UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di martedì 03/12/2024

Quanto detto finora riguarda il problema omogeneo a coefficienti costanti $y' = Ay$.

Torniamo ora al caso generale non omogeneo $\boxed{y' = Ay + b(t).}$

La formula del metodo di Lagrange (variazione costanti arbitrarie) funziona ancora: se $\Phi(t)$ è risolvente di $y' = Ay$, allora la soluzione del pb. di Cauchy $\begin{cases} y' = Ay + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ è

$$y(t) = \Phi(t) \left(\Phi(t_0)^{-1} y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau)^{-1} b(\tau)\, d\tau \right).$$

In particolare, se come risolvente scegliamo proprio e^{tA}, la formula diventa $y(t) = e^{tA} \left(e^{-t_0 A} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\tau A} b(\tau)\, d\tau \right)$

$$\boxed{y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} b(\tau)\, d\tau.}$$

Tuttavia il calcolo della formula può risultare spesso macchinoso, dunque è opportuno sviluppare qualche metodo pratico per trovare una soluzione particolare in qualche caso speciale in cui $b(t)$ è di forma semplice.

Prop. Si abbia $b(t) = v e^{\lambda t}$ ove $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{C}^n$. Se λ NON è autovalore di A, allora esiste una e una sola soluzione di $y' = Ay + b(t)$ del tipo $u e^{\lambda t}$ con $u \in \mathbb{C}^n$ da determinare.

Dim. Imponendo a $y(t) = u e^{\lambda t}$ di soddisfare l'equazione $y' = Ay + \underbrace{b(t)}_{v e^{\lambda t}}$

ottengo $\lambda u \cancel{e^{\lambda t}} = A u \cancel{e^{\lambda t}} + v \cancel{e^{\lambda t}}$ dunque

$(\lambda \mathbb{1} - A) u = v \implies u = (\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} v$

(perché $\lambda \mathbb{1} - A$ è invertibile, non essendo λ autovalore di A) //

$\boxed{\text{Ex.}}$ Risolvere
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = y - 2x + \sin(t/2) \\ (x(\pi), y(\pi)) = (1, -2) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \overset{b(t)}{\begin{pmatrix} 0 \\ \sin t/2 \end{pmatrix}}$$

Parte omogenea: $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \implies$ autovalori $1 \pm 2i$

Autovettore relativo a $\lambda = 1 + 2i$:

$\begin{pmatrix} 2i & -2 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad i\alpha - \beta = 0 \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Sol. complessa: $\varphi(t) = v e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^t (\cos 2t + i \sin 2t) = e^t \left(\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} \right)$

$\mathrm{Re}\,\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ -e^t \sin 2t \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Im}\,\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^t \sin 2t \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix}$

Per la parte non omogenea, sfruttando il fatto che il sistema è a coeff. costanti REALI, notiamo che $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t/2 \end{pmatrix} = \mathrm{Im} \overset{\tilde{b}(t)}{\begin{pmatrix} 0 \\ e^{it/2} \end{pmatrix}}$, dunque se trovo una soluzione per $\tilde{b}(t)$, la sua Im sarà soluzione per $b(t)$.

$\tilde{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{2} t}$, e $i/2$ non è radice caratteristica (sono $1 \pm 2i$)

$\implies \exists!$ sol. part. della forma $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{it/2}$ di $\dot{X} = AX + \tilde{b}(t)$

$$\begin{cases} \frac{ai}{2} \cancel{e^{it/2}} = a \cancel{e^{it/2}} + 2b \cancel{e^{it/2}} \\ \frac{bi}{2} \cancel{e^{it/2}} = -2a \cancel{e^{it/2}} + b \cancel{e^{it/2}} + \cancel{e^{it/2}}^{\,1} \end{cases} \qquad \begin{cases} ia = 2a + 4b \\ ib = -4a + 2b + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -\frac{2-i}{4} a \\ 4a - 2 = (2-i)\left(-\frac{2-i}{4} a\right) \end{cases}$$

da cui $\begin{cases} a = \frac{8}{19 - 2i} = \frac{8(19+2i)}{365} \\ b = -\frac{2(8-3i)}{73} \end{cases}$

Ma la soluzione che ci interessa è

$$\mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{it/2} \right) = \mathrm{Im}\left(\frac{2}{365} \begin{pmatrix} 4(19+2i) \\ -5(8-3i) \end{pmatrix} (\cos t/2 + i \sin t/2) \right)$$
$$= \frac{2}{365} \begin{pmatrix} 4(2\cos t/2 + 19 \sin t/2) \\ -5(-3\cos t/2 + 8 \sin t/2) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix}$$

Soluzione generale:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ -e^t \sin 2t \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} e^t \sin 2t \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix}$$

$$= e^t \begin{pmatrix} A\cos 2t + B \sin 2t \\ -A \sin 2t + B\cos 2t \end{pmatrix} + \frac{2}{365} \begin{pmatrix} 4(2\cos t/_2 + 19 \sin t/_2) \\ 5(3\cos t/_2 - 8 \sin t/_2) \end{pmatrix}$$

Pb. Cauchy $\quad (x(\pi), y(\pi)) = (1,-2)$:

$$e^{\pi} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \frac{2}{365} \begin{pmatrix} 78 \\ -40 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{209}{365} e^{-\pi} \\ -\frac{130}{73} e^{-\pi} \end{pmatrix}.$$

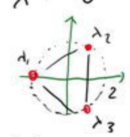
$\boxed{\text{Ex.}}$ Risolvere il sistema $\begin{cases} \dot{x} = 2z + 3 \\ \dot{y} = 2\cos t - x - 1 \\ \dot{z} = 4y - e^t \end{cases}$.

Trovare poi la soluzione t.c. $(x(0), y(0), z(0)) = (0,0,-1)$.

$$\dot{Y} = AY + b(t) \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad b(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^t \end{pmatrix}}_{b_3}$$

Parte omogenea $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & -4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 8 = 0 \quad \lambda^3 = -8$

autovalori: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}\, i$



Autovettore per $\lambda_1 = -2$: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, -2)$

Autovettore per $\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}\, i$: $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3}i & 0 & -2 \\ 1 & 1+\sqrt{3}i & 0 \\ 0 & -4 & 1+\sqrt{3}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{3}i \\ 1 \\ 1-\sqrt{3}i \end{pmatrix}$

Soluzioni indipendenti dell'omogenea:

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad \begin{cases} \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{3}i \\ 1 \\ 1-\sqrt{3}i \end{pmatrix} e^{(1+\sqrt{3}i)t} \\ \bar{\varphi}_2(t) = \dots \end{cases}$$

$$e^{(1+\sqrt{3}i)t} = e^t\left(\cos(t\sqrt{3}) + i \sin(t\sqrt{3})\right)$$

$$\operatorname{Re}\varphi_2 = \begin{pmatrix} -\cos(t\sqrt{3}) + \sqrt{3}\sin(t\sqrt{3}) \\ \cos(t\sqrt{3}) \\ \cos(t\sqrt{3}) + \sqrt{3}\sin(t\sqrt{3}) \end{pmatrix} e^t$$

$$\operatorname{Im}\varphi_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\cos(t\sqrt{3}) - \sin(t\sqrt{3}) \\ \sin(t\sqrt{3}) \\ -\sqrt{3}\cos(t\sqrt{3}) + \sin(t\sqrt{3}) \end{pmatrix} e^t$$

Risolvente reale: $\Phi(t) = \left(\varphi_1 \;\vdots\; \operatorname{Re}\varphi_2 \;\vdots\; \operatorname{Im}\varphi_2 \right)$

Per il pb. non omogeneo:

- $b_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{it} \\ 0 \end{pmatrix}$; i non è autovalore di A $\Rightarrow \exists!$ sol. $\tilde{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{it}$

Imponendo che sia soluzione del sistema con termine non omogeneo $\begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{it} \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} ia\cancel{e^{it}} = 2c\cancel{e^{it}} \\ ib\cancel{e^{it}} = 2\cancel{e^{it}} - a\cancel{e^{it}} \\ ic\cancel{e^{it}} = 4b\cancel{e^{it}} \end{cases} \qquad \begin{cases} ia = 2c \\ ib = 2-a \\ ic = 4b \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{2}{65}\begin{pmatrix} 8(8+i) \\ -8-i \\ 4(-1+8i) \end{pmatrix}$$

Ma a me interessa $\mathrm{Re}\left(\frac{2}{65}\begin{pmatrix} 8(8+i) \\ -8-i \\ 4(-1+8i) \end{pmatrix} \underbrace{e^{it}}_{\cos t + i\sin t}\right) = \frac{2}{65}\begin{pmatrix} 8(8\cos t - \sin t) \\ -8\cos t + \sin t \\ 4(-\cos t - 8\sin t) \end{pmatrix}$

- $b_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{0t}$; 0 non è autovalore di $A \Rightarrow \exists!$ sol. costante $\tilde{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 0 = 2c+3 \\ 0 = -a-1 \\ 0 = 4b \end{cases} \Rightarrow \tilde{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

- $b_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$; 1 non è autovalore di $A \Rightarrow \exists!$ sol. $\tilde{\varphi}_3(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^t$

$$\begin{cases} a\cancel{e^t} = 2c\cancel{e^t} \\ b\cancel{e^t} = -a\cancel{e^t} \\ c\cancel{e^t} = 4b\cancel{e^t} - \overset{1}{\cancel{e^t}} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2c \\ b = -a \\ c = 4b-1 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 2/9 \\ -1/9 \end{pmatrix}$$

Dunque la soluzione generale del sistema è

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \alpha\,\varphi_1(t) + \beta\,\mathrm{Re}\,\varphi_2(t) + \gamma\,\mathrm{Im}\,\varphi_2(t) + \tilde{\varphi}_1(t) + \tilde{\varphi}_2(t) + \tilde{\varphi}_3(t)$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

Pb. Cauchy: pongo $t=0$ e impongo che $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, -1)$ e così determino α, β, γ.

Per $b(t)$ di forma più generale:

<u>Prop.</u> Si abbia $b(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix} e^{\lambda t}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ e $p_j(t)$ polinomi di grado $\leq d$.

Supponiamo che λ sia autovalore di molt. $m \geq 0$.
Allora esiste una soluz. particolare di $y' = Ay + b(t)$
del tipo $\begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix} e^{\lambda t}$ con $q_1(t), \dots, q_n(t)$
polinomi di grado $\leq d+m$ da determinare
(se $m \geq 1$ tali polinomi non sono unici).

$\boxed{\text{Ex.}}$ Risolvere $\begin{cases} \dot{x} = y + 3e^t \\ \dot{y} = x + t e^{-t} \end{cases}$
con $(x(0), y(0)) = (0, 1/4)$.

Parte omogenea è ben nota: autovalori ± 1, $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$, $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$
e $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$.

Parte non omogenea: $b(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 3e^t \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_1(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ te^{-t} \end{pmatrix}}_{b_2(t)}$

- Per $b_1(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$ $(d=0)$; $\lambda = 1$ è autovalore semplice $(m=1)$

$\leadsto \exists$ sol. part. $\tilde{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix} e^t$.

Imponendo che $\begin{cases} \dot{x} = y + 3e^t \\ \dot{y} = x \end{cases}$: $\begin{cases} (at+b+a)\cancel{e^t} = (ct+d)\cancel{e^t} + 3\cancel{e^t} \\ (ct+d+c)\cancel{e^t} = (at+b)\cancel{e^t} \end{cases}$

$\begin{cases} (a-c)t + (a+b-d-3) = 0 \\ (a-c)t + (b-c-d) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a-c=0 \\ a+b-d=3 \\ \cancel{a-c=0} \\ b-c-d=0 \end{cases}$ Scelgo $b=0$: $\begin{cases} c=a \\ a-d=3 \\ -c-d=0 \end{cases}$ $\begin{cases} a=c=3/2 \\ d=-3/2 \end{cases}$

$\tilde{\varphi}_1(t) = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix} e^t$

- Per $b_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ te^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} e^{-t}$ $(d=1)$; $\lambda = -1$ è autovalore semplice $(m=1)$

$\leadsto \exists$ sol. part. $\tilde{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} at^2+bt+c \\ dt^2+ft+g \end{pmatrix} e^{-t}$.

Imponendo che $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + te^{-t} \end{cases}$ si ottiene $a = b = -1/4$, c libero, $d = 1/4$, $f = g = -1/4$.

Scelgo $c=0$: $\tilde{\varphi}_2(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -t^2-t \\ t^2-t-1 \end{pmatrix} e^{-t}$.

Dunque le soluzioni sono:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \tilde{\varphi}_1(t) + \tilde{\varphi}_2(t)$$

Imponendo che $\varphi(0) = \binom{0}{1/4}$ dovrei trovare $A = 1$, $B = -1$ (verificare).
Usiamo per esercizio, in alternativa, la formula generale:

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} b(\tau)\, d\tau \qquad \left(\begin{array}{l} \text{qui } t_0 = 0 \\ y_0 = \binom{0}{1/4} \end{array} \right).$$

Viene:

$$\varphi(t) = e^{tA} \binom{0}{1/4} + \int_0^t e^{(t-\tau)A} \begin{pmatrix} 3e^{\tau} \\ \tau e^{-\tau} \end{pmatrix} d\tau \qquad \text{qui } e^{tA} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cosh(t-\tau) & \sinh(t-\tau) \\ \sinh(t-\tau) & \cosh(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{\tau} \\ \tau e^{-\tau} \end{pmatrix} d\tau$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^t \begin{pmatrix} 3(e^t + e^{-t+2\tau}) + \tau(e^{t-2\tau} - e^{-t}) \\ 3(e^t - e^{-t+2\tau}) + \tau(e^{t-2\tau} + e^{-t}) \end{pmatrix} d\tau$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 3e^t\tau + 3/2\, e^{-t} e^{2\tau} - \frac{1}{4}(2\tau+1) e^{t-2\tau} - \frac{1}{2} e^{-t}\tau^2 \\ 3e^t\tau - 3/2\, e^{-t} e^{2\tau} - \frac{1}{4}(2\tau+1) e^{t-2\tau} + \frac{1}{2} e^{-t}\tau^2 \end{pmatrix} \right]_{\tau=0}^{\tau=t}$$

e dovrebbe venire come prima.

$\boxed{\text{Ex.}}$ Trovare tutte le soluzioni di $\begin{cases} \dot{x} = -ix + 2y - 4\sin t \\ \dot{y} = x + 2iy + 1 \end{cases}$ $\qquad \sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \Rightarrow -4\sin t = 2ie^{-it} - 2ie^{it}$

e in particolare quella con $(x(0), y(0)) = (0, 0)$

Parte omogenea: $\begin{vmatrix} \lambda + i & -2 \\ -1 & \lambda - 2i \end{vmatrix} = \lambda^2 - i\lambda + 2 - 2 = \lambda^2 - i\lambda = 0$

Autovalori: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = 0$. (semplici).

Autovettore relativo a $\lambda_1 = i$: $\begin{pmatrix} 2i & -2 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Autovettore relativo a $\lambda_2 = 0$: $\begin{pmatrix} i & -2 \\ -1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$

Dunque un sistema fond. per l'omogenea è $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it}$, $\varphi_2 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$.

Parte non omogenea: $b(t) = \begin{pmatrix} -4\sin t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sin t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -4 \cdot \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \overset{b_1}{\begin{pmatrix} 2i \\ 0 \end{pmatrix}} e^{it} + \overset{b_2}{\begin{pmatrix} -2i \\ 0 \end{pmatrix}} e^{-it} + \overset{b_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(abbiamo usato la formula di Eulero per $\sin t$ e in questo il sistema non è più a coeff. reali, dunque pensare $\sin t = \operatorname{Im} e^{it}$

non serve a nulla).

- Per $b_1(t) = \begin{pmatrix} 2ie^{it} \\ 0 \end{pmatrix}$: $\lambda = i$ è autovalore di A $\rightsquigarrow$ $\exists$ sol. $\tilde{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix} e^{it}$

Imponendo che $\tilde{\varphi}_1(t)$ risolva $\begin{cases} \dot{x} = -ix + 2y + 2ie^{it} \\ \dot{y} = x + 2iy \end{cases}$:

$$\begin{cases} (iat + ib + a)\cancel{e^{it}} = -i(at+b)\cancel{e^{it}} + 2(ct+d)\cancel{e^{it}} + 2i\cancel{e^{it}} \\ (ict + id + c)\cancel{e^{it}} = (at+b)\cancel{e^{it}} + 2i(ct+d)\cancel{e^{it}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(ia-c)t + a + 2ib - 2d - 2i = 0 \\ (a+ic)t + id + b - c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c = ia \\ a + 2ib - 2d - 2i = 0 \\ id + b - c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c = ia \\ a + 2ib = 2(d+i) \\ -ia + b = -id \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = ia \\ a + 2ib = 2(d+i) \\ \underline{a + ib = d} \quad (-2) \\ -a = 2i \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2i \\ c = 2 \\ d = i(b-2) \end{cases}$$

scelgo ad es. $b = 2$, $d = 0$

dunque $\tilde{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} -2(it-1) \\ 2t \end{pmatrix} e^{it}$.

- Per $b_2(t) = \begin{pmatrix} -2ie^{-it} \\ 0 \end{pmatrix}$: $\lambda = -i$ NON è autoval. $\rightsquigarrow$ $\exists!$ sol. $\tilde{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{-it}$

Imponendo che $\tilde{\varphi}_2(t)$ risolva $\begin{cases} \dot{x} = -ix + 2y - 2ie^{-it} \\ \dot{y} = x + 2iy \end{cases}$:

$$\begin{cases} -ia\cancel{e^{-it}} = -ia\cancel{e^{-it}} + 2b\cancel{e^{-it}} - 2i\cancel{e^{-it}} \\ -ib\cancel{e^{-it}} = a\cancel{e^{-it}} + 2ib\cancel{e^{-it}} \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{-ia} = \cancel{-ia} + 2b - 2i \\ -ib = a + 2ib \end{cases} \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = i \end{cases}$$

Dunque $\tilde{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix} e^{-it}$

- Per $b_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\lambda = 0$ è autovalore $\rightsquigarrow$ $\exists$ sol. $\tilde{\varphi}_3(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}$

Imponendo che $\tilde{\varphi}_3(t)$ risolva $\begin{cases} \dot{x} = -ix + 2y \\ \dot{y} = x + 2iy + 1 \end{cases}$:

$$\begin{cases} a = -i(at+b) + 2(ct+d) \\ c = at + b + 2i(ct+d) + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (ia-2c)t + a + ib - 2d = 0 \\ (a+2ic)t + b - c + 2id + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2ic \\ ib - 2ic - 2d = 0 \\ b - c + 2id = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2ic \\ b + 2id = 2c \\ \underline{b + 2id = c - 1} \quad (-) \end{cases} \quad \begin{cases} 2c = c - 1 \Rightarrow c = -1 \\ a = -2ic = 2i \\ b + 2id = -2 \end{cases}$$

Scelgo ad es. $b = 0$, $d = i$: dunque $\tilde{\varphi}_3(t) = \begin{pmatrix} 2it \\ -t+i \end{pmatrix}$.

Pertanto le soluzioni sono

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2(it-1) \\ 2t \end{pmatrix} e^{it} + \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix} e^{-it} + \begin{pmatrix} 2it \\ -t+i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha - 2it + 2)e^{it} + 3e^{-it} + 2\beta + 2it \\ (2t + i\alpha)e^{it} + ie^{-it} + i\beta - t + i \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Pb. di Cauchy: $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2 + 3 + 2\beta \\ i\alpha + i + i\beta + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = -5 \\ \alpha + \beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1, \ \beta = -3.$$

Esaminiamo infine l'equazione lineare scalare di ordine n a coefficienti costanti, cercando di ritrovare dalla teoria generale dei sistemi del I° ordine quanto già appreso nel corso di Analisi I.

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \beta(t)$$

con $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $\beta : I \to \mathbb{C}$ continua

Ricordiamo che il polinomio caratteristico dell'equazione è

$$P(\tau) := \tau^n + a_{n-1}\tau^{n-1} + \dots + a_1 \tau + a_0.$$

L'equazione corrisponde al sistema del I° ordine $z' = Az + b(t)$:

$$z = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

Prop. Vale $\det(\tau \mathbb{1} - A) = P(\tau)$, dunque gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico (con le relative molteplicità).

Dim. Per induzione.

Caso base $n=1$. $y'+\alpha_0 y = \beta(t)$. Pongo $z=y$:

$z' = \overset{A}{-\alpha_0}\, z + \beta(t)$ $\quad \det(\tau 1 - A) = \det(\tau+\alpha_0) = \overset{P(\tau)}{\tau+\alpha_0}$.

Passo induttivo. Sia $n \geq 2$, e sviluppiamo

$$\det(\tau \mathbb{I} - A) = \det \begin{pmatrix} \tau & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \tau+\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

rispetto alla prima colonna: si ottiene

$$\tau \det \begin{pmatrix} \tau & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \tau+\alpha_{n-1} \end{pmatrix} + (-1)^{n+1}\alpha_0 (-1)^{n-1} =$$

$$\tau\left(\tau^{n-1}+\alpha_{n-1}\tau^{n-2}+\dots+\alpha_1\right)+\alpha_0 = P(\tau). \quad //$$

Con un po' di lavoro (non difficile ma noioso), dalla teoria generale dei sistemi a coeff. costanti in questo caso si può esibire un sistema fondamentale di soluzioni in modo diretto.

Prop. (a) Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ le radici caratteristiche di $P(\lambda)=0$ di molteplicità $a_1, \dots, a_r$ con $a_1+\dots+a_r = n$. Allora un sistema fondamentale di soluzioni (per l'eq. omogenea associata) è dato da

$e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{a_1-1}e^{\lambda_1 t}$ $\leftarrow$ sono a_1

$e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{a_2-1}e^{\lambda_2 t}$ $\leftarrow$ sono a_2 TOTALE: n soluz. lin. indip.

$\vdots$

$e^{\lambda_r t}, \dots, t^{a_r-1}e^{\lambda_r t}$ $\leftarrow$ sono a_r

(b) Per determinare una soluzione particolare della eq. completa si può usare il metodo di Lagrange. Oppure: se $\beta(t) = A(t)\,e^{\gamma t}$ con $A(t)$ polinomio complesso e $\gamma \in \mathbb{C}$, detta $m \geq 0$ la molteplicità di γ come radice caratteristica, esiste una e una di γ come radice caratteristica, esiste una e una sola soluzione particolare della forma

$$\tilde{y}(t) = t^m B(t)\, e^{\gamma t}$$

ove $B(t)$ è polinomio dello stesso grado di $A(t)$ da determinare.

Nel caso reale, per selezionare un sistema fond. di una soluzione particolare reali si seguono le considerazioni già fatte in precedenza (prendere Re e Im).

$\boxed{\text{Ex.}}$ • $4y'' + y = 3\sin t$

Eq. caratt. $4\tau^2+1=0$ $\tau = \pm\frac{1}{2}i$ radici caratteristiche.
Sist. fondamentale $\{\varphi(t) = e^{\frac{1}{2}it},\ \bar{\varphi}(t) = e^{-\frac{1}{2}it}\}$
Si può sostituire con $\{\operatorname{Re}\varphi(t) = \cos\frac{t}{2},\ \operatorname{Im}\varphi(t) = \sin\frac{t}{2}\}$
Essendo in un caso a coeff. reali, vedo $\beta(t) = 3\sin t = \operatorname{Im}(3e^{it})$, cerchiamo una soluz. part. di $4y''+y = 3e^{it}$ e ne prendiamo Im.
Una sol. part. per $4y''+y=3e^{it}$ (i non è rad. caratt.) sarà della forma $\tilde{\varphi}(t) = a e^{it} \Rightarrow \tilde{\varphi}'(t) = i a e^{it}$, $\tilde{\varphi}''(t) = -a e^{it}$
$\rightarrow 4\tilde{\varphi}'' + \tilde{\varphi} = (-4a+a)e^{it} = 3e^{it} \Rightarrow a = -1$
Dunque $\tilde{\varphi}(t) = -e^{it}$, ma a me interessa $\operatorname{Im}\tilde{\varphi}(t) = -\sin t$.
Perciò le soluzioni di $4y''+y = 3\sin t$ sono tutte e sole
$$y(t) = A\cos\tfrac{t}{2} + B\sin\tfrac{t}{2} - \sin t, \qquad A, B \in \mathbb{C} \ (\text{oppure } \in \mathbb{R})$$

• $y''' - 2y' + 4y = t^2 - e^{-2t}$

$\tau^3 - 2\tau + 4 = 0$ $\tau = -2$
$(\tau+2)(\tau^2 - 2\tau + 2) = 0$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & & -2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & // \end{array}$$

radici caratt. $-2,\ 1 \pm i$.

$e^{(1+i)t} = e^t \cdot e^{it} = e^t(\cos t + i \sin t)$

Sist. fondam. $\{e^{-2t}, e^t \cos t, e^t \sin t\}$.

Per $b_1(t) = t^2$ sol. part. del tipo $\tilde{\varphi}_1(t) = at^2+bt+c$

$$0 - 2(2at+b) + 4(at^2+bt+c) = t^2 \qquad \begin{cases} 4a = 1 \\ -4a+4b = 0 \\ -2b+4c = 0 \end{cases}$$

$$(a,b,c) = (1/4,\ 1/4,\ 1/8) \qquad \tilde{\varphi}_1(t) = \frac{1}{8}(2t^2+2t+1)$$

Per $b_2(t) = -e^{-2t}$ sol. part. $\tilde{\varphi}_2(t) = ate^{-2t}$ (-2 rad. caratt. semplice)

$\rightsquigarrow \tilde{\varphi}_2'(t) = a(1-2t)e^{-2t}$, $\tilde{\varphi}_2''(t) = a(4t-4)e^{-2t}$, $\tilde{\varphi}_2'''(t) = a(12-8t)e^{-2t}$

Imponendo che $\tilde{\varphi}_2''' - 2\tilde{\varphi}_2' + 4\tilde{\varphi}_2 = e^{-2t}$

$$a(12 - \cancel{8t} - 2(1-\cancel{2t}) + \cancel{4t})\cancel{e^{-2t}} = -\cancel{e^{-2t}}\,1 \qquad 10a = -1 \qquad a = -1/10$$

Dunque $y(t) = Ae^{-2t} + Be^t \cos t + Ce^t \sin t - \frac{1}{10}te^{-2t}$

$$= (A - t/10)e^{-2t} + (B\cos t + C \sin t)e^t, \quad A,B,C \in \mathbb{C}$$

- $y^{(iv)} + 2y'' + y = 3t\cos t$

$\tau^4 + 2\tau + 1 = 0 \iff \tau = \pm i$ doppie

al posto di e^{it}, e^{-it} al posto di te^{it}, te^{-it}

Sist fond. reale $\{\cos t, \sin t, t\cos t, t \sin t\}$

Per $3t\cos t = \mathrm{Re}(3te^{it})$ sol. part. del tipo

$$\tilde{\varphi}(t) = t^2(at+b)e^{it} = (at^3+bt^2)e^{it} \rightsquigarrow$$

$$\tilde{\varphi}' = (ait^3 + (3a+ib)t^2 + 2bt)e^{it} \rightsquigarrow$$

$$\tilde{\varphi}'' = (-at^3 + (6ia-b)t^2 + 2(3a+2ib)t + 2b)e^{it} \rightsquigarrow$$

$$\tilde{\varphi}''' = (-iat^3 + (-9a-ib)t^2 + 2(9ia-3b)t + 2(3a+3ib))e^{it}$$

$$\tilde{\varphi}^{(iv)} = (at^3 + (-12ia+b)t^2 + 2(-18a-4ib)t + 2(12ia-6b))e^{it}$$

perciò

$$\tilde{\varphi}^{(iv)} + 2\tilde{\varphi}'' + \tilde{\varphi} = \left(2\left(\begin{smallmatrix} -18a - \cancel{4ib} \\ +6a + \cancel{4ib} \end{smallmatrix}\right)t + 2\left(\begin{smallmatrix} 12ia - 6b \\ +4b \end{smallmatrix}\right)\right)e^{it} = 3te^{it}$$

$$\iff \begin{cases} -24a = 3 \\ 2(12ia-2b) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1/8 \\ b = 6ia = -\frac{3}{4}i \end{cases} \Rightarrow \tilde{\varphi} = -\frac{t^2}{8}(t+6i)e^{it}$$

Ci interessa $\mathrm{Re}\,\tilde{\varphi} = -t^2/8\,(t\cos t - 6 \sin t)$, dunque

$$y(t) = (A + Ct - t^3/8)\cos t + (B + Dt + \tfrac{3}{4}t^2)\sin t \quad (A,B,C,D \in \mathbb{R}).$$

$\boxed{\text{Ex.}}$ $y'' + 2iy' - y = 2\sin t + 4e^{-t} - 1$

$\tau^2 + 2i\tau - 1 = (\tau + i)^2 = 0 \Rightarrow$ radice $\tau = -i$ doppia

Sistema fondamentale $\varphi_1(t) = e^{-it}$, $\varphi_2(t) = te^{-it}$.

$b(t) = 2\sin t + 4e^{-t} - 1 = \frac{e^{it} - e^{-it}}{i} + 4e^{-t} - 1 =$

$= \underbrace{-ie^{it}}_{b_1} + \underbrace{ie^{-it}}_{b_2} + \underbrace{4e^{-t}}_{b_3} \underbrace{- 1}_{b_4}$

- Per $b_1(t) = -ie^{it}$ soluz. del tipo $\tilde{\varphi}_1(t) = \alpha e^{it}$;
  imponendo che $\tilde{\varphi}_1'' + 2i\tilde{\varphi}_1' - \tilde{\varphi}_1 = -ie^{it}$ trovo
  $-\alpha \cancel{e^{it}} + 2i(i\alpha \cancel{e^{it}}) - \alpha \cancel{e^{it}} = -i\cancel{e^{it}}$
  $-\alpha - 2\alpha - \alpha = -i \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}i \Rightarrow \tilde{\varphi}_1 = \frac{1}{4}ie^{it}$.

- Per $b_2(t) = ie^{-it}$ (notare che $-i$ è radice caratt. doppia):
  soluz. del tipo $\tilde{\varphi}_2(t) = \beta t^2 e^{-it}$.
  Imponendo che $\tilde{\varphi}_2'' + 2i\tilde{\varphi}_2' - \tilde{\varphi}_2 = ie^{-it}$
  $\beta(-t^2 - 4it + 2)\cancel{e^{-it}} + 2i\beta(-it^2 + 2t)\cancel{e^{-it}} - \beta t^2 \cancel{e^{-it}} = i\cancel{e^{-it}}$
  $\beta(\cancel{-t^2} \cancel{-4it} + 2 + \cancel{2t^2} + \cancel{4it} \cancel{-t^2}) = i \Rightarrow \beta = \frac{i}{2} \Rightarrow \tilde{\varphi}_2(t) = \frac{it^2}{2}e^{-it}$

- Per $b_3 \equiv -1$ c'è soluzione $\varphi_3 \equiv a$ costante.
  Imponendo che $\tilde{\varphi}_3'' + 2i\tilde{\varphi}_3' - \tilde{\varphi}_3 = -1$: $0 + 0 - a = -1$
  $\Rightarrow a = 1 \Rightarrow \tilde{\varphi}_3 \equiv 1$

Soluzione generale:

$$y(t) = \left(\alpha + \beta t + \frac{1}{2}it^2\right)e^{-it} + \frac{1}{4}ie^{it} + 2ie^{-t} + 1$$

(con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$).

$\boxed{\text{Ex}}$ Risolvere $\begin{cases} 4y'' - y = 5\sin t - \frac{2}{e^t + 1} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Eq. caratteristica $4\tau^2 - 1 = 0$ $\tau = \pm 1/2$.

Sist. fondamentale $\varphi_1(t) = e^{t/2}$, $\varphi_2(t) = e^{-t/2}$.

- $b_1(t) = 5\sin t$. Possiamo pensare $5\sin t = \mathrm{Im}(5e^{it})$
  come fatto in precedenza, oppure (non essendo $\lambda = i$

soluzione caratteristica, ed essendo in un caso reale)
cercare da subito una soluzione reale del tipo

$\tilde{\varphi}_1(t) = a\cos t + b\sin t$:

$4\tilde{y}_1'' - \tilde{y}_1 = -5a\cos t - 5b\sin t = 5\sin t \iff$

$(a,b) = (-1,0) \leadsto \tilde{\varphi}_1(t) = -\sin t.$

• $b_2(t) = -\dfrac{2}{e^t+1}$. Dobbiamo usare il metodo di Lagrange.

$\tilde{\varphi}_2(t) = c_1(t)e^{t/2} + c_2(t)e^{-t/2}$, ove $c_j(t) = (-1)^{2+j}\int \dfrac{\det \overline{W}_j(t)}{\det \overline{W}(t)} b(t)\,dt$.

$\overline{W} = \begin{pmatrix} e^{t/2} & e^{-t/2} \\ \frac{1}{2}e^{t/2} & -\frac{1}{2}e^{-t/2} \end{pmatrix}$ $\quad \det\overline{W} = -1$

$e^t = u^2,\ t = 2\log u,\ dt = \frac{2}{u}du$

$c_1(t) = -\int \dfrac{e^{-t/2}}{-1}\cdot\dfrac{-2}{e^t+1}dt = -2\int\dfrac{e^{-t/2}}{e^t+1}dt = -4\int\dfrac{1/u}{u^2+1}\cdot\dfrac{1}{u}du$

$= -4\int\dfrac{1}{u^2(u^2+1)}du = -4\int\left(\dfrac{1}{u^2}-\dfrac{1}{u^2+1}\right)du = 4\left(\dfrac{1}{u}+\arctan u\right)$

$= 4\left(e^{-t/2}+\arctan(e^{t/2})\right)$

$c_2(t) = +\int\dfrac{e^{t/2}}{-1}\cdot\dfrac{-2}{e^t+1}dt = 2\int\dfrac{e^{t/2}}{e^t+1}dt = 2\int\dfrac{u}{u^2+1}\cdot\dfrac{2}{u}du$

$= 4\arctan u = 4\arctan(e^{t/2})$.

Dunque la soluzione generale è

$y(t) = \alpha e^{t/2} + \beta e^{-t/2} + 4\left(e^{-t/2}+\arctan(e^{t/2})\right)e^{t/2} + 4\arctan(e^{t/2})e^{-t/2} - \sin t$

$= \alpha e^{t/2} + \beta e^{-t/2} + 2\arctan(e^{t/2})\cosh(t/2) - \sin t + 4 \qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{C}).$

Derivando:

$y'(t) = \frac{\alpha}{2}e^{t/2} - \frac{\beta}{2}e^{-t/2} + \dfrac{e^{t/2}}{e^t+1}\cosh(t/2) + \arctan(e^{t/2})\sinh(t/2) - \cos t$,

dunque le condizioni di Cauchy $(y(0), y'(0)) = (0,0)$ dà

$\left(\alpha+\beta+2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 1 + 4,\ \frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}-1\right) = (0,0)$ cioè $\begin{cases}\alpha+\beta = -4-\pi/2\\ \alpha-\beta = 1\end{cases}$

da cui $\begin{cases}\alpha = -\dfrac{6+\pi}{2}\\ \beta = -\dfrac{8+\pi}{2}.\end{cases}$