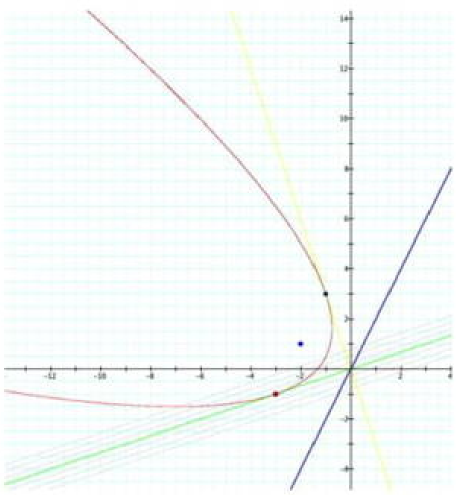
TEST 1 ESAME SCRITTO

1. Nel piano cartesiano sia X la parabola dei punti equidistanti dalla retta $2x-y=0$ e dal punto $(-2,1)$.

(a) Determinare una forma cartesiana per X, e una parametrizzazione locale nel suo punto $A(-1,3)$. Calcolare poi in due modi lo spazio tangente affine a X in A.

(b) Calcolare eventuali estremanti per $f(x,y)=x-3y$ su X, spiegando graficamente i risultati.



(a) Equidistanza da punto $(-2,1)$ e retta $2x-y=0$:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}^{\,2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,|2x-y|$$

$\to$ Forma cartesiana

$$g(x,y) = x^2+4xy+4y^2+20x-10y+25=0$$

$$\nabla g = (2x+4y+20,\ 4x+8y-10)$$

$$A(-1,3) \rightsquigarrow \nabla g(A) = (30,10) = 10(3,1)$$

$\rightsquigarrow$ si può $x(y) = -1+\left(-\frac{1}{3}\right)(y-3)+\cdots$

(in realtà $g(x,y)=0 \to x(y) = 5\sqrt{2y+3}-2(y+5)$)

Spazio tg. in A: $\nabla g(A)\cdot(x+1,\ y-3)=0$ $\longrightarrow$ $3x+y=0$; $x=-1-\frac{1}{3}(y-3)$ $\longrightarrow$ $3x+y=0$

(b) $\begin{cases} \text{rango}\begin{pmatrix}\nabla g\\ \nabla f\end{pmatrix} < 2 \\ g=0 \end{cases} \Rightarrow P(-3,-1)$ staz. per f su X

$\nabla g(P) = (10,-30) = 10\cdot(1,-3) \rightsquigarrow x(y) = -3+\left(-\frac{-30}{10}\right)(y+3)+\cdots$

Da $g(x(y),y)\equiv 0 \Rightarrow x(-1)=-3,\quad x'(-1)=3,\quad x''(-1)=-5$.

$F(y) := f(x(y),y) = x(y)-3y \Rightarrow F'(y) = x'(y)-3,\quad F''(y) = x''(y)$

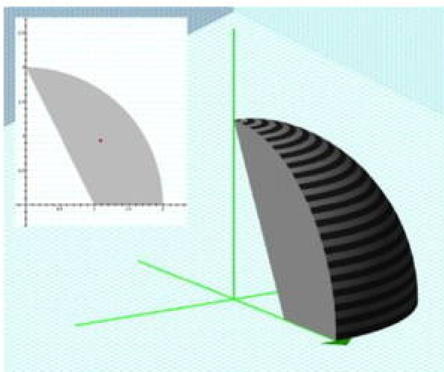
$F'(-1)=0$ (ok), $F''(-1)=-5<0 \Rightarrow P$ è di max rel. stretto

(FIGURA: anche assoluto)

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4R^2,\ 2x + y \geq 2R\}$ (ove $R > 0$).

(a) Disegnare A e trovarne il baricentro.

(b) Dire se una tra le funzioni $\frac{1}{y}$ e $\frac{1}{x}$ è integrabile su A, se sì calcolando l'integrale. (Facoltativo: più in generale discutere l'integrabilità su A di y^α e x^α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.)



(a) $\text{Area}(A) = (\pi - 1)R^2$

Poi, per y-fili (ad esempio...)

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}} \int_0^{2R} dy \int_{R-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4R^2-y^2}} x\, dx = \dots = \frac{7}{3(\pi-1)} R$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}} \int_0^{2R} y\, dy \int_{R-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4R^2-y^2}} dx = \dots = \frac{2}{\pi-1} R$$

(b) Vediamo per x^α e y^α

Non limitate (se $\alpha < 0$), ma funzioni sono positive su A $\Rightarrow$ (F+T) calcoliamo integrali iterati e vediamo...

- y^α: $\displaystyle\int_0^{2R} y^\alpha\, dy \int_{R-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4R^2-y^2}} dx = \int_0^{2R} y^\alpha \left(\sqrt{4R^2-y^2} - (R - \tfrac{1}{2}y)\right) dy$ $\quad \sim_0 R y^\alpha \sim_0^{*} y^\alpha$

  Integrabile $\Leftrightarrow$ $\alpha > -1$

- Per x^α: $\displaystyle\int_0^{2R} dy \int_{R-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4R^2-y^2}} x^\alpha\, dx$. Distinguiamo $\alpha = -1$ e $\alpha \neq -1$ (diverse primitive per x^α).

  - Se $\alpha = -1$: $\displaystyle\int_0^{2R} \log \frac{2\sqrt{4R^2-y^2}}{2R-y}\, dy$ con problemi in $y \sim 2R$

    Posto $\eta := 2R - y$: $\displaystyle\int_0^{2R} \log \frac{2\sqrt{4R\eta-\eta^2}}{\eta}\, d\eta$ $\quad = \log\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot 2\sqrt{4R-\eta}\right) = -\frac{1}{2}\log\eta + \log\left(2\sqrt{4R-\eta}\right)$

    ok per $\eta \sim 0$ $\quad$ nessun problema

    $\int \log\eta\, d\eta = \eta(\log\eta - 1)$

    dunque converge

    (viene $4R\log 2$, dettagli in soluzione)

  - Se $\alpha \neq -1$: $\displaystyle\frac{1}{\alpha+1}\int_0^{2R} \left((4R^2-y^2)^{\frac{\alpha+1}{2}} - \left(R - \frac{y}{2}\right)^{\alpha+1} \right) :$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\int_0^{2R}\left((4R\eta-\eta^2)^{\frac{\alpha+1}{2}} - \left(\eta/2\right)^{\alpha+1}\right) d\eta$$

• se $\alpha>-1$ infinitesima (ok)
• se $\alpha<-1$: $\sim_0 -\left(\eta/2\right)^{\alpha+1} \sim_0^* \eta^{\alpha+1}$

dunque converge $\iff \alpha+1>-1 \iff \alpha>-2$

Ricapitolando, l'integrale converge $\iff \alpha>-2$

---

3. Nello spazio cartesiano tridimensionale si disegni nel piano verticale (x,z) la figura A dell'Ex. 2, e sia E il solido ottenuto ruotando A di un quarto di giro in senso antiorario attorno all'asse z.

(a) Calcolare il volume di E in due modi (con Guldino e per z-fette), e il momento d'inerzia di E rispetto all'asse z (pensando che E sia un corpo materiale omogeneo di densità costante μ).

(b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo vettoriale $F=(0,z,0)$.

(c) Verificare la formula di Stokes per il campo F e la porzione sferica S di ∂E.

(a) Guldino: $\frac{\pi}{2}\cdot x_G\cdot \text{Area}(A) = \frac{7}{6}\pi R^3$

Senno per z-fette (quarto di corona di raggi $\sqrt{4R^2-z^2}$ e $R-z/2$ con aree $\frac{\pi}{4}\left(4-z^2-(R-z/2)^2\right)$ che integrate tra 0 e $2R$ ridà $\frac{7}{6}\pi R^3$)

Momento d'inerzia: $\mu\int_E (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2} d\theta\int_A r^2\cdot r\,dr\,dz = \dots$

(b) $\vec F=(0,z,0) \Rightarrow \vec\nabla\cdot\vec F = 0$

Per i flussi: $\vec F \parallel$ asse y $\Rightarrow$ flussi nulli per base e faccia su (y,z).

Flusso per A: $\int_A F(x,0,z)\cdot(0,-1,0)\,dx\,dz = -\int_A z\,dx\,dz = -2R^3$

Flusso per C (faccia conica per finire, $\gamma(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 2(R-r))$ con normale entrante): $-\int_0^R dr\int_0^{\pi/2}\det\begin{pmatrix}0 & \cos\theta & -r\sin\theta\\ 2(R-r) & \sin\theta & r\cos\theta\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix} d\theta = \dots = -\frac{2}{3}R^3$

Flusso per S (faccia sferica anteriore, $\gamma(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} 2R\cos\theta\sin\varphi \\ 2R\sin\theta\sin\varphi \\ 2R\cos\varphi \end{pmatrix}$, entrante):

$$-\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \det \begin{pmatrix} 0 & -2R\sin\theta\sin\varphi & 2R\cos\theta\cos\varphi \\ 2R\cos\varphi & 2R\cos\theta\sin\varphi & 2R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & 0 & -2R\sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi = \dots = \frac{8}{3}R^3$$

Dunque $-2R^3 - \frac{2}{3}R^3 + \frac{8}{3}R^3 = 0$, Gauss verificato.

(c) $\vec{\nabla}\times\vec{F} = (-1, 0, 0)$

Flusso di $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ per S: come prima con $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ al posto di $\vec{F}$ (viene $-\pi R^2$).

Verso di percorrenza ∂S antiorario.

$\vec{F} \parallel$ asse y $\Rightarrow$ unico contributo a circuitazione di $\vec{F}$ viene dall'arco di circonf. su $x=0$ (param. negativa: $(0, 2R\sin\varphi, 2R\cos\varphi)$):

$$\oint_{+\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -\int_0^{\pi/2} (0, 2R\cos\varphi, 0)\cdot(0, 2R\cos\varphi, -2R\sin\varphi)\, d\varphi = -\pi R^2 \quad \text{ok}$$

---

4. Si abbia il sistema differenziale $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x \\ \dot{y} = y(1 - 2x + 2y) \end{cases}$ nell'incognita $(x(t), y(t))$.

(a) Che si può dire a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Determinare gli equilibri e un integrale primo; descrivere le traiettorie col verso di percorrenza.

(b) Determinare la soluzione con $(x(0), y(0)) = (-1, -1)$, e quella con $(x(0), y(0)) = (0, 0)$.

(a) Esistenza-unicità locale ok; globale non si sa (Cauchy-L.)

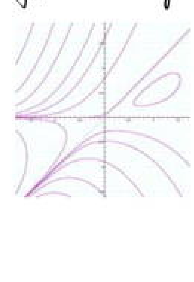
Equilibri $O(0,0)$ e $A(1, \frac{1}{2})$

Forma $\omega = y(1-2x+2y)\,dx + (x-2y)\,dy$ su $\mathbb{R}^2$ non esatta, ma

$\frac{1}{-a}\left(\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial(-a)}{\partial x}\right) = -2$ non dip. da y $\Rightarrow$ e^{-2x} fattore integrante

Primitiva di $e^{-2x}\omega$: $F(x,y) = y(x-y)e^{-2x}$

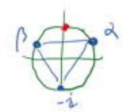
Curve di livello di F e traiettorie: vedi note.



(b) Traiettorie di soluzione con $(X(0), Y(0)) = (-1,-1)$:
semiretta $y = x$ con $x < 0$ $\left(F(-1,-1)=0, \text{ e } \cancel{y}(x-y)\cancel{e^{-2x}} = 0 \ \dots \right)$
Poiché $y = x$ si ha $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases} \Rightarrow (x(t), y(t)) = (-e^t, -e^t)$
Soluzioni con $(X(0), Y(0)) = (0,0)$: la costante $(0,0)$.

---

5. (a) Determinare tutte le funzioni $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali che $iy''' + y = 2\sin t$.
(b) Descrivere il sistema del I ordine equivalente all'equazione data, ed esibirne una risolvente.



(a) $y''' - iy = -2i \sin t$.

Radici caratt. $\lambda^3 = i \Rightarrow \lambda_1 = -i, \ \lambda_2 = \alpha = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \ \lambda_3 = \beta = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$.

Sistema fondamentale $\varphi_1(t) = e^{-it}, \ \varphi_2(t) = e^{\alpha t}, \ \varphi_3(t) = e^{\beta t}$

$b(t) = -2i \sin t = e^{-it} - e^{it} \Rightarrow$ soluz. part. $\tilde{\varphi}(t) = ute^{-it} + ve^{it}$:
imponendo che $\tilde{\varphi}''' - i\tilde{\varphi} = e^{-it} - e^{it}$ si ha $u = -\frac{1}{3}, \ v = -\frac{1}{2}i$

Soluz. generale $y(t) = \left(A - \frac{1}{3}t\right)e^{-it} + Be^{\alpha t} + Ce^{\beta t} - \frac{1}{2}ie^{it}$ (con $A, B, C \in \mathbb{C}$)

(b) $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \rightsquigarrow \dot{z} = Az + B$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2i\sin t \end{pmatrix}$

Risolvente $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \varphi_3(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \varphi_3'(t) \\ \varphi_1''(t) & \varphi_2''(t) & \varphi_3''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-it} & e^{\alpha t} & e^{\beta t} \\ -ie^{-it} & \alpha e^{\alpha t} & \beta e^{\beta t} \\ -e^{-it} & \alpha^2 e^{\alpha t} & \beta^2 e^{\beta t} \end{pmatrix}$

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

TEST n. 1 di Esame Scritto (12-13/12/2024)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2024/25

1. Nel piano cartesiano sia X la parabola dei punti equidistanti dalla retta $2x-y=0$ e dal punto $(-2,1)$.

(a) Determinare una forma cartesiana per X, e una parametrizzazione locale nel suo punto $A(-1,3)$. Calcolare poi in due modi lo spazio tangente affine a X in A.

(b) Calcolare eventuali estremanti per $f(x,y)=x-3y$ su X, spiegando graficamente i risultati.

2. Nel piano cartesiano sia $A=\{(x,y): x\geq 0,\, y\geq 0,\, x^2+y^2\leq 4R^2,\, 2x+y\geq 2R\}$ (ove $R>0$).

(a) Disegnare A e trovarne il baricentro.

(b) Dire se una tra le funzioni $\frac{1}{y}$ e $\frac{1}{x}$ è integrabile su A, se sì calcolando l'integrale. (Facoltativo: più in generale discutere l'integrabilità su A di y^α e x^α al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.)

3. Nello spazio cartesiano tridimensionale si disegni nel piano verticale (x,z) la figura A dell'Ex. 2, e sia E il solido ottenuto ruotando A di un quarto di giro in senso antiorario attorno all'asse z.

(a) Calcolare il volume di E in due modi (con Guldino e per z-fette), e il momento d'inerzia di E rispetto all'asse z (pensando che E sia un corpo materiale omogeneo di densità costante μ).

(b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo vettoriale $F=(0,z,0)$.

(c) Verificare la formula di Stokes per il campo F e la porzione sferica S di ∂E.

4. Si abbia il sistema differenziale $\begin{cases} \dot{x}=2y-x \\ \dot{y}=y(1-2x+2y) \end{cases}$ nell'incognita $(x(t),y(t))$.

(a) Che si può dire a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Determinare gli equilibri e un integrale primo; descrivere le traiettorie col verso di percorrenza.

(b) Determinare la soluzione con $(x(0),y(0))=(-1,-1)$, e quella con $(x(0),y(0))=(0,0)$.

5. (a) Determinare tutte le funzioni $y:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ tali che $iy'''+y=2\sin t$.

(b) Descrivere il sistema del I ordine equivalente all'equazione data, ed esibirne una risolvente.

Analisi Matematica III – TEST n. 1 di Esame Scritto (12-13/12/2024) Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) L'equidistanza di un punto (x,y) dalla retta $2x-y=0$ (direttrice) e dal punto $(-2,1)$ (fuoco) si scrive come $\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}|2x-y|$, che elevata al quadrato dà la forma cartesiana $g(x,y)=x^2+4xy+4y^2+20x-10y+25=0$. Il gradiente è $\nabla g=(2x+4y+20,\,4x+8y-10)$; in $A(-1,3)$ si ha allora $\nabla g(A)=(30,10)=10(3,1)$, ed essendo ad esempio $\frac{\partial g}{\partial x}(A)=30\neq 0$, da $g(x,y)=0$ si può esplicitare localmente $x(y)$ con $x(3)=-1$ e $x'(3)=-\frac{1}{3}$ (in realtà da $g(x,y)=0$ si ricava facilmente $x(y)=5\sqrt{2y+3}-2(y+5)$). Lo spazio tangente affine a X in A si calcola come $\nabla g(A)\cdot(x+1,y-3)=0$ oppure come $x=-1-\frac{1}{3}(y-3)$, dando in entrambi i casi la retta $3x+y=0$.

(b) Il metodo di Lagrange dice che rango$\begin{pmatrix}\nabla g\\ \nabla f\end{pmatrix}<2$, ovvero det$\begin{pmatrix}2(x+2y+10) & 2(2x+4y-5)\\ 1 & -3\end{pmatrix}=0$, ovvero $x+2y=-5$, che messo in sistema con $g(x,y)=0$ dà l'unico punto stazionario $P(-3,-1)$ per f su X. Si ha $\nabla g(P)=(10,-30)=10(1,-3)$, ed essendo ad esempio $\frac{\partial g}{\partial x}(P)=10\neq 0$, da $g(x,y)=0$ si può esplicitare localmente $x(y)$ con $x(-1)=-3$ e $x'(-1)=3$; ma per capire il carattere del punto stazionario P ci servirà anche $x''(-1)$. Derivando $g(x(y),y)\equiv 0$ rispetto y si ottiene $2xx'+4x'y+4x+8y+20x'-10=0$ (da cui per $y=-1$ si ha $-6x'(-1)-4x'(-1)-12-8+20x'(-1)-10=0$, ovvero $x'(-1)=3$ come già noto); derivando ancora si ha $2(x')^2+2xx''+4x''y+4x'+4x'+8+20x''=0$ (da cui per $y=-1$ si ha $18-6x''(-1)-4x''(-1)+24+8+20x''(-1)=0$, ovvero $x''(-1)=-5$). Posto allora $F(y)=f(x(y),y)=x(y)-3y$ si ha $F'(y)=x'(y)-3$ (da cui $F'(-1)=0$, come atteso), e $F''(y)=x''(y)$ (da cui $F''(-1)=-5<0$). Questo ci dice che P è un punto di massimo per f, come d'altra parte appare evidente dall'esame grafico in Figura 1 (addirittura un punto di massimo assoluto stretto).

2. (a) (Figura 2) La figura piana $A=\{(x,y):x,y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 4R^2,\ 2x+y\geq 2R\}$ è la differenza tra un quarto di cerchio di raggio $2R$ e un triangolo rettangolo di cateti R e $2R$, dunque ha area $(\pi-1)R^2$. Integrando poi ad esempio per y-fili si ha $\int_A x\,dx\,dy=\int_0^{2R}dy\int_{R-\frac12 y}^{\sqrt{4R^2-y^2}}x\,dx=\int_0^{2R}(\frac12 x^2]_{R-\frac12 y}^{\sqrt{4R^2-y^2}}\,dy=\frac12\int_0^{2R}(4R^2-y^2-(R-\frac12 y)^2)\,dy=\frac12\int_0^{2R}(3R^2+y-\frac54 y^2)\,dy=(3R^2y+\frac12 y^2-\frac{5}{12}y^3]_0^{2R}=\frac73 R^3$ e $\int_A y\,dx\,dy=\int_0^{2R}y\,dy\int_{R-\frac12 y}^{\sqrt{4R^2-y^2}}dx=\int_0^{2R}y(\sqrt{4R^2-y^2}-(R-\frac12 y))\,dy=(-\frac13(4R^2-y^2)^{\frac32}-\frac12 Ry^2+\frac16 y^3]_0^{2R}=(-2R^3+\frac43 R^3)-(-\frac83 R^3)=2R^3$, da cui il baricentro risulta $(x_G,y_G)=\frac{1}{\text{Area }A}(\int_A x\,dx\,dy,\int_A y\,dx\,dy)=(\frac{7}{3(\pi-1)}R,\ \frac{2}{\pi-1}R)$.

(b) Per quanto possibile ragioniamo da subito per nel caso di y^α e x^α con esponente $\alpha\in\mathbb{R}$ qualsiasi. L'insieme A è compatto, e se $\alpha\geq 0$ le funzioni x^α e y^α sono continue su A e dunque integrabili su A. Invece nel caso $\alpha<0$ esse non sono limitate su A; tuttavia, essendo positive su A, per Tonelli e Fubini basterà calcolare un integrale iterato e osservare cosa succede. • L'integrale $\int_A y^\alpha\,dx\,dy$ è finito se e solo se lo è l'integrale iterato $\int_0^{2R}y^\alpha\,dy\int_{R-\frac12 y}^{\sqrt{4R^2-y^2}}dx=\int_0^{2R}y^\alpha(\sqrt{4R^2-y^2}-(R-\frac12 y))\,dy$: l'unico eventuale problema di integrabilità si ha per $y\sim 0$, dove la funzione integranda è $\sim_0 Ry^\alpha\sim_0^* y^\alpha$, dunque la condizione è $\alpha>-1$. In particolare, la funzione $\frac1y=y^{-1}$ non è integrabile su A. • L'integrale $\int_A x^\alpha\,dx\,dy$ è finito se e solo se lo è l'integrale iterato $\int_0^{2R}dy\int_{R-\frac12 y}^{\sqrt{4R^2-y^2}}x^\alpha\,dx$, e in questo caso è necessario distinguere il caso $\alpha=-1$ dagli altri. Nel caso $\alpha=-1$ si ha $\int_0^{2R}dy\int_{R-\frac12 y}^{\sqrt{4R^2-y^2}}\frac1x\,dx=\int_0^{2R}(\log x]_{R-\frac12 y}^{\sqrt{4R^2-y^2}}\,dy=\int_0^{2R}\log\frac{2\sqrt{4R^2-y^2}}{2R-y}\,dy$; visto che l'unico eventuale problema di integrabilità si ha per $y\sim 2R$ converrà porre $\eta=2R-y$, ottenendo $\int_0^{2R}\log\frac{2\sqrt{4R\eta-\eta^2}}{\eta}\,d\eta=\int_0^{2R}(\log(2\sqrt{4R\eta-\eta^2})-\log\eta)\,d\eta=\int_0^{2R}(\log 2+\frac12\log((4R-\eta)\eta)-\log\eta)\,d\eta=\int_0^{2R}(\log 2+\frac12\log(4R-\eta)-\frac12\log\eta)\,d\eta=(\eta\log 2-\frac12(4R-\eta)(\log(4R-\eta)-1)-\frac12\eta(\log\eta-1)]_0^{2R}=(2R\log 2-2R(\log(2R)-1))-(-2R(\log(4R)-1))=4R\log 2$, finito. Nel caso generale si ha invece $\int_0^{2R}dy\int_{R-\frac12 y}^{\sqrt{4R^2-y^2}}x^\alpha\,dx=\frac{1}{\alpha+1}\int_0^{2R}(x^{\alpha+1}]_{R-\frac12 y}^{\sqrt{4R^2-y^2}}\,dy=\frac{1}{\alpha+1}\int_0^{2R}((4R^2-y^2)^{\frac12(\alpha+1)}-(R-\frac12 y)^{\alpha+1})\,dy=\frac{1}{\alpha+1}\int_0^{2R}((4R\eta-\eta^2)^{\frac12(\alpha+1)}-(\frac12\eta)^{\alpha+1})\,d\eta$: se $\alpha+1>0$ (ovvero se $\alpha>-1$) la funzione integranda è infinitesima in $\eta\sim 0$ e dunque è integrabile, mentre se $\alpha+1<0$ (ovvero se $\alpha<-1$) essa è $\sim_0 -(\frac12\eta)^{\alpha+1}\sim_0^*\eta^{\alpha+1}$, da cui la condizione $\alpha+1>-1$, ovvero $\alpha>-2$. Concludendo, la funzione x^α è integrabile su A se e solo se $\alpha>-2$.

3. (a) (Figura 2) Per il volume di E, ricordando quanto ottenuto nell'Ex. 2 la formula di Guldino dà $\frac{\pi}{2}\cdot x_G\cdot\text{Area }A=\frac76\pi R^3$. Altrimenti, per $z\in[0,2R]$ la z-fetta di E è il quarto di corona circolare di raggi $\sqrt{4-z^2}$ e $R-\frac12 z$ che ha area $\frac14\pi(4-z^2-(R-\frac12 z)^2)=\frac14\pi(3R^2+z-\frac54 z^2)$, che integrata tra 0 e $2R$ dà nuovamente $\frac76\pi R^3$. • Il momento d'inerzia di E rispetto all'asse z è dato da $\mu\int_E(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, che in coordinate cilindriche diventa $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_A r^2\,r\,dr\,dz=\frac{\pi}{2}\mu\int_0^{2R}dz\int_{R-\frac12 z}^{\sqrt{4R^2-z^2}}r^3\,dr=\frac{\pi}{8}\mu\int_0^{2R}((4R^2-z^2)^2-(R-\frac12 z)^4)\,dz=\frac{\pi}{8}\mu\int_0^{2R}(\frac{15}{16}z^4+\frac12 Rz^3-\frac{19}{2}R^2z^2+2R^3z+15R^4)\,dz=\frac{\pi}{8}\mu(\frac{3}{16}z^5+\frac18 Rz^4-\frac{19}{6}R^2z^3+R^3z^2+15R^4z]_0^{2R}=\frac{25\pi}{12}\mu R^5$ (si ricordi che la densità μ è espressa in kg/m^3, dunque il risultato — espresso in kg·m^2 — è dimensionalmente corretto).

(b) Il campo $F=(0,z,0)$ ha divergenza nulla, dunque per il teorema di Gauss il flusso totale uscente dalla superficie esterna ∂E è nullo. D'altra parte F è un campo parallelo all'asse y, e dunque i suoi flussi attraverso la base di E e la faccia di E sul piano (y,z) sono pure nulli. Restano da calcolare i flussi di F attraverso A, la faccia sferica S e la faccia conica posteriore C. • La normale uscente da E su A è $-e_2 = (0,-1,0)$, dunque il flusso di F uscente da A è $\int_A F(x,0,z)\cdot(0,-1,0)\,dx\,dz = -\int_A z\,dx\,dz = -2R^3$. • La faccia conica posteriore C si parametrizza in coordinate cilindriche (r,θ) come $(r\cos\theta, r\sin\theta, 2(R-r))$ con $0 \le r \le R$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (la normale associata è quella entrante in E), dunque il flusso di F uscente da C si calcola come $-\int_0^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det\begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & -r\sin\theta \\ 2(R-r) & \sin\theta & r\cos\theta \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} d\theta = -4\int_0^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r(R-r)\sin\theta\,d\theta = -4(\frac{1}{2}Rr^2 - \frac{1}{3}r^3]_0^R\,(-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}R^3$. • Infine, la faccia sferica S si lascia parametrizzare in coordinate sferiche (θ,φ) come $(2R\cos\theta\sin\varphi,\ 2R\sin\theta\sin\varphi,\ 2R\cos\varphi)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (anche in questo caso la normale associata è quella entrante in E), dunque il flusso di F uscente da S è $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det\begin{pmatrix} 0 & -2R\sin\theta\sin\varphi & 2R\cos\theta\cos\varphi \\ 2R\cos\varphi & 2R\cos\theta\sin\varphi & 2R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & 0 & -2R\sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi = 8R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = 8R^3(-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\,(\frac{1}{3}\sin^3\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}R^3$. Come si vede, la somma dei flussi uscenti da E attraverso A, C e S è nulla, e ciò verifica il teorema il Gauss.

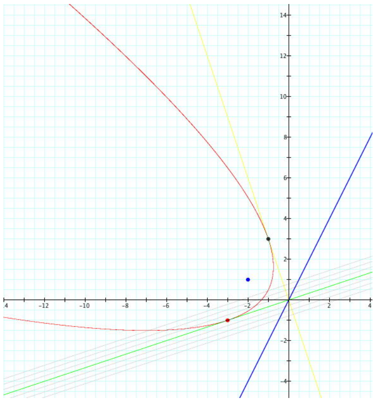
(c) Il campo $F = (0,z,0)$ ha rotore $\nabla\times F = (-1,0,0)$, e il flusso di quest'ultimo attraverso S (scegliendo ancora come in precedenza come positiva la normale uscente da E) è dato da $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det\begin{pmatrix} -1 & -2R\sin\theta\sin\varphi & 2R\cos\theta\cos\varphi \\ 0 & 2R\cos\theta\sin\varphi & 2R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & 0 & -2R\sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi = -4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,d\varphi = -4R^2(\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\,(\frac{1}{2}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\pi R^2$. • Il verso di percorrenza del bordo ∂S associato alla scelta fatta di normale positiva per S è quello antiorario. Poiché come detto F è parallelo all'asse y e nullo sul piano orizzontale, l'unico contributo alla circuitazione di F lungo ∂S è quello lungo l'arco di circonferenza sul piano $x=0$, parametrizzato (negativamente) da $(0, 2R\sin\varphi, 2R\cos\varphi)$ con $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$: abbiamo così $\oint_{+\partial S} F\cdot d\ell = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, 2R\cos\varphi, 0)\cdot(0, 2R\cos\varphi, -2R\sin\varphi)\,d\varphi = -4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi = -4R^2(\frac{1}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\pi R^2$, come già trovato in precedenza. Ciò verifica la formula di Stokes.

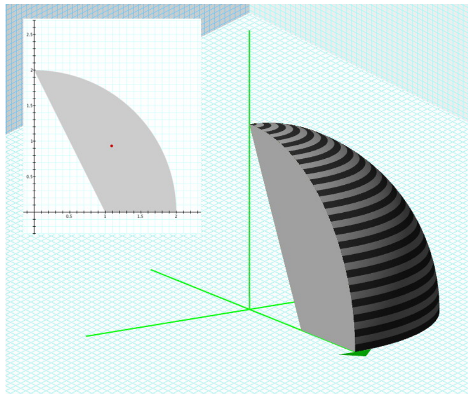
4. (a) (Figura 3) Il sistema $\begin{cases} \dot{x} = a(x,y) = 2y - x \\ \dot{y} = y(1-2x+2y) \end{cases}$ ha esistenza e unicità locale per ogni dato di Cauchy, perché il secondo membro è una funzione $\mathcal{C}^1$; nulla si può invece affermare riguardo l'esistenza globale, perché il relativo teorema non è applicabile visto che la crescita non è sublineare in y (attenzione: ricordare che i teoremi di Cauchy-Lipschitz danno condizioni solo sufficienti, dunque è errato affermare ora che non ci può essere esistenza globale su $\mathbb{R}$!). Gli equilibri sono le soluzioni del sistema $a = b = 0$, che dà i due punti $O(0,0)$ e $A(1,\frac{1}{2})$. • Per un integrale primo del sistema, vediamo se la forma $b\,dx - a\,dy = y(1-2x+2y)\,dx + (x-2y)\,dy$ è esatta (ovvero se è chiusa, visto che è definita su tutto il piano, semplicemente connesso): ma così non è perché $\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial(-a)}{\partial x} = -2x+4y \ne 0$. Tuttavia, osservato che $\frac{1}{-a}(\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial(-a)}{\partial x}) = -2$ non dipende da y possiamo concludere che $e^{\int(-2)\,dx} = e^{-2x}$ è un fattore integrante, da cui una primitiva $F(x,y)$ della forma esatta $y(1-2x+2y)e^{-2x}\,dx + (x-2y)e^{-2x}\,dy$ sarà l'integrale primo desiderato: da $\frac{\partial F}{\partial y} = (x-2y)e^{-2x}$ si ottiene $F(x,y) = (xy-y^2)e^{-2x} + \varphi(x)$, dunque da $\frac{\partial F}{\partial x} = y(1-2x+2y)e^{-2x} + \varphi'(x) = y(1-2x+2y)e^{-2x}$ abbiamo $\varphi'(x) = 0$, perciò $\varphi(x)$ può essere scelta nulla. Si ha così $F(x,y) = (xy-y^2)e^{-2x} = y(x-y)e^{-2x}$, e le curve integrali del sistema sono le componenti connesse delle curve di livello $F(x,y) = k$ per $k \in \mathbb{R}$, cioè $y(x-y) = ke^{2x}$. Per $k = 0$ si ottiene $y(x-y) = 0$, ovvero l'unione dell'asse x con la bisettrice $y = x$ (che dà luogo a cinque traiettorie, ovvero l'equilibrio O e le quattro semirette restanti). Invece per $k \ne 0$ si ottengono i grafici $y = \frac{1}{2}(x \pm \sqrt{x^2 - 4ke^{2x}})$, che se $k \le 0$ sono definiti per ogni x; invece se $k > \frac{1}{4}e^{-2}$ le funzioni x^2 e $4ke^{2x}$ si intersecano in un solo punto $x_k < 0$ e dunque il dominio è $]-\infty, x_k]$, mentre per $0 < k \le \frac{1}{4}e^{-2}$ si intersecano in tre punti $x_k < 0$ e $x_k', x_k'' > 0$, e il dominio risulta $]-\infty, x_k] \cup [x_k', x_k'']$. Il verso di percorrenza di queste traiettorie è facilmente osservabile da $\dot{x} = 2y - x$, ovvero sarà quello delle x decrescenti (risp. crescenti) nella zona $y \lessgtr \frac{1}{2}x$.

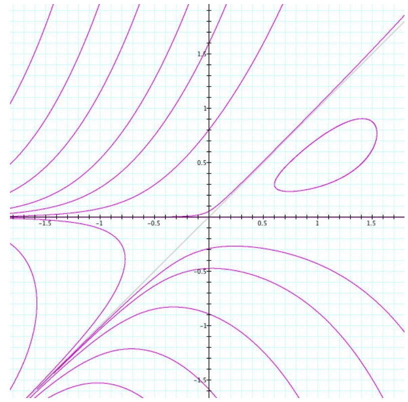
(b) La soluzione con $(x(0), y(0)) = (-1,-1)$ ha come traiettoria la semiretta $y = x$ con $x < 0$: inserendo questa informazione nel sistema differenziale si ottiene $\dot{x} = x$ e $\dot{y} = y$, che tenuto conto della condizione iniziale dà $(x(t), y(t)) = (-e^t, -e^t)$. • Invece il dato iniziale $(x(0), y(0)) = (0,0)$ è un equilibrio, dunque in esso si ha la soluzione costante $(x(t), y(t)) \equiv (0,0)$.

5. (a) Dividendo per i si ottiene $y''' - iy = -2i\sin t$. L'equazione caratteristica $\lambda^3 - i = 0$ ha radici $\alpha = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $\beta = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ e $-i$, dunque una sistema fondamentale di soluzioni dell'omogenea è dato da $\varphi_1(t) = e^{-it}$, $\varphi_2(t) = e^{\alpha t}$ e $\varphi_2(t) = e^{\beta t}$. • Si ha $b(t) = -2i\sin t = e^{-it} - e^{it}$, dunque una soluzione particolare sarà del tipo $\tilde{\varphi}(t) = ute^{-it} + ve^{it}$: derivando si ha $\tilde{\varphi}'(t) = u(1-it)e^{-it} + ive^{it}$, $\tilde{\varphi}''(t) = u(-2i-t)e^{-it} - ve^{it}$ e $\tilde{\varphi}'''(t) = u(-3+it)e^{-it} - ive^{it}$, e perciò la condizione $\tilde{\varphi}'''(t) - i\tilde{\varphi}(t) = e^{-it} - e^{it}$ dà $u(-3+it)e^{-it} - ive^{it} - i(ute^{-it} + ve^{it}) = -3ue^{-it} - 2ive^{it} = e^{-it} - e^{it}$, da cui $(u,v) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}i)$. • La soluzione generale è allora $y(t) = A\,e^{-it} + B\,e^{\alpha t} + C\,e^{\beta t} - \frac{1}{3}te^{-it} - \frac{1}{2}ie^{it}$ per $A,B,C \in \mathbb{C}$.

(b) Posto $Z = (z_1, z_2, z_3) = (y, y', y'')$ il sistema del I ordine equivalente all'equazione data è $\dot{Z} = AZ + B$, ove $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2i\sin t \end{pmatrix}$; e una risolvente è data da $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \varphi_3(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \varphi_3'(t) \\ \varphi_1''(t) & \varphi_2''(t) & \varphi_3''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-it} & e^{\alpha t} & e^{\beta t} \\ -i\,e^{-it} & \alpha\,e^{\alpha t} & \beta\,e^{\beta t} \\ -e^{-it} & \alpha^2\,e^{\alpha t} & \beta^2\,e^{\beta t} \end{pmatrix}$.







1. Ex. 1. **2.** Exx. 2-3. **3.** Ex. 4.