Università degli Studi di Padova

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 21/11/2024

Caso particolarmente importante: E.D.T. A VARIABILI SEPARABILI

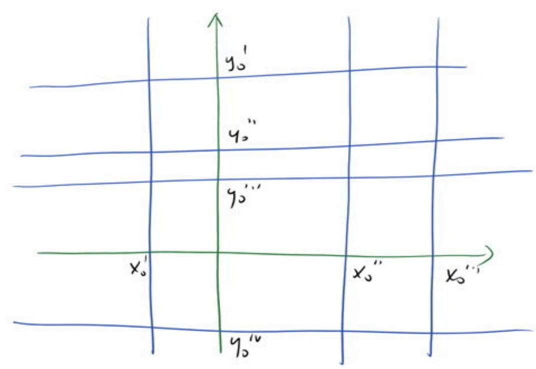
$$\boxed{\omega = \overbrace{a_1(x)\, b_2(y)}^{p(x,y)}\, dx + \overbrace{b_1(x)\, a_2(y)}^{q(x,y)}\, dy = 0}$$

Equilibri: $\begin{cases} a_1(x)\, b_2(y) = 0 \\ b_1(x)\, a_2(y) = 0 \end{cases}$ $\quad a_1(x)=0,\ b_2(y)=0,\ b_1(x)=0,\ a_2(y)=0$

Dunque sono i punti (x_0, y_0) t.c. $a_1(x_0) = a_2(y_0) = 0$ oppure $b_1(x_0) = b_2(y_0) = 0$

Il fattore integrante si vede anche a occhio: $\rho = \dfrac{1}{b_1(x)\, b_2(y)}$.

Bisogna però accertarsi di quello che accade quando $b_1(x)$ e $b_2(y)$ si annullano.



- Se x_0 è t.c. $b_1(x_0) = 0$, allora $x \equiv x_0$ è curva integrale: infatti, se $\gamma(t)$ è t.c. $\gamma_1(t) \equiv x_0$ allora $\gamma_1'(t) \equiv 0$ e dunque è soluzione
- Analogamente, se y_0 è t.c. $b_2(y_0) = 0$ allora $y \equiv y_0$ è curva integrale.

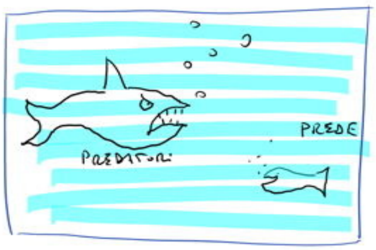
Altrimenti (dunque all'interno di ciascuna zona individuata dal reticolo) possiamo usare ρ:
$$\rho\omega = \frac{a_1(x)}{b_1(x)}\, dx + \frac{a_2(y)}{b_2(y)}\, dy$$

$$\rightsquigarrow \quad F(x,y) = \int \frac{a_1(x)}{b_1(x)}\, dx + \int \frac{a_2(y)}{b_2(y)}\, dy \quad \text{primitiva di } \rho\omega$$

e le altre curve integrali sono $F(x,y) = k$.

Ex. Trattiamo il SISTEMA PREDA-PREDATORE DI LOTKA-VOLTERRA

[IN FONDO AL FILE DELLA LEZIONE RIPORTO MAGGIORI INFORMAZIONI STORICHE]



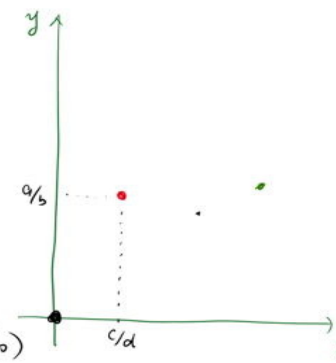
$x(t)$ = PREDE $\quad y(t)$ = PREDATORI

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \quad \text{con } a, b, c, d > 0$$

Equilibri (sol. costanti): $\begin{cases} x(a-by) = 0 \\ y(dx-c) = 0 \end{cases}$

Equilibri sono $(0,0)$ oppure $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a-by) \\ \dot{y} = y(dx-c) \end{cases} \rightsquigarrow \underbrace{y}_{b_2(y)}\underbrace{(dx-c)}_{a_1(x)}\,dx + \underbrace{x}_{b_1(x)}\underbrace{(by-a)}_{a_2(y)}\,dy \quad \text{a var. sep.}$$



Come visto prima, gli assi $x=0$ e $y=0$ sono soluzioni dell'e.d.t. ma in realtà lo è ciascun semiasse (perché l'equilibrio $(0,0)$ li spezza in orbite diverse).

Ci concentriamo allora su dati iniziali nel 1° quadrante (caso fisicamente significativo)

Per unicità, l'orbita di un dato iniziale nel I° quadrante deve restare confinata in esso (gli assi non possono essere attraversati).

$$F(x,y) = \int \frac{dx-c}{x}\,dx + \int \frac{by-a}{y}\,dx = dx - c\log x + by - a\log y$$

Le altre orbite sono poste $F(x,y) = K$. Come sono fatte?

F è di classe C^1. Inoltre:

$$\nabla F = \left(d - \frac{c}{x}, b - \frac{a}{y}\right) = (0,0) \iff (x,y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$$

$$H_{(x,y)}(F) = \begin{pmatrix} c/x^2 & 0 \\ 0 & a/y^2 \end{pmatrix} > 0 \text{ ovunque} \implies \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \text{ è minimo assoluto per } F$$
e F è convessa

Inoltre, fissato un qualsiasi $y_0 > 0$, consideriamo

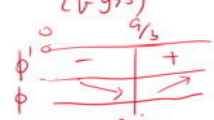
$$\psi(x) := dx - c\log x + by_0 - a\log y_0$$

$$\geq dx - c\log x + M \xrightarrow{x \to 0^+} +\infty$$
$$\xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$$

$\phi(y) = by - a\log y$

$\phi'(y) = b - a/y = 0 \quad y = a/b$

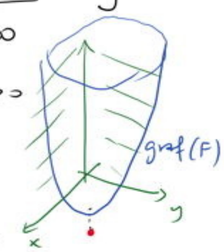
$\phi'(y) > 0 \iff y > a/b$ (per $y>0$)

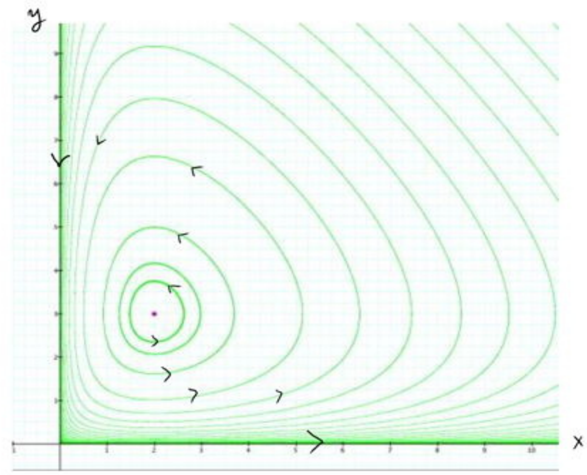


$M = \phi(a/b) = a\left(1 - \log\frac{a}{b}\right)$

$\lim_{\substack{y \to 0^+ \\ y \to +\infty}} \phi(y) = +\infty$

ovvero $\psi(x)$ tende a $+\infty$ uniformemente in y
quando $x \to 0^+$ oppure quando $x \to +\infty$
Idem per $\psi(y)$ quando fisso $x_0 > 0$
Pertanto le curve di livello $F = k$
sono delle curve compatte che
racchiudono l'equilibrio $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$.





Le soluzioni $(x(t), y(t))$
sono eterne (hanno dominio $\mathbb{R}$)
per la "fuga dai compatti"
(la loro immagine è una curva
compatta, dunque devono
"sforare nel dominio").
e sono periodiche (perché devono
assumere lo stesso valore dopo
un certo tempo T, e si è mostrato
che in tal caso la soluz. è periodica).

Supponiamo ora che le condizioni ambientali migliorino o peggiorino.
Ciò si modella aggiungendo un termine di crescita o decrescita
malthusiana uguale per entrambe le popolazioni:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \pm \varepsilon x = (a \pm \varepsilon)x - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \pm \varepsilon y = -(c \mp \varepsilon)y + dxy \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ è un problema come prima, con parametri a e c alterati
e il valor medio si attesta sul valore $\left(\dfrac{c \mp \varepsilon}{d}, \dfrac{a \pm \varepsilon}{b}\right)$:

dunque se le condizioni migliorano/peggiorano ne
risultano avvantaggiati i predatori / le prede

(esempi: pesce in Adriatico in tempo di guerra,
aumento della pesca, uso di pesticidi...)

Infine, qualche nota ulteriore sul problema di Lotka-Volterra...

Si considerino, all'interno di un ambiente molto vasto, due specie di animali. La prima (PREDE) trovi nell'ambiente spazio e cibo a volontà, eliminando così ogni soglia logistica; la seconda (PREDATORI) trovi nell'ambiente spazio a volontà ma nessun cibo disponibile, tranne quello che le riesce a procurarsi cacciando le prede.

Esempio originale (da cui Vito Volterra elaborò il suo modello): il pesce commestibile e il pesce predatore nel mare Adriatico. Storicamente, i ricercatori dell'Università di Padova notarono che, durante la I^a guerra mondiale, il drastico calo della pesca nell'Adriatico (dovuto alla paura che i pescherecci venissero colpiti da navi militari) stava provocando un aumento non del pesce commestibile ma del pesce predatore (squaletti etc.), contrariamente a quanto essi si aspettavano. Ne chiesero ragione all'insigne matematico Volterra, che risolse il dilemma spiegandolo col suo modello, di cui parliamo ora.

---

x = PREDE $\quad y$ = PREDATORI. Interessa l'evoluzione temporale di ciascuna delle due popolazioni, ovvero $t \mapsto (x(t), y(t))$.

L'evoluzione obbedisce a una legge del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \qquad \text{con } a, b, c, d > 0$$

che, pensando ad esempio al caso di pesce commestibile e pesce predatore all'interno dell'ambiente marino, si può comprendere come segue:

crescita malthusiana: ambiente sconfinato e ricco di cibo per le prede

decrescita malthusiana: ambiente sconfinato ma senza cibo per i predatori

COMPONENTE AMBIENTALE | COMPONENTE DI INTERAZIONE TRA PREDE E PREDATORI

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \;\; - bxy \\ \dot{y} = -cy \;\; + dxy \end{cases}$$

la frequenza di incontri (proporzionale alle due popolazioni) risulta LETALE per le prede e VITALE per i predatori

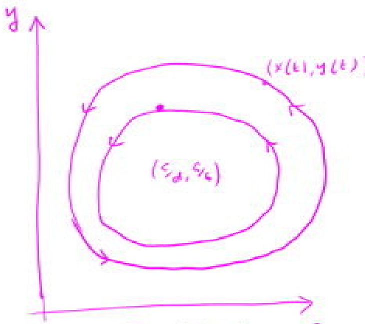
Una soluzione del problema è la costante $(x_0, y_0) = (c/d, a/b)$

$\left(\text{infatti} \quad \begin{cases} 0 = a \cdot c/d - b \cdot c/d \cdot a/b \\ 0 = -c \cdot a/b + d \cdot c/d \cdot a/b \end{cases} \right)$

E le soluzioni non costanti $t \longmapsto (x(t), y(t))$?

In Analisi III si vedrà che:

- le soluzioni sono periodiche e eterne (hanno dominio $t \in \mathbb{R}$)
- la loro immagine è un circuito che gira attorno alla soluzione costante (EQUILIBRIO), che risulta essere anche il valor medio delle popolazioni $x(t)$ e $y(t)$ nel periodo.
  Ovvero, detto $T>0$ il periodo temporale, $\left(\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt, \ \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt \right) = (c/d, a/b)$.



se aumentano le prede aumentano anche i predatori, che mangiando le prede le fanno diminuire, ma allora i predatori diminuiscono perché trovano meno cibo, e questo fa aumentare le prede, che fanno aumentare i predatori...

Supponiamo ora che le condizioni ambientali migliorino oppure peggiorino. Questo si può modellizzare aggiungendo una crescita o decrescita malthusiana uguale per entrambe le popolazioni ($\varepsilon > 0$):

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \pm \varepsilon x = (a+\varepsilon)x - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \pm \varepsilon y = -(c-\varepsilon)y + dxy \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ il problema è uguale al precedente con parametri alterati, e il nuovo valor medio si attesta su $\left(\frac{c \mp \varepsilon}{d}, \frac{a \pm \varepsilon}{b} \right)$

Dunque se le condizioni ambientali migliorano, ne risultano avvantaggiati i predatori. Ciò è avvenuto ad esempio:

- nell'Adriatico durante la I^a guerra mondiale, in cui la pesca era drasticamente diminuita: si era notato un sensibile aumento non delle specie di pesce commestibile ma delle specie dei predatori (squaletti etc...).

Invece se le condizioni ambientali peggiorano, ne risultano avvantaggiate le prede. Ad esempio:

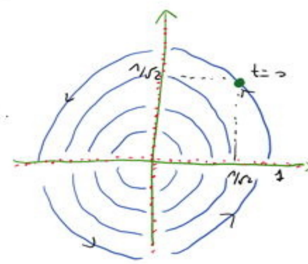
- intensificando moderatamente la pesca (sia del pesce commestibile che dei predatori) si ottiene un aumento del pesce commestibile.
- Trattare una coltivazione con insetticidi, che sterminano sia i parassiti sia i loro predatori naturali (ad esempio le coccinelle), può portare alla fine ad un peggioramento dell'infestazione parassitaria.

Qualche altro esercizio.

Ex.1 Dato il sistema autonomo nel piano $\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 \\ \dot{y} = x^2 y \end{cases}$ determinare gli equilibri, le orbite, il loro verso di percorrenza.
Risolvere infine il pb. di Cauchy con $(x(0), y(0)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = \overset{\rho}{xy}\,(-y) \\ \dot{y} = \overset{\rho}{xy}\,(x) \end{cases}$$

Vedo che il sistema, fuori dagli assi in cui $\rho = xy = 0$, è equivalente al ben noto sistema $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$ di cui abbiamo già trovato le curve integrali:
$F(x,y) = x^2+y^2 = K$.



Equilibri $\begin{cases} -xy^2 = 0 \\ x^2 y = 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} \nearrow x = 0 \\ \searrow y = 0 \end{matrix}$ tutti i punti degli assi coordinati.

Le altre curve integrali (circonferenze $x^2+y^2=K$) saranno spezzate ciascuna in 8 orbite: ovvero i 4 equilibri sugli assi e i 4 tratti in ciascuno dei quadranti.
Nel mio caso (dato iniziale verde) l'orbita è il quarto di circonf. $\begin{cases} x^2+y^2 = 1, \\ x, y > 0. \end{cases}$ percorso in senso antiorario (nel I quadrante $\dot{x} < 0$ e $\dot{y} > 0$).

$x^2+y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = x^2 y = y(1-y^2)$ var. separabili

$\frac{1}{y(1-y^2)}\, dy = dt \qquad \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2-1}\right) dy = dt \qquad \log y - \frac{1}{2}\log(1-y^2) = t+K$

$\log\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right) = t+K \quad \xrightarrow{y(0)=1/\sqrt{2}} \quad \log\left(\frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{1-1/2}}\right) = 0+K \Rightarrow K = 0$

$\log\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right) = t \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = e^t \Rightarrow (e^{2t}+1)\,y^2 = e^{2t} \Rightarrow y(t) = \cancel{\pm}\, \frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}}$

$\Rightarrow \quad x(t) = \sqrt{1-y(t)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}} \qquad (x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}, \frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right)$
dominio è $\mathbb{R}$ (fuga dai compatti)

Ex.2 $\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$ Equilibri, orbite, verso di percorrenze.
Risolvere i pbb. di Cauchy con dati iniziali
$A(-1, 0) \quad B(-1, 1) \quad C(-1, 2)$

[SOLUZIONE MESSA IN CALCE ALLE NOTE]

Come detto, nel quadro dei sistemi autonomi del piano vengono ricompresi le e.d.o. scalari del I° ordine $y' = f(t,y)$ (con $(x,y) = (t,y)$) e le e.d.o. scalari del II° ordine autonome $y'' = h(y,y')$ (con $(x,y) = (y,y'_p)$)

Es. 3 [ESAME SCRITTO 2016/17 DEL 12/9/17, ESERCIZIO (4)]

Si abbia l'eq. diff. scalare $y'(y-t) = 2y$ nell'incognita $y(t)$.

(a) Analisi a priori su esistenza, unicità, crescenza, convessità.
Soluzioni costanti? Lineari?
Se $y(t)$ è soluzione su $I \subset]0,+\infty[$, lo sono anche $y(-t)$ e/o $-y(-t)$ su $-I \subset]-\infty,0[$?

(b) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione.

(a) L'equazione NON è in forma normale $y' = f(t,y)$

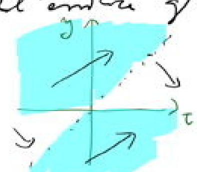
Se una soluzione $y(t)$ soddisfa $y(t_0) = t_0$ per un certo $t_0 \in \mathbb{R}$, si ha che $y'(t_0)\cancel{(y(t_0)-t_0)} = 2y(t_0) \Rightarrow y(t_0) = 0 = t_0$.

Dunque tale evenienza può avvenire solo eventualmente in $t=0$ (con $y(0)=0$): di conseguenza, soluzioni con dato iniziale $y(\alpha) = \alpha \neq 0$ NON ESISTONO.

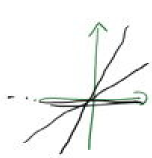
Negli altri casi (ovvero per dati del tipo $y(t_0) = y_0$ con $y_0 \neq t_0$) possiamo porla in forma normale $y' = \frac{2y}{y-t} = f(t,y)$, di classe C^1
$\Rightarrow \exists !$ locale sono garantite!

Nulla si può dire per ora sull'esistenza globale (T. Cauchy globale non è applicabile)

Crescenza: $y' = \frac{2y}{y-t} > 0$



Convessità: $y'' = 2\frac{y'(y-t) - y(y'-1)}{(y-t)^2} \overset{y' = \frac{2y}{y-t}}{=} \dots\dots 2\frac{y(y-3t)}{(y-t)^3} > 0$ ...



Soluzioni lineari? $y(t) = at+b$ $\quad y' = \frac{2y}{y-t}$ $\quad y'(y-t) = 2y$

$a(at+b-t) = 2(at+b) \qquad a(a-1)t + ab = 2at + 2b \qquad \begin{cases} a(a-1) = 2a \\ ab = 2b \end{cases}$

$a(a-1) = 2a \begin{cases} a=0 \Rightarrow b=0 \\ a=3 \Rightarrow b=0 \end{cases} \qquad y(t) \equiv 0$ e $y(t) = 3t$

$y(t)$ sia soluzione su $I \subset]0,+\infty[$; lo è anche $-y(-t)$ su $-I$?

$\psi(t) = -y(-t)$ DOMANDA: $\psi'(\psi - t) = 2\psi$?

$\psi'(t) = -y'(-t)(-1) = y'(-t).$

$$\psi'(t)\left(\psi(t)-t\right) = y'(-t)\left(-y(-t)-t\right) = -\overbrace{y'(-t)\left(y(-t)-(-t)\right)}^{2y(-t)}$$

$$= -2y(-t) = 2\left(-y(-t)\right) = 2\psi(t) \quad \text{ok!}$$

(b) $y'(y-t) = 2y \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x' = 1 \\ y' = \dfrac{2y}{y-x} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad (y-x)\,dy - 2y\,dx = 0$

Senza disturbarsi (trucco di calcolo): $y' = \dfrac{dy}{dt}$

$dy\,(y-t) = 2y\,dt \qquad \overset{p}{(y-t)}\,dy \overset{q}{-2y}\,dt = 0 \qquad \begin{array}{l} p(y,t) = y-t \\ q(y,t) = -2y \end{array}$

$\dfrac{\partial p}{\partial t} - \dfrac{\partial q}{\partial y} = -1-(-2) = 1 \neq 0$ non è esatta...

Poi $\dfrac{1}{q}\left(\dfrac{\partial p}{\partial t} - \dfrac{\partial q}{\partial y}\right) = -\dfrac{1}{2y}$ non dipende da t $\Rightarrow$ $\rho(y,t) = \exp\left(\int -\frac{1}{2y}\,dy\right)$ è f. integrante

$\rho = \exp\left(-\frac{1}{2}\log y\right) = \exp\left(\log \frac{1}{\sqrt{y}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$

Dunque la forma $\dfrac{y-t}{\sqrt{y}}\,dy - \dfrac{2y}{\sqrt{y}}\,dt$ sarà esatta.

$F(y,t)$ primitiva: $\begin{cases} \partial_y F = \frac{y-t}{\sqrt{y}} \\ \partial_t F = -2\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow F = -2t\sqrt{y} + \psi(y)$

$\Rightarrow \partial_y F = -\cancel{2}t \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{y}} + \psi'(y) = \dfrac{y-t}{\sqrt{y}} \Rightarrow \psi'(y) = \sqrt{y} \Rightarrow \psi(y) = \frac{2}{3}y\sqrt{y}$

$F(y,t) = -2t\sqrt{y} + \frac{2}{3}y\sqrt{y} = \frac{2}{3}\sqrt{y}\,(y-3t)$

Curve integrali: $F = k$, cioè $\sqrt{y}\,(y-3t) = k$

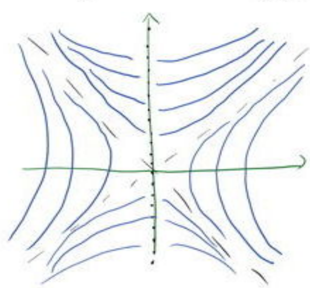
Se $k=0$: $\sqrt{y}\,(y-3t) = 0 \quad \begin{array}{l} y = 0 \\ y = 3t \end{array}$ (già trovate...)

Se $k \neq 0$: $\sqrt{y}\,(y-3t) = K$ da cui devo ricavare $y(t)$.... Difficile!

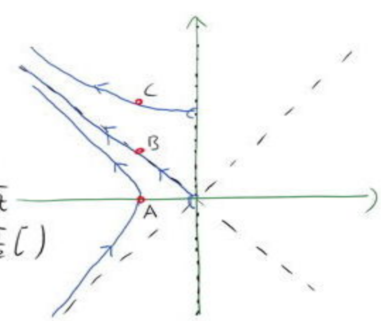
RISOLUZIONI DEGLI ESERCIZI
NON SVOLTI IN AULA

Ex. 2 $\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$ Equilibri, orbite, verso di percorrenza.
Risolvere i pbb. di Cauchy con dati iniziali
$A(-1,0)$, $B(-1,1)$, $C(-1,2)$

Equilibri: $\begin{cases} xy=0 \\ x^2=0 \Rightarrow x=0 \end{cases}$, tutti e soli i punti dell'asse y.



Al di fuori dell'asse y il sistema è equivalente
a $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ e.d.t. associata $x\,dx - y\,dy = 0$
Int. primo x^2-y^2: curve di livello sono iperboli
equilatere con assi negli assi coordinati



- Per $A(-1,0)$: $x^2-y^2=1 \rightsquigarrow \dot{y} = 1+y^2 \rightsquigarrow$
$\operatorname{arctg} y = t+K$ ma $y(0)=0 \Rightarrow K=0$
$\operatorname{arctg} y = t \rightsquigarrow y = \operatorname{tg} t \rightsquigarrow x = -\sqrt{1+y^2} = -\frac{1}{\cos t}$
$(x(t), y(t)) = \left(-\frac{1}{\cos t}, \operatorname{tg} t\right)$ (defin. in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$)
- Per $B(-1,1)$: $x^2-y^2=0 \rightsquigarrow y=-x$ con $x<0 \rightsquigarrow$
$\dot{y} = y^2 \to y(t) = \frac{1}{K-t}$, ma $y(0)=1 \rightsquigarrow K=1$
$y(t) = \frac{1}{1-t} \to x = -y = -\frac{1}{1-t} \to (x(t), y(t)) = \left(-\frac{1}{1-t}, \frac{1}{1-t}\right)$
(definita in $]-\infty, 1[$)
- Per $C(-1,2)$: $x^2-y^2=-3 \to \dot{y} = y^2-3$ $\quad \frac{dy}{y^2-3} = dt$
$\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{y-\sqrt{3}} - \frac{1}{y+\sqrt{3}}\right) dy = dt$ $\quad \frac{1}{2\sqrt{3}} \log\left|\frac{y-\sqrt{3}}{y+\sqrt{3}}\right| = t+K$, ma
$y(0)=2 \rightsquigarrow K = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \log(2-\sqrt{3})$, perciò
$\log\left|\frac{y-\sqrt{3}}{y+\sqrt{3}}\right| = 2t\sqrt{3} + 2\log(2-\sqrt{3}) \rightsquigarrow \left|\frac{y-\sqrt{3}}{y+\sqrt{3}}\right| = (2-\sqrt{3})^2 e^{2t\sqrt{3}}$
$\rightsquigarrow y-\sqrt{3} = (y+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2 e^{2t\sqrt{3}} \rightsquigarrow y\left(1-(2-\sqrt{3})^2 e^{2t\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}\left((2-\sqrt{3})^2 e^{2t\sqrt{3}} + 1\right)$
$\to y(t) = \sqrt{3} \; \frac{1+(7-4\sqrt{3})e^{2t\sqrt{3}}}{1-(7-4\sqrt{3})e^{2t\sqrt{3}}} \rightsquigarrow x(t) = -\sqrt{y^2-3} = -2\sqrt{3}\,\frac{(2-\sqrt{3})e^{t\sqrt{3}}}{1-(7-4\sqrt{3})e^{2t\sqrt{3}}}$

(definita per $e^{2t\sqrt{3}} < (2-\sqrt{3})^{-2}$ ovvero $e^{t\sqrt{3}} < \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$ ovvero $t\sqrt{3} < \log(2+\sqrt{3})$)
ovvero per $t \in \left]-\infty, \frac{1}{\sqrt{3}} \log(2+\sqrt{3})\right[$.