le equazioni, o magari (nel caso di equazioni autonome del II° ord. conservative) per abbassare l'ordine del problema.

Ex. Trovare le soluzioni $x(t)$ del pb di Cauchy $\ddot{x} = 2(e^{2x}+e^x)$ con condizioni iniziali $x(0)=0$, $\dot{x}(0) = 2\sqrt{2}$.

Per il Teorema di Cauchy locale $x(t)$ esiste ed è unica (con dominio di intorno di $t=0$). Invece non essendo ovviamente sublineare non possiamo applicare il T. Cauchy globale: $\begin{cases}\dot{z}_1 = z_2\\ \dot{z}_2 = 2(e^{2z_1}+e^{z_1})\end{cases}$ $g(z_1,z_2)$

È del tipo $\ddot{x} = h(x)$ (conservativo perché scalare)

Energia totale $E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int h(x)\,dx = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int 2(e^{2x}+e^x)\,dx$
$= \frac{1}{2}\dot{x}^2 - e^{2x} - 2e^x$

lungo le soluzioni cercate, $E(x,\dot{x})$ vale sempre $E(x(0),y(0)) = 1$

$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - e^{2x} - 2e^x = 1 \quad \forall t \Rightarrow \dot{x}^2 = 2(e^{2x}+2e^x+1) \Rightarrow \dot{x} = \cancel{\pm}\sqrt{2}(e^x+1)$ $\dot{x}(0)>0$

$\dot{x} = \sqrt{2}(e^x+1)$ eq. del I° ordine a variabili separabili

$$\frac{1}{e^x+1}\,dx = \sqrt{2}\,dt \Rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{du}{e^u+1} = \int_0^t \sqrt{2}\,d\tau$$

$\int \frac{1}{e^u+1}\,du$ $\left[\begin{array}{l} u = \log \xi \\ du = \frac{1}{\xi}\,d\xi\end{array}\right]$ $= \int \frac{1}{\xi(\xi+1)}\,d\xi = \log\left|\frac{\xi}{\xi+1}\right|$

$$\left(\log\left(\frac{e^u}{e^u+1}\right)\right]_0^x = \sqrt2\,(t-0) \qquad \log\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) - \log\frac12 = \sqrt2\, t$$

$$\log\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right) = \sqrt2\, t \qquad \frac{2e^x}{e^x+1} = e^{t\sqrt2} \qquad (2-e^{t\sqrt2})e^x = e^{t\sqrt2}$$

$$e^x = \frac{e^{t\sqrt2}}{2-e^{t\sqrt2}} \Rightarrow x(t) = \log\left(\frac{e^{t\sqrt2}}{2-e^{t\sqrt2}}\right) = t\sqrt2 - \log\left(2-e^{t\sqrt2}\right)$$

Dominio: $2-e^{t\sqrt2}>0 \iff e^{t\sqrt2}<2 \iff t\sqrt2<\log 2 \iff t\in \left]-\infty, \frac{1}{\sqrt2}\log 2\right[$ NON INTORNO di $t=0$

Concentriamoci sul caso $n=2$ (sistemi autonomi NEL PIANO).

$$\boxed{\begin{cases}\dot x = a(x,y)\\ \dot y = b(x,y)\end{cases}}$$

ove $a,b: V\to\mathbb{R}$ funzioni C^1 su un aperto $V\subseteq\mathbb{R}^2$

Di certo c'è $\exists!$ locale per ogni dato iniziale in V

(ovvero, dato $(x_0,y_0)\in V$, il p.d.C. $\begin{cases}\dot x = a(x,y)\\ \dot y = b(x,y)\\ x(0)=x_0,\ y(0)=y_0\end{cases}$ avrà un'unica soluzione $(x(t),y(t))$ definita all'intorno di $t_0=0$)

$\Rightarrow$ e c'è anche unicità globale (due soluzioni che coincidono in un certo t ...)

Questo tipo di problema comprende in particolare:

- tutte le e.d.o. scalari $y'=f(t,y)$ con f di classe C^1
  (basta porre $(x,y)=(t,y)$, e dopo l'eq. equivale a $\begin{cases}\dot x = 1\\ \dot y = f(x,y)\end{cases}$)
- tutte le e.d.o. scalari del II° ordine autonome $y''=h(y,y')$
  (basta porre $(x,y)\leadsto(y,p)$: $\begin{cases}y'=p\\ p'=h(y,p)\end{cases}$ nel piano delle fasi (y,p))

Andiamo alla ricerca di un integrale primo $E(x,y)$ per il sistema: come detto, le orbite saranno porzioni delle curve di livello di E nel piano (x,y)

Consideriamo, dato il sistema $\begin{cases}\dot x = a(x,y)\\ \dot y = b(x,y)\end{cases}$, la forma differenziale associata

$$\omega = b(x,y)\,dx - a(x,y)\,dy$$

Se ω fosse esatta, una sua primitiva $F(x,y)$ (ovvero t.c. $dF = \omega$, cioè $\begin{cases} \partial_x F = b \\ \partial_y F = -a \end{cases}$) sarebbe un integrale primo per il sistema dato: $\nabla F \cdot g = (b,-a)\cdot(a,b) = 0$)

Naturalmente questo non accade sempre! (Sfortunatamente!) ...

Tuttavia, sia $\rho(x,y)$ una funzione scalare $\mathcal{C}^1$ che non si annulla mai ($\Rightarrow$ segno costante!) e supponiamo che $\rho\omega = \rho b\, dx - \rho a\, dy$ diventi esatta: allora una primitiva $F(x,y)$ di $\rho\omega$ è ancora un integrale primo per il sistema originario (che sarebbe d'altra parte equivalente a $\begin{cases} \dot{x} = \rho a \\ \dot{y} = \rho b \end{cases}$):

infatti $\nabla F \cdot g = (\rho b, -\rho a)\cdot(a,b) = 0$

Una tale funzione $\rho(x,y)$ si dice FATTORE INTEGRANTE per ω.

Concentriamoci allora sul problema geometrico generale, dimenticandoci per un attimo che tutto è nato dal pb. analitico $\begin{cases} \dot{x} = a(x,y) \\ \dot{y} = b(x,y) \end{cases}$.

Sia data una forma $\omega = p(x,y)\, dx + q(x,y)\, dy$

Il fatto che $\rho(x,y)$ sia fattore integrante per ω, sui semplicemente connessi equivale alla chiusura di $\rho\omega$: ovvero $\frac{\partial}{\partial y}(\rho p) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho q)$

ovvero $\frac{\partial \rho}{\partial y} p + \rho \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial x} q + \rho \frac{\partial q}{\partial x}$ ovvero $\rho\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) \overset{(*)}{=} q \frac{\partial \rho}{\partial x} - p \frac{\partial \rho}{\partial y}$ (E.D.P.)

Si può provare (usando il "metodo delle caratteristiche" per le E.D.P., che va oltre questo corso) che una tale $\rho(x,y)$ esiste sempre.
Il problema è trovarla! Vediamo qualche caso particolare.

Prop. Se esistono $u(x)$ e $v(y)$ tali che $\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = u(x)\, q - v(y)\, p$ allora $\rho(x,y) = \exp\left(\int u(x)\,dx + \int v(y)\,dy\right)$ è fattore integrante.

Ad esempio:

- se $\overbrace{\frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right)}^{u(x)}$ non dipende da y, allora $\rho(x) = e^{\int u(x)\,dx}$ è f.i.
- se $\overbrace{-\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right)}^{v(y)}$ non dipende da x, allora $\rho(y) = e^{\int v(y)\,dy}$ è f.i.

Dim. Se esistono $u(x)$ e $v(y)$ come sopra, la condizione $(*)$ si scrive $\rho\left(u(x) q - v(y) p\right) = q \frac{\partial \rho}{\partial x} - p \frac{\partial \rho}{\partial y}$, ovvero $\left(u(x)\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x}\right) q - \left(v(y)\rho - \frac{\partial \rho}{\partial y}\right) p = 0$

Se trovo una ρ che mi annulla le due parentesi sono a posto: e questa ρ è facile da vedere, è proprio $\rho = e^{\int u(x)\,dx + \int v(y)\,dy}$ //

Vediamo un esempio di ricerca del fattore integrante, introdotto in precedenza.

<u>Ex.</u> $\omega = (\overbrace{x+y^2}^{p})\,dx + \overbrace{2xy}^{q}\,dy$ $\qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial q}{\partial x} = 2y$ ESATTA! (su $V = \mathbb{R}^2$)

Primitiva $F(x,y)$: $dF = \omega$, cioè $\begin{cases} \partial_x F = x+y^2 \\ \partial_y F = 2xy \end{cases} \Rightarrow F = \frac{x^2}{2} + xy^2 + \psi(y)$.

$\rightsquigarrow \partial_y F = \cancel{2xy} + \psi'(y) = \cancel{2xy} \Rightarrow \psi'(y) = 0 \rightsquigarrow \psi = k$

$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 = \frac{1}{2}x(x+2y^2)$ (potrei anche scegliere $\tilde{F} = x(x+2y^2)$ ...)

<u>Ex.</u> $\omega = (\overbrace{x^2+2x+y^3}^{p})\,dx + \overbrace{3y^2}^{q}\,dy$ $\qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 3y^2 \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \neq 3y^2$

Non è esatta, però $\frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) = \frac{3y^2}{3y^2} = 1$ non dipende da y.

Dunque, detto $u(x) \equiv 1$, abbiamo che $\rho(x) = e^{\int u(x)dx} = e^x$ è fattore integrante, ovvero $e^x\omega$ è forma esatta (su $V = \mathbb{R}^2$)

Primitiva $F(x,y)$ di $e^x\omega$: $\begin{cases} \partial_x F = e^x(x^2+2x+y^3) \\ \partial_y F = 3e^xy^2 \end{cases}$

$\partial_y F = 3e^xy^2 \rightsquigarrow F = e^xy^3 + \psi(x)$, da cui $\partial_x F = \cancel{e^xy^3} + \psi'(x) = e^x(x^2+2x+\cancel{y^3})$

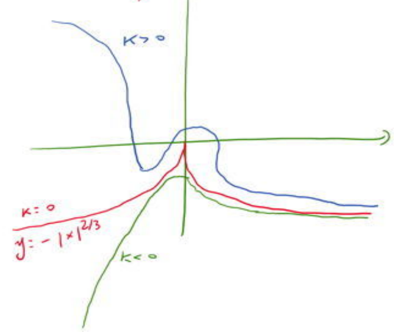
dunque $\psi'(x) = e^x(x^2+2x) \Rightarrow$

$\psi(x) = \int \underbrace{(x^2+2x)}_{f}\underbrace{e^x}_{g}\,dx = x^2e^x$

perciò $F(x,y) = e^x(x^2+y^3)$,

e le sue curve di livello sono $F = k$,

ovvero $x^2+y^3 = ke^{-x}$ $(k \in \mathbb{R})$



In generale, una EQUAZIONE DIFFERENZIALE TOTALE nel piano è un problema geometrico espresso come $\boxed{\omega = 0}$, ove $\omega = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$ è una forma differenziale con $p, q : V \to \mathbb{R}$ di classe C^1 su un aperto $V \subseteq \mathbb{R}^2$.

Risolvere questo problema significa:

trovare tutte le curve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ in V di classe C^1 tali che

- $\gamma(t) = (x_0, y_0)$ (costante) t.c. $p(x_0,y_0) = q(x_0,y_0) = 0$ (punti singolari di ω: "soluzioni costanti")

OPPURE

PULL BACK: significa letteralmente "restringere ω al sostegno di γ"

- $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t$ e $\gamma^*\omega = p(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + q(\gamma(t))\,\gamma_2'(t) \equiv 0 \quad \forall t$.

Come trovare tali curve?

1. trovare una primitiva F di ω (eventualmente dopo aver trovato un fattore integrante ρ) determinare le curve di livello di F in V
2. Le curve $\gamma(t)$ soluzioni sono tutte e sole quelle il cui sostegno è contenuto in una delle curve di livello di F.

(infatti $\gamma(t)$ ha il sostegno contenuto in una curva di livello di F

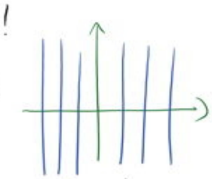
$\iff F(\gamma(t))$ non dipende da $t \iff \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \equiv 0 \quad \forall t$

$\iff \nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \equiv 0 \quad \forall t$

$\iff \overset{\neq 0}{\cancel{\rho(\gamma(t))}} \left(p(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + q(\gamma(t))\,\gamma_2'(t) \right) \equiv 0 \quad \forall t$

$\iff p(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + q(\gamma(t))\,\gamma_2'(t) \equiv 0 \quad \forall t$)

Ex. $\omega = dx = \overset{p}{1} \cdot dx + \overset{q}{0} \cdot dy$. Equilibri? $\begin{cases} 1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ No!



ω è esatta con primitiva $F(x) = x$; curve di livello $x = k$

Dunque le soluzioni dell'e.d.t. $\omega = 0$ sono tutte e sole le $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ con $\gamma_1(t) \equiv k$ con $\gamma_2'(t) \neq 0 \ \forall t$

N.B. I punti singolari di $\omega = p\,dx + q\,dy$ (ovvero i (x_0, y_0) t.c. $\begin{cases} p(x_0,y_0) = 0 \\ q(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$) corrispondono ai punti singolari degli insiemi (in questo caso, curve) di livello delle sue primitive $F(x,y)$, ovvero $\nabla F(x_0,y_0) = 0$.

Riassumiamo dunque le tattiche da seguire.

SISTEMA DIFF. AUTONOMO NEL PIANO
$$\begin{cases} \dot{x} = a(x,y) \\ \dot{y} = b(x,y) \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

→ (x_0, y_0) <u>equilibrio</u> (cioè $a(x_0,y_0) = b(x_0,y_0) = 0$): la sol. cercata è la <u>costante</u> $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$.

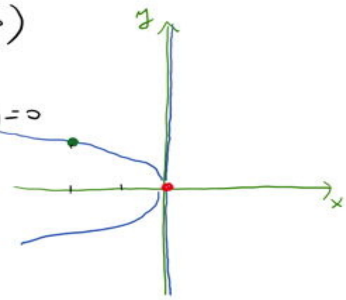
→ <u>altrimenti</u>: (A MENO DI PTO) → EQUAZ. DIFF. TOTALE ASSOCIATA $\omega = b\,dx - a\,dy = 0$ cercare la curva integrale che passa per (x_0, y_0) ← NON DEVE CONTENERE EQUILIBRI!

→ tale curva integrale, vista come orbita del sistema, sarà percorsa <u>interamente</u> e <u>monotonicamente</u> dalle soluzioni del sistema.

→ (se si vuole!) Tornare al sistema sfruttando l'informazione geometrica sull'orbita della soluzione da determinare.

Ex. Dato il sistema $\begin{cases} \dot{x} = -2xy = a \\ \dot{y} = x + y^2 = b \end{cases}$ determinarne equilibri, orbite, loro versi di percorrenza. Risolvere poi il pb. di Cauchy con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (-2, 1)$.

Equilibri: $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 0 \\ x + y^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{matrix}$ $O(0,0)$



Orbite: ⇝ e.d.t. associata $\omega = \overbrace{(x+y^2)}^{b}\,dx + \overbrace{2xy}^{-a}\,dy = 0$

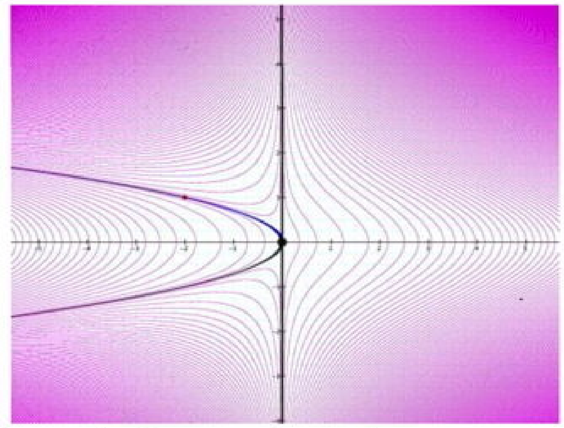
Si è già visto che ω è esatta, con primitiva $F = \frac{1}{2}x(x+2y^2)$, le cui curve di livello sono $x(x+2y^2) = K$, $K \in \mathbb{R}$.

Curva di <u>livello zero</u>: $x(x+2y^2) = 0$ $\begin{matrix} x = 0 \\ x + 2y^2 = 0 \end{matrix}$

Le curve di livello $K \neq 0$ sono rappresentate nella figura sotto.

La curva di livello $K = 0$ contiene 5 orbite (l'equilibrio O, e le quattro curve in cui l'equilibrio O spezza la curva di livello, che è

l'unione dell'asse y e della parabola $x=-2y^2$.
Le altre curve di livello contengono ciascuna 2 orbite (le componenti connesse)
Ad esempio, col nostro dato $(x(0),y(0))=(-2,1)$ l'orbita sarà la mezza parabola $x=-2y^2$ con $y>0$ percorsa interamente da sinistra a destra (infatti $\dot{x}=-2xy>0$ nel II° quadrante): per $t\to-\infty$ il punto proverrà dalla distanza infinita del II° quadrante, per $t=0$ transiterà per il dato iniziale, e per $t\to+\infty$ tenderà asintoticamente all'equilibrio O.



Torniamo ora al dato sistema $\begin{cases}\dot{x}=-2xy\\ \dot{y}=x+y^2\end{cases}$ con $(x(0),y(0))=(-2,1)$.
con l'informazione geometrica che $x=-2y^2$

$$\dot{y}=x+y^2 \overset{x=-2y^2}{\Longrightarrow} \dot{y}=-y^{2} \Rightarrow -y^{-2}dy=+dt \qquad 1/y=t+K \overset{y(0)=1}{\rightsquigarrow} \frac{1}{y}=t+1$$

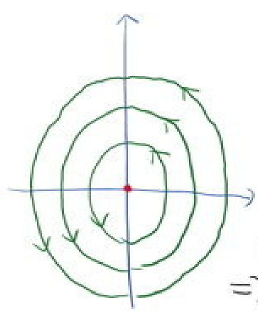
$$\Rightarrow y(t)=\frac{1}{1+t}\ ; \quad x(t)=-2y(t)^2=-\frac{2}{(1+t)^2}.$$

Dunque la soluzione cercata è $(x(t),y(t))=\left(-\frac{2}{(1+t)^2},\frac{1}{1+t}\right)$.

Ex $\begin{cases}\dot{x}=-\alpha y & a\\ \dot{y}=\beta x & b\end{cases}$ $(\alpha,\beta>0)$.

Equilibri: $a=b=0 \Rightarrow O(0,0)$
$\omega = b\,dx - a\,dy = \beta x\,dx + \alpha y\,dy$ esatta
Primitiva: $F(x,y)=\dfrac{\beta x^2+\alpha y^2}{2}$

Curve di livello di F: $\beta x^2+\alpha y^2=K\geq 0$ ellissi $\dfrac{x^2}{(\sqrt{K/\beta})^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{K/\alpha})^2}=1$



Se assegno un dato iniziale ad es. nel I° quadrante:

$$\begin{cases} y=\sqrt{\dfrac{K-\beta x^2}{\alpha}}\\ \dot{x}=-\alpha y\end{cases} \Rightarrow \dot{x}=-\sqrt{\alpha(K-\beta x^2)} \quad \text{(disaccoppiato)}$$

Per risolvere cerchiamo forme $x(t)=\sqrt{K/\beta}\cos\psi(t)$

dunque $\dot{x}=-\sqrt{K/\beta}\,\psi'(t)\sin\psi(t)=-\sqrt{\alpha(K-K\cos^2\psi(t))}=-\sqrt{K\alpha}\sin\psi(t)$

$\Rightarrow \psi'(t)=\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow \psi(t)=t\sqrt{\alpha\beta}+h \Rightarrow x(t)=\sqrt{K/\beta}\cos(t\sqrt{\alpha\beta}+h)$

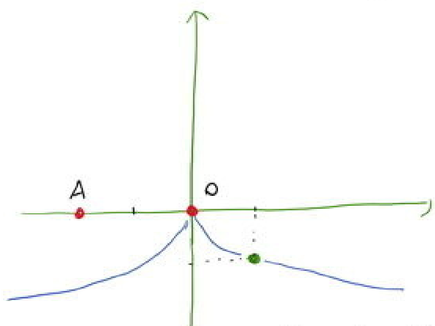
e dunque $y(t)=\sqrt{\dfrac{K-\beta x^2}{\alpha}}=\sqrt{K/\alpha}\sin(t\sqrt{\alpha\beta}+h)$

Sennò: $\dot{x}=-\alpha y \Rightarrow \ddot{x}=-\alpha\dot{y}=-\alpha\beta x$ cioè $\ddot{x}+\alpha\beta x=0$ LINEARE II° ORDINE A COEFF. COST.
da cui $x(t)=A\cos(\sqrt{\alpha\beta}\,t+\phi)$, poi $y=-\dot{x}/\alpha=A\sqrt{\beta/\alpha}\sin(t\sqrt{\alpha\beta}+\phi)$

Ex. Risolvere l'e.d.t. $(x^2+2x+y^3)\,dx + 3y^2\,dy = 0$ determinando in particolare la curva integrale passante per $(1,-1)$. Dare due-tre esempi di sistemi autonomi associati a tale e.d.t., risolvendo l'analogo pb. di Cauchy.

$\omega = (x^2+2x+y^3)\,dx + 3y^2\,dy = 0$. Come visto nelle scorse lezioni, col fattore integrante $g = e^x$ ha le primitive $F(x,y) = e^x(x^2+y^3)$

Punti singolari di ω: $\begin{cases} x^2+2x+y^3 = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$, $x=0$: $O(0,0)$, $F(O)=0$; $x=-2$: $A(-2,0)$, $F(A) = 4/e^2$



Le curve di livello di F ($x^2+y^3 = k e^{-x}$) saranno tutte regolari, tranne:

- Quella con $K = 4/e^2$ (spezzata dall'equilibrio A)
- Quella con $K=0$ (" " " O)

$$x^2+y^3 = 0 \Rightarrow y = -|x|^{2/3}$$

L'orbita della soluzione di un qualsiasi sistema autonomo associato alle mie eq. diff. totale $\omega = \overbrace{(x^2+2x+y^3)}^{b}\,dx + \overbrace{3y^2}^{-a}\,dy = 0$, ovvero

$$\begin{cases} \dot x = \sigma(-3y^2) \\ \dot y = \sigma(x^2+2x+y^3) \end{cases}$$

con $\sigma(x,y) \neq 0$ sul IV° quadrante e dato iniziale $(x(0),y(0)) = (1,-1)$ sarà la mezza cuspide $y = -x^{2/3}$ con $x>0$, ma per sapere di più (verso di percorrenza, legge oraria, ...) dovrò scegliere σ.

1) $\sigma(x,y) = -\dfrac{1}{3y^2}$ (<0 nel semipiano $y<0$): $\begin{cases} \dot x = 1 \\ \dot y = -\dfrac{x^2+2x+y^3}{3y^2} \end{cases}$

$\dot x = 1 \Rightarrow x(t) = t+K$, e da $x(0)=1 \Rightarrow K=1$, cioè $x(t) = 1+t$

Sappiamo poi che $y = -x^{2/3} = -(1+t)^{2/3}$ (definita per $t>-1$, intorno di $t_0=0$)

2) $\sigma(x,y) = 1$ $\begin{cases} \dot x = -3y^2 \\ \dot y = x^2+2x+y^3 \end{cases}$ $(x(0),y(0)) = (1,-1)$, $y = -x^{2/3}$

$\dot x = -3y^2 \Rightarrow \dot x = -3x^{4/3} \Rightarrow x^{-4/3}\,dx = -3\,dt \Rightarrow \dfrac{x^{-1/3}}{-1/3} = -3t+K$

Ma $x(0) = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{-1/3} = K$, $K=-3 \Rightarrow x(t) = \dfrac{1}{(1+t)^3}$

e $y(t) = -x(t)^{2/3} = -\dfrac{1}{(1+t)^2}$, def per $t>-1$ (da dx a sx)

3) $\sigma(x,y) = x^{-1/3}$ $\begin{cases} \dot x = -3x^{-1/3}y^2 \overset{y=-x^{2/3}}{\Longrightarrow} \dot x = -3x \Rightarrow x(t) = Ke^{-3t} \text{ con } K=1 \\ \dot y = x^{-1/3}(x^2+2x+y^3) \end{cases}$

$x(t) = e^{-3t}$, $y(t) = -x^{2/3} = -e^{-2t}$;

soluzione $(x(t),y(t)) = (e^{-3t}, -e^{-2t})$, definita per $t \in \mathbb{R}$

(le mezze cuspide qui è percorsa da dx a sx)