UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 29/11/2024

$\boxed{\text{Ex.}}$ Risolvere $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 4y + 4z \\ \dot{y} = -2x + y - z \\ \dot{z} = -6x - 6y - 4z \end{cases}$ con dato di Cauchy $(x(0), y(0), z(0)) = (2, -5, 7)$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ -6 & -6 & -4 \end{pmatrix} \qquad \dot{X} = AX$$

$$\det(\tau \mathbb{1} - A) = \begin{vmatrix} \tau-7 & -4 & -4 \\ 2 & \tau-1 & 1 \\ 6 & 6 & \tau+4 \end{vmatrix} = \tau^3 - 4\tau^2 + \tau + 6 = (\tau+1)(\tau-2)(\tau-3)$$

Autovalori: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ (semplici)

Autospazio relativo a $\lambda_1 = -1$: $\operatorname{Ker}((-1)\mathbb{1} - A)$

$$\begin{pmatrix} -8 & -4 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ 2a - 2b + c = 0 \\ \cancel{2a + 2b + c = 0} \end{cases} \qquad \begin{aligned} b = -2b &\Rightarrow b = 0 \\ a = 1 &\Rightarrow c = -2 \end{aligned}$$

Dunque è generato da $v_1 = (1, 0, -2)$ $\rightsquigarrow$ $\varphi_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$

Idem per λ_2 e λ_3, otteniamo $v_2 = (0, -1, 1)$ e $v_3 = (1, -1, 0)$

$$\rightsquigarrow \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & e^{3t} \\ 0 & -e^{2t} & -e^{3t} \\ -2e^{-t} & e^{2t} & 0 \end{pmatrix} \qquad \phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P \qquad \det P = -1$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} \rightsquigarrow tA = P \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 3t \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\rightsquigarrow e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ 2(e^{2t} - e^{3t}) & 2e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} - e^{3t} \\ 2(e^{-t} - e^{2t}) & 2(e^{-t} - e^{2t}) & 2e^{-t} - e^{2t} \end{pmatrix}$$

(osserviamo che per $t = 0$ otteniamo l'identità).

La soluzione che per $t = 0$ vale $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ è data da

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \phi(t)\,\phi(0)^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{3t} - 4e^{-t} \\ e^{2t} - 6e^{3t} \\ 8e^{-t} - e^{2t} \end{pmatrix}$$

Vediamo anche subito come trattare il caso in cui

A sia matrice REALE con dato di Cauchy REALE $y_0 \in \mathbb{R}$

In tal caso anche e^{tA} è reale, e anche la soluzione $y(t) = e^{tA} y_0$ è reale.
Ma gli autovalori potrebbero essere complessi ...
come rientrare nel caso reale?

Prop. Sia A matrice reale, $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di molt. m con autovettore $v \in \mathbb{C}^n$ (cioè $Av = \lambda v$).
Allora anche $\bar{\lambda}$ è autovalore di molteplicità m, con autovettore $\bar{v} \in \mathbb{C}^n$ (cioè $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$).

Dim.: λ autoval. di molt. m $\Rightarrow$ polin. caratteristico $p(\tau) = \det(\tau \mathbb{1} - A)$ è divisibile per $(z-\lambda)^m$, ed è reale $\Rightarrow$ è divisibile anche per $(z-\bar{\lambda})^m$.
Inoltre $Av = \lambda v \Rightarrow \overline{Av} = \overline{\lambda v} \Rightarrow \bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$ ma $\bar{A} = A$. //

Dunque se A è reale e λ è autovalore NON reale di A allora $\bar{\lambda} \neq \lambda \Rightarrow \varphi(t) = v e^{\lambda t}$ e $\bar{\varphi}(t) = \bar{v} e^{\bar{\lambda} t}$ sono l.i.
POI AL POSTO DI $\{\varphi, \bar{\varphi}\}$ CONSIDERO $\{\underbrace{\mathrm{Re}\,\varphi}_{=\frac{\varphi+\bar{\varphi}}{2}}, \underbrace{\mathrm{Im}\,\varphi}_{=\frac{\varphi-\bar{\varphi}}{2i}}\}$

$\boxed{\text{Ex.}}$ Risolvere $\begin{cases} x' = -5y \\ y' = x + 4y \end{cases}$ con $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\dot{X} = AX$. $\det(\tau\mathbb{1} - A) = \begin{vmatrix} \tau & 5 \\ -1 & \tau-4 \end{vmatrix} = \tau^2 - 4\tau + 5$

Autovalori: $\tau^2 - 4\tau + 5 = 0$ $\tau = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$ $\lambda = 2+i$, $\bar{\lambda} = 2-i$.

Autovettore v relativo a λ: $\begin{pmatrix} 2+i & 5 \\ - & -2+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad -a + (-2+i)b = 0$, $b = 1 \Rightarrow a = -2+i$

$v = \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \varphi(t) = v e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(2+i)t} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) e^{2t}(\cos t + i \sin t)$

$= e^{2t}\left(\begin{pmatrix} -2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos t - 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}\right)$

$\rightsquigarrow \mathrm{Re}\,\varphi = \begin{pmatrix} -2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{2t}$, $\mathrm{Im}\,\varphi = \begin{pmatrix} \cos t - 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{2t}$

Risolvente reale: $\Phi(t) = \left(\mathrm{Re}\,\varphi \,\middle|\, \mathrm{Im}\,\varphi\right) = \begin{pmatrix} (-2\cos t - \sin t)e^{2t} & (\cos t - 2\sin t)e^{2t} \\ \cos t\, e^{2t} & \sin t\, e^{2t} \end{pmatrix}$

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \phi(0)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \phi(t)\,\phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} (\cos t - 2\sin t)e^{2t} & -5\sin t\, e^{2t} \\ \sin t\, e^{2t} & (\cos t + 2\sin t)\, e^{2t} \end{pmatrix} \qquad \left(\text{In } t=0 \text{ è } = \mathbb{1}\right)$$

Pb. di Cauchy:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \phi(t)\,\phi(0)^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Dopo quello degli operatori con n autovalori distinti, un altro caso abbordabile è quello in cui

A HA UN UNICO AUTOVALORE λ DI MOLTEPLICITÀ n.

Iniziamo con un piccolo Lemma di Algebra Lineare:

Lemma | Un operatore è nilpotente se e solo se ha il solo autovalore 0 (di molteplicità n)

Dim. $\Rightarrow$) Sia N un operatore nilpotente (ovvero $N^r = 0$ per un certo $r \in \mathbb{N}$) e sia per assurdo $\mu \neq 0$ un autovalore non nullo, con autovettore v: allora $Nv = \mu v$, $N^2 v = N(Nv) = N(\mu v) = \mu N v = \mu^2 v$, ..., $N^r v = \mu^r v \neq 0$, assurdo!

$\Leftarrow$ Se N ha il solo autovalore 0 allora per la teoria di Jordan N è simile a una matrice strettamente triangolare superiore $T = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$, ovvero $\exists\, P$ matrice invertibile t.c. $N = PTP^{-1}$: allora

$$N^n = (PT\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}T\cancel{P^{-1}})\cdots(\cancel{P}TP^{-1}) = P\overset{\mathbb{O}}{T^n}P^{-1} = \mathbb{O}$$

dunque N è nilpotente. //

Troviamo dunque al nostro sistema $y' = Ay$

con A avente un unico autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ di molt. n:

allora $N = A - \lambda \mathbb{1}$ ha 0 come unico autovalore

(infatti $\det(\tau \mathbb{1} - N) = \det(\tau \mathbb{1} - A + \lambda \mathbb{1}) =$

$= \det((\tau + \lambda)\mathbb{1} - A) = 0 \iff \tau + \lambda = \lambda \iff \tau = 0$)

e dunque, per il Lemma, $N = A - \lambda \mathbb{1}$ è nilpotente

(idem ovviamente per $tN = t(A - \lambda \mathbb{1})$: perciò

$$e^{tA} = e^{\lambda t \mathbb{1} + tN} \overset{\text{LE 2 MATRICI COMMUTANO}}{=} e^{t\lambda \mathbb{1}} e^{tN}$$

$$= e^{t\lambda}\left(\mathbb{1} + tN + \frac{1}{2}t^2N^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}N^{n-1}\right).$$

$\boxed{\text{Ex}}$ Risolvere $\begin{cases} x' = 2y \\ y' = -2x - 4y \end{cases}$

$\dot{X} = AX$ con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

$\det(\tau \mathbb{1} - A) = \begin{vmatrix} \tau & -2 \\ 2 & \tau+4 \end{vmatrix} = \tau^2 + 4\tau + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$ Doppio! (unico)

$N = A - (-2)\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & +2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ nilpotente! $N^2 = \mathbb{O}$

Dunque $e^{tA} = e^{-2t}(\mathbb{1} + tN) = e^{-2t}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & 2t \\ - & -2t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (1+2t)e^{-2t} & 2t\,e^{-2t} \\ -2te^{-2t} & (1-2t)e^{-2t} \end{pmatrix}$

Una risolvente "purificata":

$\Phi(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2te^{-2t} \\ -e^{-2t} & (1-2t)e^{-2t} \end{pmatrix}$

Dunque le soluzioni del sistema sono $\Phi(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 + 2tc_2)e^{-2t} \\ (-c_1 + (1-2t)c_2)e^{-2t} \end{pmatrix}$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Nel CASO GENERALE, nel problema $y' = Ay$ la matrice A ha degli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ di varie molteplicità $a_1, \dots, a_r$, con $a_1 + \dots + a_r = n$.

Un principio da tener presente per calcolare e^{tA} è il seguente:

- se un certo sottospazio $V \subseteq \mathbb{C}^n$ è <u>invariante</u> per A (ovvero $AV \subseteq V$) allora lo è anche per $e^{tA} = I + tA + \cdots$
- dunque, se si riuscisse a decomporre $\mathbb{C}^n$ nella somma diretta di sottospazi $V_1, \dots, V_k$ tutti invarianti per A (cioè $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$) allora, mettendo in fila delle basi di $V_1, \dots, V_k$ troverei un cambio di base P tale che $A = PBP^{-1}$ con B MATRICE A BLOCCHI

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & 0 \\ & \boxed{B_2} & \\ 0 & & \ddots \; \boxed{B_k} \end{pmatrix}$$

ciascun blocco B_j è riferito al sottospazio V_j ($\forall j = 1, \dots, k$)

$\rightsquigarrow$

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} \boxed{e^{tB_1}} & & \\ & \boxed{e^{tB_2}} & \\ & & \ddots \; \boxed{e^{tB_k}} \end{pmatrix} \rightsquigarrow e^{tA} = Pe^{tB}P^{-1}$$

Dunque <u>il problema di calcolare e^{tA} verrebbe decomposto in quello di calcolare ciascun e^{tB_j}</u>.

La domanda è dunque:

1. Come si fa a decomporre $\mathbb{C}^n$ in somma diretta di sottospazi invarianti per $\left(\begin{smallmatrix}\text{l'operatore}\\ \text{associato a}\end{smallmatrix}\right)$ A ?

2. Fatto ciò, il calcolo dei e^{tB_j} è abbordabile ?

Ecco le risposte.

1. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono gli autovalori di A con molteplicità $a_1, \dots, a_r$ (con $a_1 + \dots + a_r = n$) definiamo per ogni $j = 1, \dots, r$:

NON È NILPOTENTE, PERCHÉ A HA ANCHE ALTRI AUTOVALORI OLTRE λ_j

$$V_j = \ker\left((A - \lambda_j \mathbb{1})^{a_j}\right) = \{ v \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda_j \mathbb{1})^{a_j} v = 0 \}$$

V_j è l'AUTOSPAZIO GENERALIZZATO di λ_j : ci stanno gli autovettori di λ_j, e altri vettori.

Si ha che:

- $\dim V_j = a_j$
- ciascun V_j è invariante per A
- $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$

2. Su V_j l'operatore A agisce tramite il blocco $B_j = \lambda_j \mathbb{1}_{a_j} + N_j$ con N_j nilpotente (c'è il solo autovalore λ_j), dunque e^{tB_j} si calcola facilmente (vedi il caso di un solo autovalore)

Ricapitoliamo dunque il procedimento:

(a) Calcolare gli autospazi generalizzati V_j ;

(b) Scegliere una base di ciascun V_j e, unendole, costruire la matrice invertibile P.

(c) Rispetto a tale base l'operatore ha una matrice a blocchi $B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{B_k} \end{pmatrix}$

e vale $A = PBP^{-1}$ da cui $B = P^{-1}AP$

N.B. Scegliendo le basi dei V_j in modo opportuno, B potrebbe essere addirittura in <u>forma canonica di Jordan</u> in cui ciascun blocco B_j ha l'autovalore λ_j sulla diagonale, degli 1 sopra e degli 0 altrove (ma per noi non è così importante).

(d) Calcolare $e^{tB} = \begin{pmatrix} \boxed{e^{tB_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{e^{tB_r}} \end{pmatrix}$ (compito facile per ciascun blocco)

(e) Infine, avrò $e^{tA} = P e^{tB} P^{-1}$.

$\boxed{\text{Ex}}$ Risolvere $\begin{cases} x' = 2x - 6y - 6z \\ y' = -3x + 6y + 7z \\ z' = 3x - 7y - 8z \end{cases}$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -6 \\ -3 & 6 & 7 \\ 3 & -7 & -8 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \lambda-2 & 6 & 6 \\ 3 & \lambda-6 & -7 \\ -3 & 7 & \lambda+8 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

Autovalori: $\lambda_1 = -1$ (doppio: $a_1 = 2$), $\lambda_2 = 2$ (semplice: $a_2 = 1$).

Devo trovare gli autospazi generalizzati V_1 e V_2.

<u>Per V_1</u>. $N_1 : A - \lambda_1 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -3 & 7 & 7 \\ 3 & -7 & -7 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rk} N_1 = 2 \Rightarrow$ autovettori di λ_1 ce n'è uno (a meno di multipli)
N_1 non è nilpotente (perché A non ha solo λ_1 come autovalore)

Autovettori: $\ker N_1 : \{(\alpha,\beta,\gamma) : \alpha - 2\beta - 2\gamma = 0,\ 3\alpha - 7\beta - 7\gamma = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$N_1^2 = \begin{pmatrix} 9 & -18 & -18 \\ -9 & 18 & 18 \\ 9 & -18 & -18 \end{pmatrix}$ $\operatorname{rk} N_1^2 = 1$

$V_1 : \ker(N_1^2) = \{(\alpha,\beta,\gamma) : \alpha - 2\beta - 2\gamma = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

<u>Per V_2</u> $N_2 : A - \lambda_2 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 \\ -3 & 4 & 7 \\ 3 & -7 & -10 \end{pmatrix}$ $\operatorname{rk} N_2 = 2$

$V_2 : \ker N_2 = \{(\alpha,\beta,\gamma) : \beta + \gamma = 0,\ 3\alpha - 4\beta - 7\gamma = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

a scelta!

$$P = \begin{array}{c} \overbrace{}^{V_1}\ \overbrace{}^{V_2} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad A = PBP^{-1}$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

B_1 B_2

Sappiamo già che
- B_1 avrà autovalore doppio -1
- B_2 ha autovalore 2 (si vede già!)

$$N = \begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} - (-1)\mathbb{1} = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{nilpotente } (N^2 = 0)$$

$$\Rightarrow \quad e^{tB_1} = e^{-t}(\mathbb{1} + tN) = e^{-t}\begin{pmatrix}1-t & -t\\ t & 1+t\end{pmatrix}$$

Calcolo $e^{tB_2} = (e^{2t})$

Dunque
$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{tB_1} & \\ & e^{tB_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1-t)e^{-t} & -te^{-t} & 0\\ te^{-t} & (1+t)e^{-t} & 0\\ 0 & 0 & e^{2t}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad e^{tA} = P e^{tB} P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 2(e^{-t}-e^{2t}) & 2(e^{-t}-e^{2t})\\ e^{-t}-e^{2t} & (t-1)e^{-t}+2e^{2t} & (t-2)e^{-t}+2e^{2t}\\ e^{-t}-e^{2t} & (2-t)e^{-t}-2e^{2t} & (3-t)e^{-t}-2e^{2t}\end{pmatrix}$$

In realtà potevo scegliere "meglio" la base di V_1 affinché B_1 venisse in forma di Jordan $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ← AUTOVALORE −1 IN DIAG. UN 1 SOPRA LA DIAGONALE

Come primo vettore per V_1 scelgo sempre l'autovettore $(0,1,-1) = v'$

e come secondo un vettore $v'' \in V_1$ t.c. $Av'' = 1\cdot v' + (-1)v''$

ovvero t.c. $(A - (-1)\mathbb{1})v'' = v'$ ovvero $N_1 v'' = v'$

$$\begin{pmatrix}3 & -6 & -6\\ -3 & 7 & 7\\ 3 & -7 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}\alpha - 2\beta - 2\gamma = 0\\ -3\alpha + 7\beta + 7\gamma = 1\\ \text{appartenenza a } V_1\end{cases} \rightsquigarrow \text{ ad es. } v'' = (2,0,1)$$

$$\tilde{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \multicolumn{2}{c}{V_1} & V_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\end{array} \qquad \tilde{P}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix} \qquad A = \tilde{P}\,\overset{\text{Jordan}}{\tilde{B}}\,\tilde{P}^{-1} \Rightarrow$$

$$\tilde{B} = \tilde{P}^{-1} A \tilde{P} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad \text{in forma di Jordan!}$$

$$e^{t\tilde{B}} = \begin{pmatrix}e^{-t} & te^{-t} & 0\\ 0 & e^{-t} & 0\\ 0 & 0 & e^{2t}\end{pmatrix} \rightsquigarrow e^{tA} = \tilde{P} e^{t\tilde{B}} \tilde{P}^{-1} \quad \text{risulta come prima (esercizio)}$$

Ex. Risolvere il sistema

$$\begin{cases}\dot{x} = 4x - (4+i)y - 2iz\\ \dot{y} = -ix - z\\ \dot{z} = (2-4i)x - (2-4i)y - 2(1+i)z\end{cases}$$

determinando la soluzione che per $t=0$ vale $(i, 1, 0)$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -(4+i) & -2i \\ -i & 0 & -1 \\ 2-4i & -2+4i & -2(1+i) \end{pmatrix}$$

$\det(\lambda \mathbb{1} - A) = \lambda^3 - 2(1-i)\lambda^2 - (1+4i)\lambda + 2$

si nota soluzione $\lambda = 2$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2+2i & -1-4i & 2 \\ 2 & & 2 & 4i & -2 \\ \hline & 1 & 2i & -1 & // \end{array}$$

$(\lambda-2)(\lambda^2+2i\lambda-1) = (\lambda-2)(\lambda+i)^2$

Autovalori $\lambda_1 = 2$ (semplice), $\lambda_2 = -i$ (doppio).

$\underline{\lambda_1 = 2}$. Autovettore: $(A - 2\mathbb{1})v = 0 \leadsto \begin{pmatrix} 2 & -4-i & -2i \\ -i & -2 & -1 \\ 2-4i & -2+4i & -4-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} c = -ia - 2b \\ \cancel{2a} - (4+i)b - 2i(\cancel{-ia} - 2b) = 0 \Rightarrow b = 0 \\ (2-4i)a - (2-4i)b - 2(2+i)(-ia-2b) = 0 \end{cases}$$

$\searrow$ se $a = 1 \Rightarrow c = -i \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = -i}$ Autovettore: $(A - (-i)\mathbb{1})v = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 4+i & -(4+i) & -2i \\ -i & i & -1 \\ 2-4i & -2+4i & -2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

La matrice ha rk 2 $\Rightarrow$ autospazio ha dim. $= 1$

Si vede subito $c = 0$ e $a = b$, dunque autovettori $\langle v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

$$\begin{pmatrix} 4+i & -(4+i) & -2i \\ -i & i & -1 \\ 2-4i & -2+4i & -2-i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6+8i & -(6+8i) & 4-3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 8-6i & -(8-6i) & -3-4i \end{pmatrix}$$

come previsto ha rango 2

I vettori del nucleo (autospazio generalizzato di $\lambda_2 = -i$)
devono soddisfare $(6+8i)(a-b) + (4-3i)c = 0$.
Due indipendenti sono ad esempio il già noto $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
e (notando che $6+8i = 2i(4-3i)$) anche $v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -2 \end{pmatrix}$

Dunque il cambio di base $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ -i & 0 & -2 \end{pmatrix}$ rende la matrice a blocchi.

a blocchi

$A = PBP^{-1} \leadsto B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ -i & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -(4+i) & -2i \\ -i & 0 & -1 \\ 2-4i & -(2-4i) & -2(1+i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -i \\ -1 & 2 & i \\ -i & i & -1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$

(fortunatamente in forma di Jordan, notare che $Av_2' = v_2 + (-i)v_2'$
ovvero $(A - (-i)\mathbb{1})v_2' = v_2$)

Si ha $B = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ (B_1, B_2)

- $e^{tB_1} = (e^{2t})$
- $e^{tB_2} = e^{-it\mathbb{1}} e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{-it}\left(\mathbb{1} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = e^{-it}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

dunque $e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-it} & te^{-it} \\ 0 & 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$

Così $A = PBP^{-1} \Rightarrow tA = P(tB)P^{-1} \Rightarrow e^{tA} = Pe^{tB}P^{-1} = \ldots$ si ricava

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - (1+it)e^{-it} & -2e^{2t} + (2+it)e^{-it} & -ie^{2t} + (i-t)e^{-it} \\ -ite^{-it} & (1+it)e^{-it} & -te^{-it} \\ -2i(e^{2t} - e^{-it}) & 2i(e^{2t} - e^{-it}) & e^{2t} + 2e^{-it} \end{pmatrix}$$

(naturalmente $e^{-it} = \cos(-t) + i\sin(-t) = \cos t - i\sin t$, se servisse)