UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di martedì 26/11/2024

Se $\Phi(t)$ è una matrice di funzioni le cui colonne $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ sono soluzioni in S_0 (ovvero $\varphi_j'(t) = A(t)\varphi_j(t)$ $\forall j = 1, \dots, n$) allora $\boxed{\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)}$. Inoltre le sgg. affermazioni sono equivalenti:

$\left(\Phi(t)\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

(i) $\Phi(t)$ è una risolvente

(ii) Le soluzioni in S_0' sono tutte e sole quelle del tipo $\Phi(t)c$, con $c \in \mathbb{C}^n$ costante.

(iii) $\exists \tilde{t} \in I$ t.c. $\Phi(\tilde{t})$ sia non singolare ($\det \Phi(\tilde{t}) \neq 0$)

(iv) $\forall t \in I$ vale $\Phi(t)$ non singolare ($\det \Phi(t) \neq 0$)

In particolare:

(a) se $\Phi(t)$ è risolvente allora $\boxed{A(t) = \Phi'(t)\,\Phi(t)^{-1}}$

e tutte le altre risolventi sono del tipo $\Phi(t) \cdot L$ con $L \in M_n(\mathbb{C})$ invertibile.

(b) La soluzione di $\begin{cases} y' = A(t)y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ è $\boxed{\varphi(t) = \Phi(t) \cdot \Phi(t_0)^{-1} y_0}$

Se le colonne di $\Phi(t)$ sono soluzioni di $y' = A(t)y$, allora $\varphi_j(t)' = A(t)\varphi_j(t)$ $\forall j$, ma questo è proprio come dire che $\Phi(t)' = A(t)\Phi(t)$.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) ovvio.

(iii) $\Rightarrow$ (i). La valutazione $v_{\tilde{t}} : S_0 \to \mathbb{C}^n$ è un isomorfismo! Se vale (iii), significa che $\{v_{\tilde{t}}(\varphi_1), \dots, v_{\tilde{t}}(\varphi_n)\}$ è base di $\mathbb{C}^n$, perciò anche $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ deve essere base di S_0'.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) ovvio

(i) $\Rightarrow$ (iv) $\forall t \in I$ la valutazione v_t è isomorfismo! Se vale (i) significa che $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ è base di S_0' $\Rightarrow$ $\{v_t(\varphi_1), \dots, v_t(\varphi_n)\}$ base di $\mathbb{C}^n$ ovvero $\Phi(t)$ è non singolare.

(a) Da $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$, se $\phi(t)$ è risolvente allora è invertibile (per (iv)) dopo moltiplicando ambo i membri a dx per $\phi(t)^{-1}$ ottengo $A(t) = \phi'(t)\phi(t)^{-1}$. Quanto alle altre risolventi, fare $\phi(t)L$ con L invertibile in $M_n(\mathbb{C})$ equivale a fare un cambio di base!

(b) Imponiamo che $\varphi(t) = \Phi(t)c$ (con $c \in \mathbb{C}^n$) risolva $\begin{cases} y' = A(t)y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

$\varphi(t) = \Phi(t)c \Rightarrow \varphi(t_0) = \Phi(t_0)c = y_0 \Rightarrow c = \Phi(t_0)^{-1}y_0$

e poi $\varphi(t) = \Phi(t) \cdot \phi(t_0)^{-1} y_0$.

Ex. Di un sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x' = a_{11}(t)\,x + a_{12}(t)\,y \\ y' = a_{21}(t)\,x + a_{22}(t)\,y \end{cases}$

si sa che $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$ e $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ sono soluzioni (lin. indip.)

Ricostruire il sistema, e trovare la soluzione $\varphi(t)$ t.c. $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

φ_1 e φ_2 sono l.i. : $\varphi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\varphi_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono l.i. in $\mathbb{C}^2$.

$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ -e^t & t \end{pmatrix}$ è risolvente (notare che $\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è invertibile)

Ricordiamo però che per (iv) bisogna che $\Phi(t)$ sia invertibile $\forall t$:

$\det \Phi(t) = (1+t)e^t \neq 0 \Rightarrow I =]-\infty, -1[$ oppure $I =]-1, +\infty[$

CONTIENE $t=0$ DUNQUE SARÀ IL DOMINIO DI $\varphi(t)$ RICHIESTA NEL TESTO

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} = \Phi'(t)\cdot\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ -e^t & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(1+t)e^t} \begin{pmatrix} t & -1 \\ e^t & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{1+t} & -\frac{1}{1+t} \\ \frac{1-t}{1+t} & \frac{2}{1+t} \end{pmatrix}$$

Infine troviamo $\varphi(t)$ con $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$:

$$\varphi(t) = \Phi(t)\cdot\Phi(0)^{-1}\cdot\varphi(0) = \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ -e^t & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-e^t \\ t & t+e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3e^t - 1 \\ -3e^t - t \end{pmatrix} = 3\,\varphi_1(t) - 1\cdot\varphi_2(t).$$

Oppure con calcolo diretto:

$\varphi(t) = \lambda_1 \varphi_1(t) + \lambda_2 \varphi_2(t) = \lambda_1 \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t + \lambda_2 \\ -\lambda_1 e^t + \lambda_2 t \end{pmatrix}$

Condizione $\varphi(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$ come già trovato prima.

Passiamo ora al caso del sistema completo $Y' = A(t)\,Y + b(t)$, di cui abbiamo denotato con S l'insieme delle soluzioni.

S è il sottospazio affine di $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C}^n)$ ottenuto traslando S_0 con una qualunque soluzione particolare $\tilde{\varphi}(t) \in S$ (ovvero t.c. $\tilde{\varphi}' = A(t)\tilde{\varphi} + b(t)$),

cioè $S = S_0 + \tilde{\varphi}(t) = \{\varphi(t) + \tilde{\varphi}(t) : \varphi(t) \in S_0\} =$

$= \{\lambda_1 \varphi_1(t) + \dots + \lambda_n \varphi_n(t) + \tilde{\varphi}(t) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}\}$

ove $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ è un sistema fond. di soluzioni (per l'omogeneo)

Infatti: se $\varphi \in S_0$ (ovvero $\varphi' = A(t)\varphi$) allora $(\varphi+\tilde{\varphi})' = \varphi' + \tilde{\varphi}' = A(t)\varphi + (A(t)\tilde{\varphi} + b(t))$
$= A(t)(\varphi+\tilde{\varphi}) + b(t)$, ovvero $\varphi + \tilde{\varphi} \in S \implies S_0 + \tilde{\varphi} \subseteq S$

Viceversa sia $\psi(t) \in S$ (ovvero $\psi' = A(t)\psi + b(t)$). Allora

$$(\psi - \tilde{\varphi})' = \psi' - \tilde{\varphi}' = (A(t)\psi + \cancel{b(t)}) - (A(t)\tilde{\varphi} + \cancel{b(t)}) = A(t)(\psi - \tilde{\varphi})$$

ovvero $\psi - \tilde{\varphi} \in S_0 \implies S - \tilde{\varphi} \subseteq S_0 \implies S \subseteq S_0 + \tilde{\varphi} \stackrel{\checkmark}{\implies} S = S_0 + \tilde{\varphi}$

E per trovare una soluz. particolare $\tilde{\varphi}(t)$ del sistema completo, come fare?
C'è un metodo che permette di costruirne una a partire da una risolvente $\Phi(t)$:

(METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE, LAGRANGE).
Nelle notazioni precedenti, $\boxed{\tilde{\varphi}(t) = \Phi(t)\cdot c(t) \quad \text{ove } c'(t) = \Phi(t)^{-1} b(t)}$

$\tilde{\varphi} = \Phi(t)c(t) \implies \tilde{\varphi}' = \Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t)$.

Imponendo ora che $\tilde{\varphi} \in S$, ovvero che $\tilde{\varphi}' = A(t)\tilde{\varphi} + b(t)$:

$$\cancel{\Phi'(t)c(t)} + \Phi(t)c'(t) = \cancel{A(t)\Phi(t)c(t)} + b(t) \stackrel{\Phi' = A\Phi}{\implies} b(t) = \Phi(t)c'(t)$$

$\implies c'(t) = \Phi(t)^{-1} b(t)$.

Di conseguenza, lo spazio S delle soluzioni del sist. completo $Y' = A(t)Y + b(t)$ si può scrivere così:

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \left\{ \varphi(t) = \Phi(t)\cdot K + \Phi(t)\int \Phi(t)^{-1} b(t)\,dt \;:\; K \in \mathbb{C}^n \right\} \\ &= \left\{ \Phi(t)\left(\int \Phi(t)^{-1} b(t)\,dt + K\right) \;:\; K \in \mathbb{C}^n \right\} \end{aligned}}$$

Inoltre, fissato $t_0 \in I$, la soluz. di $\begin{cases} Y' = A(t)Y + b(t) \\ Y(t_0) = y_0 \end{cases}$

è $\boxed{\varphi(t) = \Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1} y_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(\tau)^{-1} b(\tau)}$

Anche in I: E.D.O. LINEARE DEL I° ORD.
$y' = -p(x)y + q(x)$
$A(x) = -p(x)$, $b(x) = q(x)$
$\Phi(x) = e^{-P(x)}$ (con $P' = p$)
e ritrovo le formule note:
$y(x) = e^{-P(x)}\left(\int e^{P(x)} q(x)\,dx + K\right)$ e
$y(x) = e^{-P(x)}\left(e^{P(x_0)} y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{P(s)} q(s)\,ds\right)$

Ultima importantissima cosa (che vale nel caso lineare):

(PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE)
Se in $y' = A(t)y + b(t)$ si ha $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$,
e se $\tilde{\varphi}_j(t)$ è soluzione di $y' = A(t)y + b_j(t)$ per $j = 1,2$
allora una soluz. particolare per $y' = A(t)y + b(t)$ è $\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}_1(t) + \tilde{\varphi}_2(t)$

(vedremo per esercizio).

$\boxed{\text{Ex.}}$ Trovare tutte le soluzioni di $(*)\ \begin{cases} x' = a_{11}(t)\,x + a_{12}(t)\,y + 1 \\ y' = a_{21}(t)\,x + a_{22}(t)\,y - t \end{cases}$

ove $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$ sia quella dell'ex precedente.

Determinare in particolare la soluzione $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ di $(*)$ t.c. $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{t}{t+1} & -\frac{1}{t+1} \\ \frac{1-t}{t+1} & \frac{2}{t+1} \end{pmatrix}}^{A(t)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}}^{b(t)} . \qquad \text{Una risolvente: } \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ -e^t & t \end{pmatrix}$$

su $I =]-1, +\infty[$.

Una soluz. partic. di $(*)$ è $\tilde{\varphi}(t) = \Phi(t)\, c(t)$

ove $c'(t) = \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)^{-1} \cdot b(t) = \dfrac{1}{(1+t)e^t} \begin{pmatrix} t & -1 \\ e^t & e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2t}{t+1} e^{-t} \\ \frac{1-t}{t+1} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \frac{2t}{t+1} e^{-t}\, dt \\ \int \frac{1-t}{t+1}\, dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \frac{2t}{t+1} e^{-t}\, dt \\ 2\log(1+t) - t \end{pmatrix}$$

AD ESEMPIO, LA $c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$ CHE PER $t=0$ VALE $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ È $\begin{pmatrix} \int_0^t \frac{2\tau}{\tau+1} e^{-\tau}\, d\tau \\ 2\log(1+t) - t \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\varphi}(t) = \Phi(t)\, c(t) = \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ -e^t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

Dunque le soluzioni del sistema complet. $(*)$ sono tutte e sole:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ -e^t & t \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \right)$$

ovvero $\begin{cases} x(t) = \alpha e^t + \beta + c_1(t) e^t + c_2(t) \\ y(t) = -\alpha e^t + \beta t - c_1(t) e^t + t\, c_2(t) \end{cases}$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Per trovare le soluzioni del pb. di Cauchy dato abbiamo due vie.

1) Porre $t=0$ nella soluzione generale e ricavare α, β.

Sia $c_1(t)$ la primitiva di $\frac{2t}{t+1} e^{-t}$ con $c_1(0) = 0$ (ovvero $c_1(t) = \int_0^t \frac{2\tau}{\tau+1} e^{-\tau}\, d\tau$)

Sia $c_2(t)$ .. .. $\frac{1-t}{1+t}$ con $c_2(0) = 0$ (ovvero $c_2(t) = 2\log(1+t) - t$)

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta + 0 + 0 \\ -1 = -\alpha + 0 - 0 + 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (\alpha, \beta) = (1, -1), \text{ per cui}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1(t)+1)\, e^t + c_2(t) - 1 \\ -(c_1(t)+1)\, e^t + t\,(c_2(t) - 1) \end{pmatrix}$$

(2) Applichiamo la formula $\varphi(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + \Phi(t) \int_0^t \Phi(\tau)^{-1} b(\tau)\, d\tau$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ -e^t & t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \int_0^t \frac{1}{(1+\tau)e^\tau} \begin{pmatrix} \tau & -1 \\ e^\tau & e^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau \end{pmatrix} d\tau \right]$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ -e^t & t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{2\tau}{\tau+1} e^{-\tau} \\ \frac{1-\tau}{\tau+1} \end{pmatrix} d\tau \right]$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ -e^t & t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ -e^t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + c_1(t) \\ -1 + c_2(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1 + c_1(t))\, e^t - 1 + c_2(t) \\ -(1 + c_1(t))\, e^t + t\,(c_2(t) - 1) \end{pmatrix} \quad \text{come già trovato.}$$

Purtroppo, per i sistemi lineari $y' = A(t)y + b(t)$ <u>non esistono formule risolutive generali</u> per descrivere lo spazio delle soluzioni: oltre al caso a COEFFICIENTI COSTANTI ($A(t) \equiv A$ costante, non dip. da t) che tratteremo tra poco, vi sono solo pochi altri casi particolari, tipo questo.

- Un sistema lineare <u>reale</u> <u>nel piano</u> della forma $\boxed{\begin{cases} x' = u(t)x - v(t)y + r(t) \\ y' = v(t)x + u(t)y + s(t) \end{cases}}$ con $u, v, r, s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, può essere ricondotto a un'unica equazione scalare complessa del I° ordine $z' = a(t)z + b(t)$ con $z = x+iy$, $a = u+iv$ e $b = r+is$ funzioni complesse (infatti $z' = x' + iy' = (u+iv)(x+iy) + (r+is) = (ux - vy + r) + i(vx + uy + s)$, poi confrontare parti reale e immaginaria dei due membri).

$\boxed{\text{Ex.}}$ Risolvere il sistema reale $\begin{cases} x' = (1-y)\,t \\ y' = tx \end{cases}$.

$$\begin{cases} x' = 0x - ty + t \\ y' = tx + 0y + 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u(t) = 0,\ v(t) = t,\ r(t) = t,\ s(t) = 0 \\ \Rightarrow a(t) = it, \quad b(t) = t \end{array}$$

$$z' = itz + t \qquad z' + \underbrace{(-it)}_{p(t)} z = \underbrace{t}_{q(t)} \qquad P(t) = \int p(t)\,dt = -i\frac{t^2}{2}$$

$$z(t) = e^{-P(t)}\left(\int e^{P(t)} q(t)\,dt + \underset{\mathbb{C}}{k}\right) = e^{it^2/2}\left(k + \int t e^{-it^2/2}\,dt\right)$$

$$z(t) = e^{it^2/2}\left(k + ie^{-it^2/2}\right) = k\,e^{it^2/2} + i \qquad (k = \alpha + i\beta \in \mathbb{C})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \operatorname{Re} z(t) = \operatorname{Re}\left((\alpha+i\beta)\left(\cos\left(\tfrac{t^2}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{t^2}{2}\right)\right) + i\right) = \alpha\cos\left(\tfrac{t^2}{2}\right) - \beta\sin\left(\tfrac{t^2}{2}\right) \\ y(t) = \operatorname{Im} z(t) = \operatorname{Im}\left(\quad '' \quad '' \quad '' \quad \right) = \beta\cos\left(\tfrac{t^2}{2}\right) + \alpha\sin\left(\tfrac{t^2}{2}\right) + 1 \end{cases}$$

(con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

Come sappiamo, in questa teoria rientrano anche le E.D.O. LINEARI SCALARI DI ORDINE SUPERIORE:

$$\boxed{y^{(n)} + \alpha_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1(t)\,y' + \alpha_0(t)\,y = \beta(t)}$$

posto $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -\alpha_0(t) & -\alpha_1(t) & \cdots & & -\alpha_{n-1}(t) \end{pmatrix}$

e $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}$

equivale al sistema del I° ordine $z' = A(t)z + b(t)$.

Un dato iniziale è dunque $z(t_0) = (y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0))$.
Anche qui andrà considerata l'equazione omogenea associata

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0}$$

La matrice costruita con n soluzioni scalari $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ dell'equazione omogenea (si tratterà pertanto di funzioni in $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$, derivabili n volte) è la MATRICE WRONSKIANA

$$W_\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

(se $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sono lin. indip. questa è una risolvente!)

La rilettura dei risultati enunciati ieri è la seguente:

Siano S e S_0 gli spazi delle soluzioni dell'equazione completa e omogenea rispettivamente.

- S_0 è un $\mathbb{C}$-sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ di dimensione n, ovvero vi sono n soluzioni l. indip. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ dell'eq. omogenea (SISTEMA FONDAMENTALE) t.c. $S_0 = \{ \lambda_1 \varphi_1(t) + \dots + \lambda_n \varphi_n(t) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \}$.
- Date n soluzioni $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ dell'eq. omogenea, le sgg. affermazioni sono equivalenti:
  (i) $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sono lin. indipendenti
  (ii) $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sono un sistema fondamentale di soluzioni.
  (iii) $\exists\, \tilde{t} \in I$ t.c. $W_\varphi(\tilde{t})$ è nonsingolare ($\det W_\varphi(\tilde{t}) \neq 0$)
  (iv) $\forall t \in I$ vale $W_\varphi(t)$ nonsingolare ($\det W_\varphi(t) \neq 0$).
- S è sottospazio affine di $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ ottenuto traslando S_0 con una soluzione particolare $\tilde{\varphi}(t)$ del problema completo, cioè $S = \{ \lambda_1 \varphi_1(t) + \dots + \lambda_n \varphi_n(t) + \tilde{\varphi}(t) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \}$. ove $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ è sistema fond. di soluzioni (dell'omogenea).

• (METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE)

Nelle notazioni precedenti, una sol. particolare del pb. completo è

$$\boxed{\tilde{\varphi}(t) = c_1(t)\,\varphi_1(t) + \dots + c_n(t)\,\varphi_n(t) \quad \text{ove} \quad c_j'(t) = (-1)^{n+j}\,\frac{\det W_{\varphi,j}(t)}{\det W_{\varphi}(t)}\,\beta(t)}$$

(qui $W_{\varphi,j}(t)$ è il minore della matrice wronskiana $W_\varphi(t)$ ottenuto eliminando l'ultima riga e la j-esima colonna).

• (PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE)

Se $\beta(t) = \beta_1(t) + \beta_2(t)$ e $\tilde{\varphi}_j(t)$ è soluzione del pb. completo con $\beta_j(t)$ al posto di $\beta(t)$ (per $j = 1,2$), allora $\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}_1(t) + \tilde{\varphi}_2(t)$ è soluzione del pb. completo con $\beta(t)$.

L'unica cosa da controllare è la formula per il metodo della variazione delle costanti arbitrarie: facendo riferimento alle formule generali per i sistemi del I° ordine si ha

$$c_j'(t) = \begin{array}{c} \\ j \to \end{array}\!\!\left(\begin{array}{c} W_\varphi(t)^{-1} \\ \boxed{} \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \left(W_\varphi(t)^{-1}\right)_{jn} \beta(t) = (-1)^{n+j}\,\frac{\det W_{\varphi,j}(t)}{\det W_\varphi(t)}\,\beta(t).$$