UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 28/11/2024

• (METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE)

Nelle notazioni precedenti, una sol. particolare del pb. completo è

$$\boxed{\tilde{\varphi}(t) = c_1(t)\,\varphi_1(t) + \dots + c_n(t)\,\varphi_n(t) \quad \text{ove} \quad c_j'(t) = (-1)^{n+j}\,\frac{\det W_{\varphi,j}(t)}{\det W_{\varphi}(t)}\,\beta(t)}$$

(qui $W_{\varphi,j}(t)$ è il minore della matrice wronskiana $W_\varphi(t)$ ottenuto eliminando l'ultima riga e la j-esima colonna).

• (PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE)

Se $\beta(t) = \beta_1(t) + \beta_2(t)$ e $\tilde{\varphi}_j(t)$ è soluzione del pb. completo con $\beta_j(t)$ al posto di $\beta(t)$ (per $j = 1,2$), allora $\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}_1(t) + \tilde{\varphi}_2(t)$ è soluzione del pb. completo con $\beta(t)$.

L'unica cosa da controllare è la formula per il metodo della variazione delle costanti arbitrarie: facendo riferimento alle formule generali per i sistemi del I° ordine si ha

$$c_j'(t) = \begin{array}{c} \\ j \to \end{array}\begin{pmatrix} & W_\varphi(t)^{-1} & \\ & \boxed{} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \left(W_\varphi(t)^{-1}\right)_{jn}\beta(t) = (-1)^{n+j}\,\frac{\det W_{\varphi,j}(t)}{\det W_\varphi(t)}\,\beta(t).$$

$\boxed{\text{Ex.}}$ Trovare le soluzioni $y(t)$ dell'equazione $y'' + y' - 2y = 2t - 1$ con i metodi appresi in Analisi I, e ritrovarle con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie.

Eq. caratteristica $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ ha radici $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ $\to$ soluzioni dell'eq. omogenea sono generate da $\varphi_1(t) = e^t$, $\varphi_2(t) = e^{-2t}$.

Sol. particolare della completa è della forma $\tilde{\varphi}(t) = at + b$ (perché 0 non è radice caratteristica)

Imponendolo: $0 + a - 2(at+b) = 2t - 1 \iff \begin{cases} -2a = 2 \\ a - 2b = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$

Dunque soluzioni: $y(t) = Ae^t + Be^{-2t} - t$, $\forall A, B \in \mathbb{C}$.

Altrimenti: troviamo $\tilde{\varphi}(t)$ con il metodo v.c.a.

$$W = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \quad (\text{notare che } \det W = -3e^{-t} \neq 0 \ \forall t)$$

Sol. partic. $\tilde{\varphi}(t) = c_1(t)\,e^t + c_2(t)\,e^{-2t}$, ove

$$c_1'(t) = (-1)^{2+1}\cdot\frac{e^{-2t}}{-3e^{-t}}\cdot(2t-1) = \frac{1}{3}(2t-1)\,e^{-t} \to c_1(t) = -\frac{1}{3}(2t+1)\,e^{-t}$$

$$c_2'(t) = (-1)^{2+2}\cdot\frac{e^t}{-3e^{-t}}\cdot(2t-1) = -\frac{1}{3}(2t-1)\,e^{2t} \to c_2(t) = -\frac{1}{3}(t-1)\,e^{2t}$$

Dunque $\tilde{\varphi}(t) = -\frac{1}{3}(2t+1)\,\cancel{e^{-t}}\cdot\cancel{e^{t}} - \frac{1}{3}(t-1)\,\cancel{e^{2t}}\cdot\cancel{e^{-2t}} = -t$ come prima.

$\boxed{\text{Ex}}$ Di un'equazione $y''+a_1(t)\,y'+a_0(t)\,y=0$ si sa che $\varphi_1(t)=e^{-t}$ e $\varphi_2(t)=t+1$ sono soluzioni.
Ricostruire l'equazione, e determinare le soluzioni $\varphi(t)$ tali che $(\varphi(0),\varphi'(0))=(-1,3)$.
Trovare poi tutte le soluzioni del problema non omogeneo $y''+a_1(t)\,y'+a_0(t)\,y=2(t+2)\,e^{-t}$, e in particolare le soluzioni $\psi(t)$ tali che $(\psi(0),\psi'(0))=(-1,3)$.

$$W=\begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\ \varphi_1' & \varphi_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-t} & t+1\\ -e^{-t} & 1\end{pmatrix}\quad;\quad \det W=(1+t+1)e^{-t}=(t+2)e^{-t}\neq 0\ \ \forall t\in I$$

$\Rightarrow\ I=\,]-2,+\infty[$ oppure $\cancel{I=\,]-\infty,-2[}$ (applichiamo per $t=0$)

Per ricostruire l'equazione, due modi.

1. Ricordiamo che in generale $A=\Phi'\cdot\Phi^{-1}$: qui da noi
$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{pmatrix}=W'W^{-1}=\begin{pmatrix}-e^{-t} & 1\\ e^{-t} & 0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{(t+2)e^{-t}}\cdot\begin{pmatrix}1 & -(t+1)\\ e^{-t} & e^{-t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{t+2} & -\frac{t+1}{t+2}\end{pmatrix}$$
Quindi l'equazione di partenza era
$$y''+\frac{t+1}{t+2}\,y'-\frac{1}{t+2}\,y=0$$

2. Metodo pratico: imponiamo che $\varphi_1=e^{-t}$ e $\varphi_2=t+1$ siano soluzioni di $y''+a_1(t)\,y'+a_0(t)\,y=0$
$$\begin{cases}\cancel{e^{-t}}^{\,1}+a_1\cdot(-\cancel{e^{-t}}^{\,-1})+a_0\cdot\cancel{e^{-t}}=0\\ 0+a_1\cdot(1)+a_0(t+1)=0\end{cases}\quad \begin{cases}1-a_1+a_0=0\\ a_1+(t+1)a_0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=-\frac{1}{t+2}\\ a_1=\frac{t+1}{t+2}\end{cases}\ \text{come prima}$$

Per trovare le $\varphi(t)$ soluzioni del pb omogeneo con $\varphi(0)=-1$ e $\varphi'(0)=3$, due modi.

1. $$\begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \varphi'(t)\end{pmatrix}=W(t)\cdot W(0)^{-1}\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-t} & t+1\\ -e^{-t} & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2e^{-t}+t+1\\ 2e^{-t}+1\end{pmatrix}$$
ovvero $\varphi(t)=-2e^{-t}+t+1=-2\varphi_1+1\cdot\varphi_2$

2. Direttamente: $\varphi(t)=Ae^{-t}+B(t+1)\qquad \varphi'(t)=-Ae^{-t}+B$
$$\begin{cases}\varphi(0)=A+B=-1\\ \varphi'(0)=-A+B=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\ B=1\end{cases}\quad\text{come prima}$$

Per l'eq. completa $y''+\frac{t+1}{t+2}\,y'-\frac{1}{t+2}\,y=2(t+2)\,e^{-t}$

$W=\begin{pmatrix}e^{-t} & t+1\\ -e^{-t} & 1\end{pmatrix}$. Per il metodo v.c.a.: $\tilde\varphi(t)=c_1(t)\,e^{-t}+c_2(t)\,(t+1)$

$$c_1'(t)=(-1)^{2+1}\cdot\frac{t+1}{\cancel{(t+2)e^{-t}}}\cdot 2\cancel{(t+2)e^{-t}}=-2(t+1)\ \Rightarrow\ c_1(t)=-t^2-2t$$

$$c_2'(t)=(-1)^{2+2}\cdot\frac{e^{-t}}{\cancel{(t+2)e^{-t}}}\cdot 2\cancel{(t+2)e^{-t}}=2e^{-t}\ \Rightarrow\ c_2(t)=-2e^{-t}$$

Dunque $\quad \tilde{\varphi}(t) = -(t^2-2t)e^{-t} - 2e^{-t}\cdot(t+1) = -(t^2+4t+2)e^{-t}$

Tutte le soluzioni della completa:

$$y(t) = Ae^{-t} + B(t+1) - (t^2+4t+2)e^{-t}$$

$$y'(t) = -Ae^{-t} + B - e^{-t}(2t+4-t^2-4t-2)$$

$$\begin{cases} y(0) = A+B-2 = -1 \\ y'(0) = -A+B-2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 6 \end{cases}$$

SISTEMI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

$$\begin{cases} \dot{x} = ix - 2y + t \\ \dot{y} = 3x + (1-i)y - e^t \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 3 & 1-i \end{pmatrix} \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

Ci concentriamo ora sul caso

$$\boxed{y' = Ay + b(t)} \qquad \text{ove } A \in M_n(\mathbb{C})$$

In effetti, in questo caso sappiamo costruire una risolvente $\Phi(t)$ in carne e ossa.

Partiamo dunque dal sistema omogeneo $\boxed{y' = Ay}$.

Assegniamo anche un dato di Cauchy $y(0) = y_0$ (basta $t_0 = 0$ perché $y' = Ay$ è autonomo!)

Usiamo il metodo di Volterra per $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, ovvero l'operatore

$$(T\psi)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \overset{\text{qui } A\psi(t)}{f(\tau,\psi(\tau))}\, d\tau, \quad \text{partendo da } \psi_0(t) \equiv y_0 = \mathbb{1} y_0$$

$$\psi_0(t) \equiv y_0 = \mathbb{1} y_0$$

$$\psi_1(t) = (T\psi_0)(t) = y_0 + \int_0^t A y_0\, d\tau = y_0 + tAy_0 = (\mathbb{1} + tA)y_0$$

$$\psi_2(t) = (T\psi_1)(t) = y_0 + \int_0^t A(\mathbb{1} + \tau A)y_0\, d\tau = y_0 + tAy_0 + \frac{1}{2}t^2A^2y_0$$

$$= \left(\mathbb{1} + tA + \frac{1}{2}t^2A^2\right)y_0$$

$$\vdots$$

$$\psi_k(t) = (T\psi_{k-1})(t) = \left(\mathbb{1} + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \dots + \frac{1}{k!}t^kA^k\right) y_0$$

Come si vede, nella parentesi sta spuntando la familiare espressione della serie esponenziale: non è che tale serie (di matrici però!) converga a una certa "matrice esponenziale" di A? È proprio così. Facciamo dunque una parentesi algebrica sulle MATRICE ESPONENZIALE.

Prop. Data una matrice $X \in M_n(\mathbb{C})$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!} = \mathbb{1} + X + \frac{1}{2}X^2 + \dots$ converge in $M_n(\mathbb{C})$: la somma, detta MATRICE ESPONENZIALE di X, è denotata usualmente con $\exp X$ oppure e^X.

Consideriamo una qualsiasi norma p sullo spazio delle matrici $M_n(\mathbb{C})$ (che è di dim. finita n^2, dunque tutte le norme sono equivalenti!); in particolare scelgo una norma "sottomoltiplicativa", cioè tale che $p(XY) \le p(X)\,p(Y)$ (ad es. la norma operatoriale $\|X\|_\infty = \max_{\|v\|=1} \|Xv\|$).
Allora $p\left(\frac{X^n}{n!}\right) = \frac{1}{n!}p(X^n) \overset{\text{sottomolt.}}{\le} \frac{1}{n!}p(X)^n < e^{p(X)}$, dunque la serie $\sum X^n/n!$ converge assolutamente (maggiorata in norma dalla serie numerica esponenziale $\sum \frac{1}{n!}p(x)^n$ che converge a $e^{p(x)}$) dunque converge semplicemente.

Vediamo alcune proprietà della matrice esponenziale.

(i) se $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow e^X = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$ (in part. $e^{0_n} = \mathbb{1}_n$)

(ii) se $X = N$ è nilpotente (ovvero $N^n = 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$), detto r il suo indice di nilpotenza (ovvero il minimo n t.c. $X^n = 0$) vale
$$e^N = \mathbb{1} + N + \dots + \frac{1}{(r-1)!}N^{r-1}.$$

(iii) se $X = D$ è idempotente (ovvero $D^2 = D$, dunque $D^n = D$ $\forall n \in \mathbb{N}$) vale
$$e^D = \mathbb{1} + (e-1)D$$

(i) e (ii) sono ovvi; per (iii), $e^D = \mathbb{1} + D + \frac{1}{2}\overset{D}{D^2} + \frac{1}{3!}\overset{D}{D^3} + \dots = \mathbb{1} + \overset{e-1}{\overbrace{\left(1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots\right)}} D$

(iv) se X e Y commutano tra loro ($XY = YX$) allora $e^X e^Y = e^Y e^X = e^{X+Y}$
(in part. $e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A}$ $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ $\forall s,t \in \mathbb{C}$)

(in part. $e^A e^{-A} = \mathbb{1}$, dunque e^A è invertibile con inversa e^{-A})

La dim. è la stessa di quella usata per provare le proprietà analoghe dell'exp numerico, in cui però a un certo punto va supposto che $XY = YX$. D'altra parte è facile trovare un esempio in cui la formula non vale se X e Y non commutano.

$\boxed{\text{Ex}}$ $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

N è nilpotente $(N^2 = \mathbb{0}) \Rightarrow e^N = \mathbb{1} + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D è idempotente $(D^2 = D) \Rightarrow e^D = \mathbb{1} + (e-1)D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$N+D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ idempotente $\Rightarrow e^{N+D} = \mathbb{1} + (e-1)(N+D) = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$e^N e^D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq e^{N+D}$; $e^D \cdot e^N = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq e^{N+D}$

(in effetti N e D non commutano: $ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $DN = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow ND \neq DN$)

(v) | Se $P \in M_n(\mathbb{C})$ è matrice invertibile, allora $e^{PXP^{-1}} = P e^X P^{-1}$

Infatti $(PXP^{-1})^n = (PX\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}X\cancel{P^{-1}}) \cdots (\cancel{P}XP^{-1}) = PX^nP^{-1}$.

(vi) $e^{(X^t)} = (e^X)^t$, $e^{\overline{X}} = \overline{e^X}$, $\det e^X = e^{\operatorname{tr} X}$

(ove $\operatorname{tr} X = x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{nn}$, somma dei termini diagonali)

Queste relazioni sono ovvie tranne l'ultima, per cui rimando alle note.

$\boxed{\text{Ex.}}$ Calcolare $\exp\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \mathbb{1}_2$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ +\beta & 0 \end{pmatrix} = \beta J$ con $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Notiamo che A e B commutano $\Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B = e^\alpha \cdot \mathbb{1} \cdot e^B = e^\alpha e^B$ da calcolare

Devo calcolare $e^B = \mathbb{1} + B + \frac{1}{2} B^2 + \cdots + \frac{1}{k!} B^k + \cdots$

Notiamo che $B^n = \begin{cases} \beta^n \cdot J & \text{se } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -\beta^n \cdot \mathbb{1} & \text{se } n \equiv 2 \pmod 4 \\ -\beta^n \cdot J & \text{se } n \equiv 3 \pmod 4 \\ \beta^n \cdot \mathbb{1} & \text{se } n \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$

Dunque $e^B = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \beta^{2m}}{(2m)!} \right) \mathbb{1} + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) J = (\cos\beta)\mathbb{1} + (\sin\beta) J = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$

Pertanto $e^{\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{\alpha}\cos\beta & -e^{\alpha}\sin\beta \\ e^{\alpha}\sin\beta & e^{\alpha}\cos\beta\end{pmatrix}$ (omotetia di rapporto e^{α} su rotazione di angolo β)

Motivazione: $w = \alpha + i\beta$, $z = x+iy$

$$e^{w}\cdot z = (e^{\alpha}\cos\beta + i e^{\alpha}\sin\beta)(x+iy) = e^{\alpha}(x\cos\beta - y\sin\beta) + i e^{\alpha}(x\sin\beta + y\cos\beta)$$

ovvero nel piano di Gauss $e^{\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Pertanto, tornando al nostro problema $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0,\end{cases}$ si può affermare che:

Prop. Le soluzioni di $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0\end{cases}$ è $\varphi(t) = e^{tA}y_0$.

In particolare e^{tA} è una risolvente (quella che per $t=0$ è l'identità $\mathbb{1}$)

(dunque, se $\Phi(t)$ è un'altra risolvente, allora $e^{tA} = \Phi(t)\cdot\Phi(0)^{-1}$)

Ex. Trovare le soluzioni di $\begin{cases} x' = y \\ y' = x\end{cases}$ t.c. $(x(0), y(0)) = (-1, 1)$

- come sistema autonomo. E.d.f. associata: $x\,dx - y\,dy = 0$ esatta.

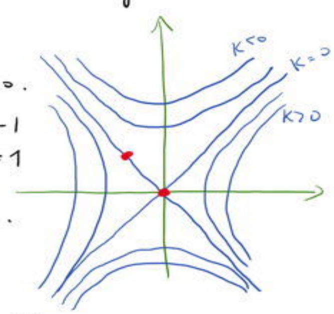
Int. primo $F(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$ dunque le curve integrali sono $x^2 - y^2 = K$ (unico equilibrio $(0,0)$)

Curva integrale relativa a $(-1,1)$: $y = -x$ con $x<0$.

$\begin{cases} y = -x \\ x<0\end{cases} \Rightarrow$ $x' = y = -x \Rightarrow x(t) = ke^{-t}$ con $k=-1$

$\Rightarrow y' = -y \Rightarrow y(t) = he^{-t}$ con $h = 1$

Soluzione $(x(t), y(t)) = (-e^{-t}, e^{-t})$, $t\in\mathbb{R}$.



- come sist. lineare a coeff. costanti

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Devo calcolare e^{tA}.

Notiamo che $(tA)^n = \begin{cases} t^n\mathbb{1} & (n \text{ pari}) \\ t^n A & (n \text{ dispari})\end{cases}$

$$\Rightarrow e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{\text{pari}} + \sum_{\text{disp.}} = \Big(\underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{t^{2m}}{(2m)!}}_{\cosh(t)}\Big)\mathbb{1} + \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sinh(t)}\Big)A$$

$$= \begin{pmatrix}\cosh t & 0\\ 0 & \cosh t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & \sinh t\\ \sinh t & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh t & \sinh t\\ \sinh t & \cosh t\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = e^{tA}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh t & \sinh t\\ \sinh t & \cosh t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-e^{-t}\\ e^{-t}\end{pmatrix}$$ come prima.

Ci si è occupati di risolvere un sistema lineare omogeneo a coeff. costanti $y' = Ay$ con dato iniziale $y(0) = y_0$, e si era scritta per bene la soluzione...

La formula $\boxed{\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \rightsquigarrow y(t) = e^{tA} y_0}$ è piuttosto semplice,

ma il calcolo di e^{tA} può risultare macchinoso: già l'esempio dell'esercizio, in cui $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ era anche facile ma $e^A = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}$ non altrettanto, mostra che il conto non è così diretto...

Può allora risultare conveniente trovare UN'ALTRA risolvente $\Phi(t)$ del sistema dato (dalla quale si risale poi eventualmente a $e^{tA} = \Phi(t)\,\Phi(0)^{-1}$). La prima osservazione è la seguente:

$e^{tA} = \Phi(t) \cdot L$
$t = 0 \Rightarrow \mathbb{1} = \Phi(0) \cdot L$
$\Rightarrow L = \Phi^{-1}(0)$

Prop. Dati $\lambda \in \mathbb{C}$ e un vettore $v \in \mathbb{C}^n$, la funzione $\varphi(t) = v\, e^{\lambda t}$ è soluzione di $y' = Ay \iff \begin{cases} \lambda \text{ è autovalore di } A \\ v \text{ è autovettore di } A \text{ riferito a } \lambda. \end{cases}$
Inoltre, se $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono r diversi autovalori di A con rispettivi autovettori $v_1, \dots, v_r$, allora le soluzioni $\varphi_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \varphi_r(t) = v_r e^{\lambda_r t}$ sono linearmente indipendenti.

Dim. $\varphi(t) = v\, e^{\lambda t}$ è soluzione di $y' = Ay \iff \varphi' = A\varphi \iff$
$\lambda v \cancel{e^{\lambda t}} = A v \cancel{e^{\lambda t}} \iff Av = \lambda v$.
Inoltre, $\varphi_1(0) = v_1, \dots, \varphi_r(0) = v_r$ che sono vettori l.i. di $\mathbb{C}^n$ (perché autovettori di diversi autovalori) $\Rightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_r$ sono l.i. //

Ricordiamo che gli autovalori di A si trovano risolvendo l'equazione in τ

$$\det(\tau \mathbb{1} - A) = 0$$

e che, trovato un autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ (cioè $\det(\lambda \mathbb{1} - A) = 0$), gli autovettori di λ sono $\mathrm{Ker}(\lambda \mathbb{1} - A) = \{ v \in \mathbb{C}^n : \underbrace{(\lambda \mathbb{1} - A) v = 0}_{\lambda v = Av} \}$

Ora, sappiamo bene che IN GENERALE NON si POSSONO TROVARE n AUTOVETTORI LIN. INDIP. DI A (un autovalore potrebbe avere molteplicità $m > 1$ ma autospazio di dimensione $\lneqq m$), ma almeno questo risolve il caso in cui

A HA n AUTOVALORI DISTINTI (diagonalizzabile): in questo caso la risolvente $\Phi(t)$ si ottiene mettendo in colonne le n soluzioni lin. indipendenti

$\varphi_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \dots \quad , \quad \varphi_n(t) = v_n e^{\lambda_n t}$.

Ex.
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(\lambda \mathbb{1} - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

Autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Per $\lambda_1 = 1$: $\quad 1 \cdot \mathbb{1} - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\quad$ Ker: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = b$

$\operatorname{Ker}(\lambda_1 \mathbb{1} - A) = \langle \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \rangle$

Per $\lambda_2 = -1$: $\quad (-1)\mathbb{1} - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \operatorname{Ker}(\lambda_2 \mathbb{1} - A) = \langle \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \rangle$

$\rightsquigarrow$ soluzioni $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$, $\quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$

Risolvente: $\quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \varphi_1 \quad \varphi_2$

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Phi(0)^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \Phi(t)\,\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

<u>Alternativamente</u> se mi interessa veramente calcolare e^{tA}:
matrice del cambio di base che porta la base canonica in $\{v_1, v_2\}$ è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Dunque $A = PJP^{-1}$ ove $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

J è la matrice dell'operatore riferita alla base $\{v_1, v_2\}$ anziché la canonica.

$\rightsquigarrow tA = P(tJ)P^{-1} \xrightarrow{e^{PXP^{-1}} = Pe^X P^{-1}}$

$$e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$ come prima.