UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 22/11/2024

Ex. 4 Studiare $y'' = \overbrace{2yy'(y'-1)}^{h(y,y')}$ (nell'incognita $y(t)$).

Eq. scalare autonoma del II° ordine.
Posto $(y,p) = (y,y')$ essa equivale al sistema $\begin{cases} y' = p \\ p' = 2yp(p-1) \end{cases}$
Il campo $g(y,p) = (p, 2yp(p-1))$ è C^∞ $\Rightarrow$ garantisce $\exists !$ sol.
(per soluzioni $y(t)$ di un problema $y(0)=\alpha$, $y'(0)=\beta$)
$\Rightarrow$ unicità globale!
La crescita di g è cubica $\Rightarrow$ non si può applicare T. Cauchy globale
$2yp(p-1)\,dy - p\,dp = 0$ a variabili separabili.
Notiamo che $p=0$ e $p=1$ sono curve integrali
(corrispondenti a $y'=0$ e $y'=1$, ovvero $y(t)\equiv k$ e $y(t) = t+k$)

Separo le variabili: $2y\,dy - \frac{1}{p-1}\,dp = 0$
$F(y,p) = y^2 - \log|p-1| = K \Rightarrow \log|p-1| = y^2 - K \Rightarrow |p-1| = e^{y^2-K} = \overbrace{e^{-K}}^{h>0} e^{y^2}$
$\Rightarrow p-1 = \underbrace{h}_{\in\mathbb{R}} e^{y^2} \Rightarrow p = he^{y^2}+1$ cioè $y' = he^{y^2}+1$ a var. sep.
$\frac{1}{he^{y^2}+1}\,dy = dt$, che dovrei integrare...

Ex. 5 $x^2y' + \sin y = 0$ (qui si intende $y(x)$).
Analizzarla tramite l'e.d.t. associata oppure con i mezzi di Analisi I (ovvero a variabili separabili), e risolvere i pbl. di Cauchy con dati iniziali $y(1) = 3\pi/2$ oppure $y(-1) = \pi$.

[SOLUZIONE MESSA IN CALCE ALLE NOTE]

Altri tipi di equazioni differenziali che si possono trattare sono ad esempio:

- le equazioni scalari del I° ordine OMOGENEE, ovvero del tipo $y' = f(x,y)$ con f omogenea di grado 0 (cioè $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ $\forall \lambda \neq 0$),

  o, in modo analogo,

  le e.d. totali $p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = 0$ con p e q omogenee dello stesso grado r (cioè $p(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r p(x,y)$ $\forall \lambda \neq 0$):

  la tecnica prevede di sostituire $y(x)$ con $z(x)$ t.c. $y = xz$, e poi $z(x)$ soddisfa un'equazione a variabili separabili.

- le equazioni di Bernoulli $y' + p(x)\,y = q(x)\,y^\beta$ con $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

  (si vede sulle dispense).

Ex. 6 $y' = \dfrac{3x-y}{x+y}$

Si nota che $f(x,y) = \dfrac{3x-y}{x+y}$ è omogenea di grado 0.

Poniamo $y = xz$ (anziché $y(x)$ mi occupo di $z(x)$)

$y = xz \to y' = z + xz'$, dunque

$$z + xz' = \frac{3\cancel{x} - \cancel{x}z}{\cancel{x}+\cancel{x}z} \Rightarrow xz' = \frac{3-z}{1+z} - z = \frac{3-2z-z^2}{1+z}$$

$\to xz' = \dfrac{3-2z-z^2}{1+z}$ variabili separabili!

$z \equiv 1$ e $z \equiv -3$ soluzioni ($\Rightarrow y = x$ e $y = -3x$)

$$\frac{z+1}{z^2+2z-3}\,dz = -\frac{1}{x}\,dx \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+3}\right)dz = -\frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\log|z^2+2z-3| = -\log|x| + K \Rightarrow |z^2+2z-3| = \frac{h}{x^2} \quad (h>0)$$

$$z^2+2z-3 = h/x^2 \to z(x) = -1 \pm \sqrt{1+3+h/x^2} = -1 \pm \frac{\sqrt{4x^2+h}}{|x|}$$

da cui $y(x) = x \cdot z(x) = \pm\sqrt{4x^2+h} - x$ con $h \in \mathbb{R}$.

Ex. 7 $\sqrt{y-x}\,dx + \dfrac{x}{\sqrt{y-x}}\,dy = 0$

[RISOLUZIONE MESSA IN CALCE ALLE NOTE]

Ex. 8 [Foglio Esercizi n° 2, Ex. 3(i)]

Dire se l'eq. autonoma $y'' = e^y$ ha soluzioni costanti. Determinare poi la soluzione $y_\alpha(t)$ t.c. $y_\alpha(0) = 0$ e $y'_\alpha(0) = \alpha$ al variare di $\alpha > 0$.

Una soluz. costante $y \equiv k$ dovrebbe soddisfare $0 = e^k$ impossibile! No costanti.

L'equazione $y'' = e^y$ è del tipo $y'' = h(y)$, con h continua (ovvio: è scalare...) con primitiva $\int e^y \, dy = e^y$.

Energia pot. $U(y) = -e^y$. Energia totale (int. primo): $E(y,y') = \frac{1}{2}(y')^2 - e^y$

Dunque lungo le soluzioni $y_a(t)$ l'energia vale sempre $(\forall t)$ $\frac{a^2}{2} - 1$

dunque essa soddisfa $\frac{1}{2}(y')^2 - e^y = \frac{a^2}{2} - 1 \quad \forall t$. (I° ordine)

ovvero $(y')^2 = a^2 - 2 + 2e^y \Rightarrow y' = \cancel{\pm}\sqrt{a^2 - 2 + 2e^y}$.

Conviene distinguere i casi $a = \sqrt{2}$, $0 < a < \sqrt{2}$, $a > \sqrt{2}$.

- Se $a = \sqrt{2}$: $y' = \sqrt{2e^y} = \sqrt{2} \cdot e^{y/2}$ $\quad e^{-y/2} dy = \sqrt{2}\, dt$

  $-2e^{-y/2} = t\sqrt{2} + K \xrightarrow{y_a(0)=0} -2 = 0 + K$ cioè $K = -2$

  $-2e^{-y/2} = -2 + t\sqrt{2} \quad e^{-y/2} = 1 - t/\sqrt{2}$

  $-y/2 = \log(1 - t/\sqrt{2}) \quad y(t) = -2\log(1 - t/\sqrt{2})$ definita per $1 - t/\sqrt{2} > 0$ cioè $t \in \left]-\infty, \sqrt{2}\right[$

- Se no $(a \neq \sqrt{2})$: $y' = \sqrt{a^2 - 2 + 2e^y}$

  Pongo $a^2 - 2 + 2e^y = \eta^2$ (da cui $e^y dy = \eta \, d\eta$)

  Dunque $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2 + 2e^y}} dy = \int \frac{2}{\eta^2 + (2 - a^2)} d\eta$ etc...

Ex. 9 [PROVA SCRITTA 2015/16 DEL 25/1/2016, EX. 4]

Si abbia l'eq. diff. $y'' = (y')^2 - 2y$ nell'incognita $y(t)$.

(a) Cosa dire su esistenza e unicità delle soluzioni?
Vi sono soluzioni costanti?
Se $\varphi(t)$ è soluzione, lo sono anche $\varphi(-t)$ oppure $-\varphi(-t)$?
Se sì, le soluzioni definite in $t=0$ sono necessariamente (dis)pari?

(b) Determinare la soluzione tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

(a) L'equazione equivale al sistema del I° ord. $\begin{cases} y' = p \\ p' = p^2 - 2y \end{cases}$

La funzione $f(y,p) = (p, p^2 - 2y)$ è C^∞ su tutto il piano (y,p) dunque esistenza e unicità locale (e unicità globale) sono garantite per ogni dato iniziale $(y(t_0), y'(t_0)) = (\alpha, \beta)$.

Poiché f ha crescita quadratica, nulla si può dire sull'esistenza globale delle soluzioni.

Una soluzione costante $y \equiv k$ deve soddisfare $0 = 0^2 - 2k$, dunque l'unica soluz. costante è $y \equiv 0$.

Sia ora $\varphi(t)$ una soluzione di $y'' = (y')^2 - 2y$ su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$
Allora $\psi(t) := \varphi(-t)$ è anch'essa soluzione sull'intervallo $-I$.

$\psi'(t) = -\varphi'(-t) \qquad \psi''(t) = \varphi''(-t)$.

$$\psi''(t) = \varphi''(-t) \overset{\varphi \text{ sol.}}{=} (\varphi'(-t))^2 - 2\varphi(-t) = (-\varphi'(-t))^2 - 2\varphi(-t) = (\psi'(t))^2 - 2\psi(t)$$

dunque anche $\psi(t) = \varphi(-t)$ è soluzione.

Una verifica analoga per $\eta(t) := -\varphi(-t)$ dà esito negativo.

Abbiamo visto che dunque anche $\psi(t) = \varphi(-t)$ è soluzione; ed evidentemente $\varphi(0) = \psi(0)$. Ma ciò NON basta qui a dire che $\varphi(t) = \psi(t)$ $\forall t$ (sarebbe la parità) perché siamo in un problema al II° ordine, dunque andrebbe verificato che anche $\varphi'(0) = \psi'(0)$ per concludere così. Ma ciò non ci viene, perché $\psi'(0) = -\varphi'(0)$ dunque l'unico caso di parità è quello con $\varphi'(0) = 0$.

(b) Cerchiamo le soluzioni di $y'' = (y')^2 - 2y$ con $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Eq. totale associata $\omega = (p^2 - 2y)\,dy - p\,dp$. ω esatta?

$$\frac{\partial(p^2-2y)}{\partial p} - \frac{\partial(-p)}{\partial y} = 2p \neq 0. \quad \text{Non è esatta.}$$

Poiché $\frac{1}{-p}\cdot\left(\frac{\partial(p^2-2y)}{\partial p} - \frac{\partial(-p)}{\partial y}\right) = -2$ non dipende da p.

$\Rightarrow$ fattore integrante è $\exp\left(\int -2\,dy\right) = e^{-2y}$.

Dunque $e^{-2y}\omega$ è esatta. (su tutto il piano $\mathbb{R}^2$ delle fasi (y,p)).

Primitiva $F(y,p)$: $\begin{cases} \partial_y F = (p^2-2y)e^{-2y} \\ \partial_p F = -p e^{-2y} \end{cases}$

$\partial_p F = -p e^{-2y} \Rightarrow F(y,p) = -\frac{p^2}{2} e^{-2y} + \phi(y)$

$\partial_y F = \cancel{-\frac{p^2}{2}(-2e^{-2y})} + \phi'(y) = (\cancel{p^2} - 2y)e^{-2y} \Rightarrow \phi'(y) = -2y e^{-2y}$

$\Rightarrow \phi(y) = (y + 1/2)e^{-2y}$

Curve integrali nel piano delle fasi: $F(y,p) = k$, cioè
$\left(-\frac{p^2}{2} + y + \frac{1}{2}\right)e^{-2y} = k$ con $k \in \mathbb{R}$.

Imponendo le cond. iniziali $y(0) = 0$, $\overset{p(0)}{y'(0)} = -1$

$\left(-\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\right)e^0 = k \Rightarrow k = 0$.

dunque $\left(-\frac{p^2}{2} + y + \frac{1}{2}\right)\cancel{e^{-2y}} = 0 \Rightarrow p^2 = 2y + 1$

cioè $(y')^2 = 2y+1 \Rightarrow y' = \overset{y'(0)<0}{\cancel{\pm}}\, -\sqrt{2y+1}$ I° ordine!

$\frac{1}{\sqrt{2y+1}}\,dy = -dt \rightsquigarrow \sqrt{2y+1} = h - t$ con $h = 1$ (perché $y(0) = 0$)

$\sqrt{2y+1} = 1 - t \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}t^2 - t$ (definita in $t = 0$ ma non pari!)

RISOLUZIONI DEGLI ESERCIZI NON SVOLTI IN AULA

Ex. 4 $x^2 y' + \sin y = 0$ (qui si intende $y(x)$).
Analizzarla tramite l'e.d.t. associata oppure con i mezzi di Analisi I (ovvero a variabili separabili), e risolvere i pb. di Cauchy con dati iniziali $y(1) = 3\pi/2$ oppure $y(-1) = \pi$.

Essa corrisponde al sistema $\begin{cases} \dot X = 1 \\ \dot Y = -\frac{\sin Y}{X^2} \end{cases}$ (per $X \neq 0$) $\left(\text{o al sistema } \begin{cases} \dot X = -X^2 \\ \dot Y = \sin Y \end{cases} \right)$

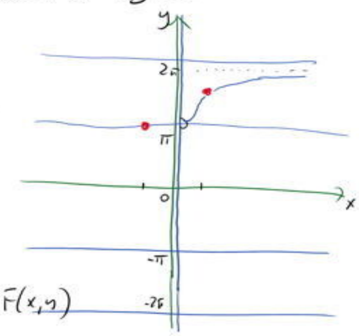
che dà luogo all'e.d.t. $\sin Y \, dX + X^2 dY = 0$:

talvolta si dice, formalmente, ponendo $y' = \frac{dy}{dx}$, trovando

$x^2 y' + \sin y = 0 \qquad x^2 \frac{dy}{dx} + \sin y = 0 \qquad \underbrace{\sin y}_{b_2(y)} \, dx + \underbrace{x^2}_{b_1(x)} dy = 0$

È una e.d.t. a variabili separabili.

Curve integrali: $x = 0$ (ogni y), $y = k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$



Per le altre curve integrali:

$\frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{\sin y} dy = 0$

Primitive: $\int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{\sin y} dy = -\frac{1}{x} + \log |\mathrm{tg}\, \frac{y}{2}| = F(x,y)$

Le soluzioni con $y(-1) = \pi$ è la costante $y(x) \equiv \pi$.

Vediamo ora quella con $y(1) = 3\pi/2$: $F(1, 3\pi/2) = -1 + \log |\mathrm{tg}\, \frac{3\pi}{4}| = -1$

$-\frac{1}{x} + \log |\mathrm{tg}\, y/2| = -1 \qquad \log |\mathrm{tg}\, y/2| = 1/x - 1 \qquad |\mathrm{tg}\, y/2| = e^{1/x - 1}$

$\mathrm{tg}\, y/2 = \pm e^{1/x-1} \Rightarrow y/2 = -\mathrm{arctg}(e^{1/x-1}) + h\pi$ per qualche $h \in \mathbb{Z}$

ma $y(1) = 3\pi/2 \Rightarrow \frac{3\pi}{4} = -\mathrm{arctg}\, 1 + h\pi = -\pi/4 + h\pi \Rightarrow h = 1$

$y(x) = 2(\pi - \mathrm{arctg}(e^{1/x-1}))$ che vive nel dominio $]0, +\infty[$

Notare che $\lim_{x \to 0^+} y(x) = 2(\pi - \pi/2) = \pi$, $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 2(\pi - \mathrm{arctg}(1/e))$

$y'(x) = \frac{2e^{1/x}}{x^2(1 + (e^{1/x-1})^2)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0^+$: perciò, assegnato il dato iniziale $y(0) = \pi$ si possono trovare sia la soluzione costante $y_1 \equiv \pi$ che la soluzione $y_2(x) = \begin{cases} \pi & (\text{per } x \leq 0) \\ 2(\pi - \mathrm{arctg}(e^{1/x-1})) & (\text{per } x > 0) \end{cases}$ (ottenuta saldando) dell' equazione originale $x^2y' + \sin y = 0$ che sono diverse anche soluzioni ... contraddizione? No, perché il T. Cauchy non funziona con i dati $y(0) = y_0$ (per $x=0$ non si può porre l'equazione in forma normale).

N.B. L'ultimo discorso ha rilevanza quando si ricercano delle soluzioni $y(x)$ col dominio il più largo possibile (ragionamento da Analisi I); invece per la o.d.t. associata il problema non si pone, perché col dato iniziale $(x_0, y_0) = (0, \pi)$ la soluzione è l'equilibrio $(0, \pi)$ stesso, e non c'è alcun bisogno di saldare alcunché perché le altre curve integrali del tipo $F(x,y) = k$ vanno considerate solo per $x>0$ o solo per $x<0$ (ragionamento da Analisi II).

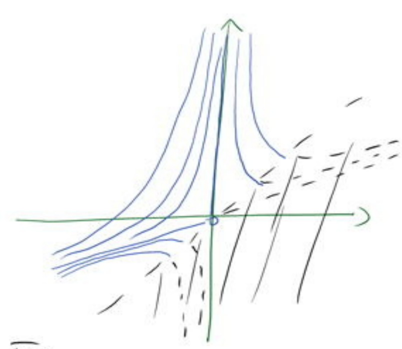
Quale dei due ragionamenti è quello da seguire?

Risposta: dipende da quello che uno vuole!

Per come è stato formulato il problema, in questo caso probabilmente siamo più interessati al ragionamento tipo Analisi I, ovvero a trovare soluzioni in forma grafico $y(x)$ col dominio più largo possibile.

Ex. 6

$$\sqrt{y-x}\; dx + \frac{x}{\sqrt{y-x}}\; dy = 0$$



Questa e.d.t. è definita per $y > x$ (si noti che $p(x,y) = \sqrt{y-x}$ e $q(x,y) = \frac{x}{\sqrt{y-x}}$ sono omogenee di grado $1/2$).
Essa è equivalente a $(y-x)\,dx + x\,dy = 0$ (moltiplicando per $g(x,y) = \sqrt{y-x}$).
Si può trattare direttamente come forma esatta

$\left(\begin{cases} \partial_x F = y - x \\ \partial_y F = x \end{cases} \Rightarrow F = xy - x^2/2 + \varphi(y) \Downarrow \partial_y F = x + \varphi' = x \Rightarrow \varphi' = 0 \leadsto F = xy - x^2/2 \right.$,

da cui $x(2y-x) = k$;

oppure come e.d.t. omogenea di grado 1 ponendo $y = xz$

$dy = z\,dx + x\,dz \Rightarrow (xz - x)\,dx + x\,(z\,dx + x\,dz) = 0$

$\rightarrow$ (notando che $x = 0$ è curva integrale, divido per x)

$(2z-1)\,dx + x\,dz = 0$ a variabili separabili :

considerando la curva integrale $z = 1/2$ (ovvero $y = x/2$)

una primitiva è $F(x,z) = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{2z-1}\,dz = \frac{1}{2}\log|x^2(2z-1)|$,

dunque $\frac{1}{2}\log|x^2(2z-1)| = k \rightarrow x^2(2z-1) = h \rightarrow$

$x^2\left(\frac{2y}{x} - 1\right) = h$ ovvero anche $x(2y - x) = k$.

E.D.O. LINEARI

Ci concentriamo d'ora in poi sul CASO LINEARE:

$$y' = f(t,y) \rightsquigarrow \boxed{y' = A(t)\,y + b(t)} \quad \text{ove}$$

$A : I \to M_n(\mathbb{C})$, $\quad b : I \to \mathbb{C}^n$ funzioni continue su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

ovvero:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}}_{b(t)}$$

ovvero:

$$\boxed{\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)\,y_1 + \cdots + a_{1n}(t)\,y_n + b_1(t) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(t)\,y_1 + \cdots + a_{nn}(t)\,y_n + b_n(t) \end{cases}}$$

Ex

$$\begin{cases} \dot{x} = x\log|t| - y\sqrt{t+3} \\ \dot{y} = t^2 x + 2y - \dfrac{\sin t}{t-1} \end{cases} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} \log|t| & -\sqrt{t+3} \\ t^2 & 2 \end{pmatrix} \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sin t}{t-1} \end{pmatrix}$$

È un sistema lineare con soluzioni definite sull'intervallo $]-3,0[$ oppure $]0,1[$ oppure $]1,+\infty[$ a seconda di dove si trova t_0 nel dato di Cauchy $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$

Quello che faremo oggi riguarda informazioni generali sulla struttura dello spazio delle soluzioni di un sistema di questo tipo.

Purtroppo NON esistono formule di risoluzione che valgono in generale: queste esistono praticamente solo nel caso dei COEFFICIENTI COSTANTI (ovvero $A(t)$ è una matrice costante $A \in M_n(\mathbb{C})$, mentre $b(t)$ può dipendere dal tempo). Ma per oggi stiamo ancora sul generale.

Per il Teor. di $\exists !$ di C.L., già sappiamo che tutte le soluzioni del sistema saranno funzioni $y(t)$ di classe $\mathcal{C}^1$ con dominio tutto $\underline{I}$:

dunque, detto $S = \{ y : I \to \mathbb{C}^n : \ y' = A(t)y + b(t) \}$ (SPAZIO DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA)

sarà $S \subseteq \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C}^n)$ $\leftarrow$ SPAZIO DELLE FUNZIONI $I \to \mathbb{C}^n$ DI CLASSE $\mathcal{C}^1$ È SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{C}$ DI DIM. INFINITA (CIRCA, CON QUALE BASE...)

Ma come è fatto il suo sottoinsieme S?

A tal fine consideriamo anche il sistema assoc. omogeneo $\boxed{y' = A(t)y}$,

e chiamo $S_0 \subseteq \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C}^n)$ il suo spazio di soluzioni.

S_0 è un $\mathbb{C}$-sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C}^n)$ di dimensione n, ovvero vi sono n soluzioni $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t) \in S_0$ definite su tutto I e linearmente indipendenti (ovvero $\lambda_1\varphi_1(t) + \dots + \lambda_n\varphi_n(t) = 0 \ \ \forall t \in I \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$)

tali che $S_0 = \{ \lambda_1\varphi_1(t) + \dots + \lambda_n\varphi_n(t) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \}$.

Un tale insieme $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ si dice SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI.

Una matrice $\Phi(t)$ le cui colonne costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni è detta (MATRICE) RISOLVENTE del sistema $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$

Che S_0 sia un $\mathbb{C}$-sottosp. vett. è facile: se $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in S_0$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, allora $(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)' = \lambda_1\varphi_1' + \lambda_2\varphi_2' = \lambda_1 A(t)\varphi_1 + \lambda_2 A(t)\varphi_2 = A(t)(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)$

Fissato un certo $t_0 \in I$, consideriamo la funzione $v : S_0 \to \mathbb{C}^n$, VALUTAZIONE IN t_0

$v(\varphi) = \varphi(t_0)$. La funzione v è chiaramente lineare ($v(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) =$

$= (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)(t_0) = \lambda_1\varphi_1(t_0) + \lambda_2\varphi_2(t_0) = \lambda_1 v(\varphi_1) + \lambda_2 v(\varphi_2)$)

ed è anche biiettiva perché $\begin{cases} y' = A(t)y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ ha una e una sola soluzione $\forall y_0 \in \mathbb{C}^n$.

Dunque v è isomorfismo di spazi vett. su $\mathbb{C}$, perciò anche S_0 ha dim. n (come $\mathbb{C}^n$).

$\boxed{\text{Ex.}}$ $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = -2x - 2y \end{cases}$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'}_{Y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}_{A(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{Y}$

Vedremo poi come risolvere questo sistema (a coeff. costanti, omogeneo):

limitiamoci per ora a prendere atto del fatto che

$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$ e $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 2e^{-3t} \end{pmatrix}$ sono due soluzioni lin. indipendenti

(che siano soluzioni si vede direttamente; che poi siano l. i. si vede dal fatto che $\varphi_1(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\varphi_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono vettori l. ind. di $\mathbb{C}^2$).

Per quanto detto, le soluzioni del sistema sono tutte e sole quelle del tipo

$\lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 e^{-3t} \\ -\lambda_1 e^{2t} + 2\lambda_2 e^{-3t} \end{pmatrix}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

Una risolvente del sistema è data da $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{-3t} \\ -e^{2t} & 2e^{-3t} \end{pmatrix}$.

Se $\Phi(t)$ è una matrice di funzioni le cui colonne $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ sono soluzioni in S'_0 (ovvero $\varphi_j'(t) = A(t)\varphi_j(t)$ $\forall j = 1, \dots, n$) allora $\boxed{\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)}$. Inoltre le sgg. affermazioni sono equivalenti:

(i) $\Phi(t)$ è una risolvente $\quad (\Phi(t))\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

(ii) Le soluzioni in S'_0 sono tutte e sole quelle del tipo $\Phi(t)c$, con $c \in \mathbb{C}^n$ costante.

(iii) $\exists\, \tilde{t} \in I$ t.c. $\Phi(\tilde{t})$ sia non singolare ($\det \Phi(\tilde{t}) \neq 0$)

(iv) $\forall t \in I$ vale $\Phi(t)$ non singolare ($\det \Phi(t) \neq 0$)

In particolare:

(a) se $\Phi(t)$ è risolvente allora $\boxed{A(t) = \Phi'(t)\,\Phi(t)^{-1}}$

e tutte le altre risolventi sono del tipo $\Phi(t) \cdot L$ con $L \in M_n(\mathbb{C})$ invertibile.

(b) La soluzione di $\begin{cases} y' = A(t)y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ è $\boxed{\varphi(t) = \Phi(t) \cdot \Phi(t_0)^{-1} y_0}$