UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 05/12/2024

Equazioni di Eulero (nell'incognita $y(x)$):

$$\boxed{x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0}$$

(con $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$)

$\boxed{\text{Ex.}}$ $3x^2y'' - xy' - 4y = 0$ che faremo tra breve.

- Prima osservazione: se $\varphi(x)$ è soluzione per $x>0$, allora $\varphi(-x)$ lo è per $x<0$ (esercizio). Ci si può occupare dunque del solo caso $x>0$.

$\psi(x) := \varphi(-x) \quad (x<0)$

$\psi^{(k)}(x) = (-1)^k \varphi^{(k)}(-x)$

$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \psi^{(j)}(x)$

$= \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \cdot (-1)^j \varphi^{(j)}(-x)$

$= \sum_{j=0}^{n} a_j (-x)^j \varphi^{(j)}(-x)$

$= 0$

- Poniamo $x = e^t$, $z(t) = y(x) = y(e^t)$, indicando col punto la derivata rispetto a t.

  $\dot z = y' \cdot \dot x = x y'$, $\ddot z = \dot x y' + x(y'' \dot x) = xy' + x^2 y''$

  da cui $x^2 y'' = \ddot z - \dot z$, ...

  proseguendo così esprimo $x^j y^{(j)} = \sum_{l=0}^{j} \beta_l^{(j)} z^{(l)}$

  Dunque l'equazione (LINEARE) in $z(t)$ diventa a coeff. costanti

N.B.: Le soluzioni del tipo $z(t) = e^{\lambda t}$ corrispondono alle soluzioni $y(x) = x^\lambda$, pertanto per trovare l'eq. caratteristica per $z(t)$ basta imporre che x^λ sia soluzione dell'eq. di Eulero originale.

$\boxed{\text{Ex.}}$ $3x^2y'' - xy' - 4y = 0$ $\qquad z(t) := y(x) = y(e^t)$

$xy' = \dot z$, $\ddot z = (xy')^{\cdot} = \dot x y' + x (y')^{\cdot} = \dot x y' + x \cdot \dot x y'' = xy' + x^2 y'' \Rightarrow x^2 y'' = \ddot z - xy' = \ddot z - \dot z$

$3(\ddot z - \dot z) - \dot z - 4z = 0 \rightsquigarrow 3\ddot z - 4\dot z - 4z = 0$ omogenea a coeff. costanti

Eq. caratt. $3\lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{3} = \dfrac{2 \pm 4}{3} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$

Altrimenti per trovare subito l'eq. caratteristica bastava cercare le soluzioni $y(x)$ del tipo x^λ:

$3x^2\cdot\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} - x\cdot\lambda x^{\lambda-1} - 4x^\lambda = 0$ $\quad \cancel{x^\lambda}\big(\underbrace{3\lambda(\lambda-1)-\lambda-4}_{3\lambda^2-4\lambda-4}\big) = 0$

Insomma: $z(t) = Ae^{2t} + Be^{-2/3\,t}$ $\overset{x=e^t}{\Longrightarrow}$ $y(x) = Ax^2 + Bx^{-2/3}$ $\quad (x>0)$

In generale, per $x \gtrless 0$: $\quad y(x) = Ax^2 + B|x|^{-2/3}$

Soluzioni su tutto $\mathbb{R}$? Quali sono prolungabili in $x=0$? $\quad \lim_{x\to 0} Ax^2$

Per continuità posso prolungare in $x=0$ $\Longleftrightarrow$ $B=0$ (con valore $y(0):=0$)

Naturalmente poi le costanti per $x>0$ e $x<0$ sarebbero a priori indipendenti, dunque restano le funzioni $y(x) = \begin{cases} A'x^2 & (\text{per } x>0)\\ 0 & (\text{per } x=0)\\ A''x^2 & (\text{per } x<0)\end{cases}$ con $A', A'' \in \mathbb{C}$ che sono già

di classe $\mathcal{C}^1$ con derivata nulla in $x=0$ (infatti $\lim_{x\to 0^\pm} y'(x) = 0$).

Questo però non basta, perché devo inserire e derivare y almeno due volte in $x=0$: essendo $y''(x) = \begin{cases} 2A' & (\text{per } x>0)\\ 2A'' & (\text{per } x<0)\end{cases}$, essendo $\lim_{x\to 0^+} y''(x) = 2A'$ e $\lim_{x\to 0^-} y''(x) = 2A''$

dovrà essere anche $A' = A''$. Pertanto, le soluzioni dell'equazione data prolungabili anche in $x=0$ sono tutte e sole quelle del tipo $y(x) = Ax^2$ con $A \in \mathbb{C}$ (tra le quali anche la funzione nulla, ovvia soluzione).

Ex. (Prova scritta 2015/16 del 25/1/2016, Ex. 5)

5. **(a)** Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$ tutte le funzioni $(x(t), y(t))$ a valori complessi tali che $(\dot x, \dot y) = (ix + \alpha - y,\ x - (2-i)y)$, specificando quali di esse tendono a $(0,0)$ per $t \to +\infty$.

(b) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} i & -1 & 0\\ 1 & -(2-i) & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ e posto $X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ calcolare tutte le soluzioni del sistema $\dot X = AX$ e la matrice esponenziale e^A (converrà usare quanto ottenuto in (a)).

(a) $\quad M = \begin{pmatrix} i & -1\\ 1 & -(2-i)\end{pmatrix}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, $\quad b = \begin{pmatrix} \alpha\\ 0\end{pmatrix}$ $\quad : \dot Y = MY + b$

Autovalori di M: $\quad \det(\lambda\mathbb{1} - M) = \begin{vmatrix} & 1\\ -1 & \lambda+(2-i)\end{vmatrix} = \lambda^2 + (2-i)\lambda - i\lambda - i(2-i) + 1$

$= \lambda^2 + 2(1-i)\lambda - 2i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1+i$ doppio.

Allora sappiamo che $N = M - (-1+i)\mathbb{1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

è nilpotente $(N^2 = 0)$ $\Rightarrow$ $e^{tM} = e^{(-1+i)t}(\mathbb{1} + tN) = \begin{pmatrix} 1+t & -t\\ t & 1-t\end{pmatrix} e^{(-1+i)t}$

Dunque le soluzioni dell'omogenea $\dot Y = MY$ sono tutte e sole quelle del tipo $\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = e^{tM}\cdot\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}$, $\quad u, v \in \mathbb{C}$.

Notando che 0 non è radice caratteristica, una soluz. particolare per $b = \begin{pmatrix} \alpha\\ 0\end{pmatrix} e^{0t}$ sarà semplicemente un vettore costante $\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 0 = ia + \alpha - b \\ 0 = a - (2-i)b \end{cases} \qquad \begin{cases} b = ia + \alpha \\ 0 = a - (2-i)(ia+\alpha) \end{cases} \qquad 0 = a - i(2-i)a - \alpha(2-i)$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2i \\ i \end{pmatrix}\alpha \ .$$

Dunque le soluzioni cercate sono

$$\begin{cases} x(t) = \big(u(1+t) - vt\big)e^{(-1+i)t} + \frac{1}{2}(1+2i)\,\alpha \\ y(t) = \big(ut + v(1-t)\big)e^{(-1+i)t} + \frac{i}{2}\,\alpha \end{cases} \qquad \text{con } u, v \in \mathbb{C}$$

Per $t \to +\infty$ si ha $e^{(-1+i)t} = e^{-t}(\cos t + i \sin t) \longrightarrow 0$

quindi le soluzioni tendono alla costante $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+2i)\alpha \\ \frac{1}{2} i \alpha \end{pmatrix}$.

Pertanto quelle che tendono a $(0,0)$ sono tutte e sole quelle del caso omogeneo, in cui $\alpha = 0$.

(b) Nel sistema $\dot{X} = AX$, ovvero $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ 1 & -(2-i) & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

le prime due equazioni per x e y sono esattamente quelle del punto (a) nel caso omogeneo $\alpha = 0$, e dunque le soluzioni già le conosciamo:
$$\begin{cases} x(t) = \big(u + (u-v)t\big)e^{(-1+i)t} \\ y(t) = \big(v + (u-v)t\big)e^{(-1+i)t} \end{cases}$$

La terza equazione è $\dot{z} = x - y - z$, ovvero

$\dot{z} + \overset{p(t)=1}{z} = x - y = \underbrace{(u-v)e^{(-1+i)t}}_{q(t)}$ lineare del I° ordine

$P(t) = t$; $\int e^{P(t)} q(t)\,dt = \int \cancel{e^{t}}\,(u-v)\,e^{(\cancel{-1}+i)t}\,dt = (u-v)\int e^{it}\,dt = -i(u-v)e^{it}$

Dunque $z(t) = e^{-P(t)}\left(\int e^{P(t)} q(t)\,dt + w\right) = e^{-t}\left(w - i(u-v)e^{it}\right)$ $\quad (w \in \mathbb{C})$

$= w e^{-t} - i(u-v)e^{(-1+i)t}$

Come faccio a scrivere e^{tA}? Noto che $\begin{cases} x(0) = u \\ y(0) = v \\ z(0) = w - i(u-v) \end{cases}$:

la matrice e^{tA} ha come colonne le tre soluzioni $(x(t), y(t), z(t))$ tali che per $t=0$ risulti la matrice identica $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Per $(1,0,0)$: $(u,v,w) = (1, 0, i)$

Per $(0,1,0)$: $(u,v,w) = (0, 1, -i)$

Per $(0,0,1)$: $(u,v,w) = (0, 0, 1)$

Così
$$e^{tA} = \begin{pmatrix} (1+t)e^{(-1+i)t} & -te^{(-1+i)t} & 0 \\ te^{(-1+i)t} & (1-t)e^{(-1+i)t} & 0 \\ i(e^{-t} - e^{(-1+i)t}) & -i(e^{-t} - e^{(-1+i)t}) & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Ponendo $t = 1$ otteniamo e^{A}.

- In alternativa consideravamo la trasposta

$A^T = \begin{pmatrix} i & 1 & 1 \\ -1 & -(2-i) & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e calcoliamo e^{tA^T} (che sarà $(e^{tA})^T$).

$\dot{z} = -z \Rightarrow z(t) = \ell e^{-t}$ con $\ell \in \mathbb{C}$.

Poi $\begin{cases} \dot{x} = ix + y + \ell e^{-t} \\ \dot{y} = -x - (2-i)y - \ell e^{-t} \end{cases}$ cioè $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -(2-i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell e^{-t} \\ -\ell e^{-t} \end{pmatrix}$

Autovalori di M^T: è ancora $-1+i$ doppio

$N^T = M^T - (-1+i)\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ nilpotente

$\Rightarrow \; e^{tM^T} = e^{(-1+i)t}\left(\mathbb{1} + tN^T\right) = e^{(-1+i)t}\begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$.

Soluzione particolare per eq. completa del tipo $\begin{pmatrix} ae^{-t} \\ be^{-t} \end{pmatrix}$

e imponendo si trova $a = i\ell$, $b = -i\ell$

Dunque soluzioni sono $\begin{cases} x(t) = (h + (h+k)t)e^{(-1+i)t} + i\ell e^{-t} \\ y(t) = (k - (h+k)t)e^{(-1+i)t} - i\ell e^{-t} \\ z(t) = \ell e^{-t} \end{cases}$

Vale $(x(0), y(0), z(0)) = (h + i\ell,\ k - i\ell,\ \ell)$.

Per $(1,0,0)$: $(h,k,\ell) = (1,0,0)$

Per $(0,1,0)$: $(h,k,\ell) = (0,1,0)$

Per $(0,0,1)$: $(h,k,\ell) = (-i, i, 1)$

Dunque $e^{tA^T} = \begin{pmatrix} (1+t)e^{(-1+i)t} & te^{(-1+i)t} & i(e^{-t} - e^{(-1+i)t}) \\ -te^{(-1+i)t} & (1-t)e^{(-1+i)t} & -i(e^{-t} - e^{(-1+i)t}) \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

(che in effetti è la trasposta di e^{tA}).

- Se invece non si volesse aver seguito il suggerimento...

la matrice A ha autovalori $-1+i$ (doppio) e -1 (semplice).

L'autospazio relativo a -1 è $e_3 = (0,0,1)$ (autovettore).

Invece per $-1+i$, $N = A - (-1+i)\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -i \end{pmatrix}$ ha rango 2,

e il nucleo $\mathrm{Ker}\, N$ è generato da $\underline{v} = (1,1,0)$ (autovettore);

invece $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & i & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 1, e il nucleo $\mathrm{Ker}(N^2)$

(autospazio generalizz. di $-1+i$) è dato da $i(x-y) + z = 0$, generato da

$\underline{v} = (1,1,0)$ e da $\underline{w} = (1,0,-i)$.

Col cambio di base $P = \left(\underline{v} \,\middle|\, \underline{w} \,\middle|\, \underline{e}_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$ si ha

$A = PBP^{-1}$ con B a blocchi:

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ i & -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ 1 & -(2-i) & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i & 1 & 0 \\ 0 & -1+i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha $\exp\begin{pmatrix} -1+i & 1 \\ 0 & -1+i \end{pmatrix} = \exp\left((-1+i)\mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = e^{(-1+i)t}\left(\mathbb{1} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$
$= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{(-1+i)t}$

da cui $e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{(-1+i)t} & te^{(-1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1+i)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$,

e perciò $e^{tA} = P e^{tB} P^{-1}$ che a conti fatti viene come prima.

(PROVA SCRITTA DEL 12/9/2017 - EX. 5)

Si consideri il sistema $(\dot{x}, \dot{y}) = (2x - y,\ 3x - 2y)$

(a) Determinare un integrale primo, le traiettorie, la soluzione con $(x(0), y(0)) = (-1, -3)$.

(b) Trovare tutte le soluzioni REALI, ritrovando quella col dato di prima.

(c) Aiutandosi con (a-b) trovare tutte le soluzioni reali di
$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (2x - y - 1,\ 3x - 2y - 1,\ x - y + z)$$

(a) E.d.f. associata $\omega = (3x - 2y)\,dx + (y - 2x)\,dy = 0$

ω esatta con primitiva $F(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - 2xy + \frac{1}{2}y^2$

Curve di livello di F: iperboli $3x^2 - 4xy + y^2 = K$ iperboli $(\Delta > 0)$

(la curva $F = 0$ è l'unione dei due asintoti $y = x$ e $y = 3x$)

Equilibrio $(0,0)$ $\Rightarrow$ traiettorie sono: rami delle iperboli $F = K$ con $K \neq 0$, l'equilibrio $(0,0)$ e le semirette $y = x$ e $y = 3x$ con $x \gtrless 0$.

Per il dato $(x(0), y(0)) = (-1, -3)$ la traiettoria è $y = 3x$ con $x < 0$:

$\dot{x} = 2x - y = 2x - (3x) = -x \Rightarrow x(t) = -e^{-t}$, $y = 3x \Rightarrow y(t) = -3e^{-t}$

dunque la soluzione è $(x(t), y(t)) = (-e^{-t}, -3e^{-t})$

(b) Sistema è lineare omogeneo a coeff. costanti.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ha autovalori ± 1 con autovettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$:

soluzioni reali sono $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^t + Be^{-t} \\ Ae^t + 3Be^{-t} \end{pmatrix}$ $(A, B \in \mathbb{R})$

(quella di prima si ottiene per $A = 0$ e $B = -1$).

(c) Prime due equazioni sono

$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - 1 \\ \dot{y} = 3x - 2y - 1 \end{cases}$; parte omogenea come in (b), una soluzione particolare è la costante $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dunque

$(x(t), y(t)) = (Ae^t + Be^{-t} + 1,\ Ae^t + 3Be^{-t} + 1)$.

Poi $\dot{z} = x - y + z = z - 2Be^{-t} \Rightarrow \dot{z} - z = -2Be^{-t}$ lineare I° ordine

$\Rightarrow z(t) = e^t(Be^{-2t} + C) = Ce^{+t} + Be^{-t}$.

Dunque le soluzioni reali sono

$(x(t), y(t), z(t)) = (Ae^t + Be^{-t} + 1,\ Ae^t + 3Be^{-t} + 1,\ Ce^t + Be^{-t})$

al variare di $A, B, C \in \mathbb{R}$.