

# TEST 2 ESAME SCRITTO

1. Sia  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da  $g(x, y, z) = (x^2 + 2z^2 + 2x, 3xz - 2y)$ , e si considerino gli insiemi  $X_{\alpha, \beta} = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = (\alpha, \beta)\}$  e  $X = X_{1,1}$ , e il punto  $A(-1, 1, -1) \in X$ .

- Quali degli insiemi  $X_{\alpha, \beta}$  sono varietà regolari? Di che dimensione? Calcolare poi  $T_A X$ .
- Provare che  $X$  è una varietà compatta, e trovarne una parametrizzazione.
- Determinare in due modi i punti più in alto e più in basso di  $X$ .

$$(a) J_g(P) = \begin{pmatrix} 2(x+1) & 0 & 4z \\ 3z & -2 & 3x \end{pmatrix}; \text{rk} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+1) = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P_u(-1, u, 0)$$

$$g(P_u) = (-1, -2u) \Rightarrow X_{\alpha, \beta} \text{ curva regolare tranne } X_{-1, \beta} \text{ in } P(-1, -\frac{1}{2}\beta, 0)$$

$$X := X_{1,1} \text{ regolare; in } A(-1, 1, -1) \text{ i } T_A X = \text{Ker } dg_A = \begin{cases} z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$(\vec{v} = (2, -3, 0))$$

$$\text{Sp. Tg. a H in } \begin{cases} z = -1 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$

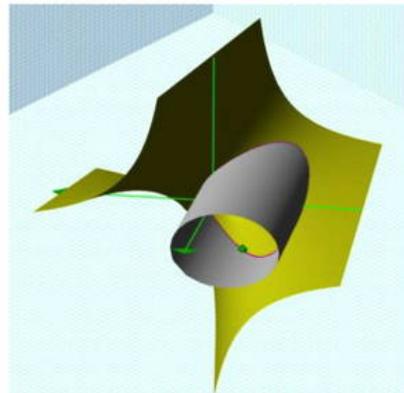
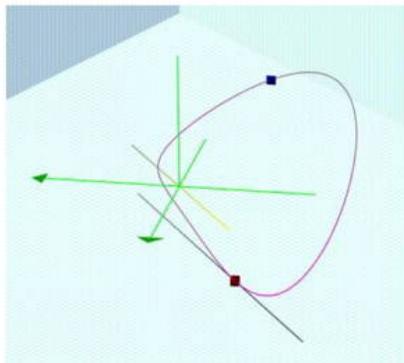
$$(b) X = \begin{cases} x^2 + 2z^2 + 2x = 1 \\ 3xz - 2y = 1 \end{cases} \text{ e' chiusa}$$

$$1^a \text{ eq. : } (x+1)^2 + 2z^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z^2}{1^2} = 1 \text{ (ellisse)}$$

$$\text{Dopo } |x+1| \leq \sqrt{2}, |z| \leq 1 \Rightarrow y = \frac{3xz-1}{2} \text{ pure limit. Sc.}$$

$$\text{Param. } (x, z) = (-1 + \sqrt{2} \cos \psi, \sin \psi) \quad (0 < \psi < 2\pi)$$

$$\Rightarrow \gamma(\psi) = (-1 + \sqrt{2} \cos \psi, \frac{3 \sin \psi (\sqrt{2} \cos \psi - 1)}{2}, \sin \psi)$$



(c)  $f(x, y, z) = z$ , si può fare con Lagrange o con  $\gamma(\psi)$  (dettagli nelle note)

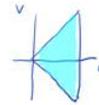
2. Si consideri l'integrale  $\int_T f(x,y) dx dy$ , ove  $f(x,y) = (x+y)^{-\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$  e  $T$  è il triangolo di vertici  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  e  $(1,0)$ .

- (a) Applicare all'integrale il cambio di variabile  $(u,v) = (x+y, x-y)$ , disegnando il nuovo insieme d'integrazione  $E$ .  
 (b) Supponendo di sapere che  $f \in L^1(T)$ , calcolare l'integrale.  
 (c) Dimostrare che  $f \in L^1(T)$ .

(a)  $(u,v) = (x+y, x-y) \Rightarrow (x,y) = \phi(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$

$J_\phi = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}; \det J_\phi = -\frac{1}{2} \neq 0.$

$T = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$    $\Rightarrow$



$E = \phi^{-1}(T) = \left\{0 \leq \frac{u+v}{2} \leq 1, 0 \leq \frac{u-v}{2} \leq 1 - \frac{u+v}{2}\right\} = \{-u \leq v \leq 2-u, v \leq u, u \leq 1\}$

(b)  $f \in L^1(T) \Leftrightarrow (f \circ \phi) \cdot |\det J_\phi| \in L^1(E).$

Supponendo, applica Fubini:

$$\int_{u=0}^{u=1} du \int_{v=-u}^{v=u} u^{-3/2} \cos\left(\frac{v}{u}\right) \cdot \frac{1}{2} dv = \frac{1}{2} \int_{u=0}^{u=1} u^{-3/2} \left( u \sin\left(\frac{v}{u}\right) \right)_{v=-u}^{v=u} du$$

$$= (\sin 1) \int_0^1 u^{-1/2} du = (\sin 1) \cdot (2\sqrt{u}) \Big|_0^1 = 2 \sin 1$$

(c) Notiamo che  $(f \circ \phi) \cdot |\det J_\phi|$  è  $> 0$  su  $E$

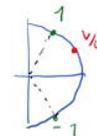
$\left( \begin{cases} u \geq 0 \\ -u \leq v \leq u \end{cases} \Rightarrow -1 \leq \frac{v}{u} \leq 1 \Rightarrow \cos 1 \leq \cos\left(\frac{v}{u}\right) \leq 1 \right)$

Dunque per F+T si può calcolare un integrale iterato

e vedere cosa succede....

ma l'abbiamo già fatto in (b), e viene finito!

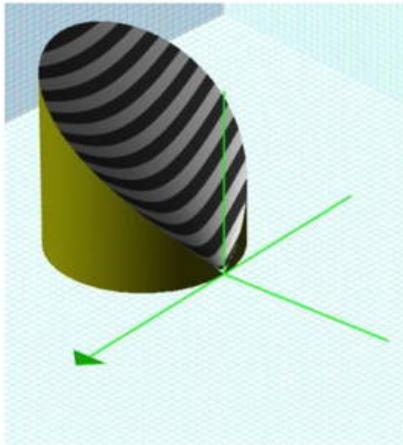
Dunque è integrabile.



3. Si disegni il solido  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ .

- (a) Determinare volume e baricentro geometrico di  $D$ .  
 (b) Calcolare il flusso totale di  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  uscente da  $\partial D$  e attraverso le singole porzioni  $A$  (sul piano  $z=0$ ),  $L$  (sulla superficie  $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ ) e  $B$  (la rimanente).  
 (c) Trovare il flusso di  $G(x, y, z) = (x-1, y, 0)$  uscente da  $L$ , e l'area di  $L$  (relazione tra i due?).  
 (d) Verificare la formula di Stokes per la superficie  $B$  e il campo  $H(x, y, z) = (x-z, 2z, x-y)$ .

(a)  $D$  è parte interna al cilindro verticale di base 



che sta sotto al cono  $z=r$

In coord. cilindriche  $(r, \theta, z)$ :

$$D = \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, 0 \leq z \leq r \right\}$$

*( $r \cos \theta - 1$ )<sup>2</sup> +  $r^2 \sin^2 \theta \leq 1$   
 $r^2 - 2r \cos \theta + 1 \leq 1$*

$$\text{Vol}(D) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} dr \int_0^r r dz = \frac{32}{9}$$

Baricentro:  $y_G = 0$ ;  $x_G$  e  $z_G$  v. note

(b) *(campo radiale)*  
 $F = (x, y, z)$ ,  $\nabla \cdot F = 3 \Rightarrow$  (Gauss)  $\phi_{\partial D}(F) = 3 \text{Vol}(D) = \frac{32}{3}$   
 $F$  parallela a  $A$  e  $B \Rightarrow \phi_A(F) = \phi_B(F) = 0 \Rightarrow \phi_L(F) = \phi_{\partial D}(F) = \frac{32}{3}$   
 Senni:  $L = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \mid r = 2 \cos \theta\} = \{(2 \cos^2 \theta, 2 \sin \theta \cos \theta, z)\}$   
 con  $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq z \leq r = 2 \cos \theta$ , e consumo ante di flusso v. di  $\frac{32}{3}$ .

(c) Campo  $G = (x-1, y, 0)$  e' vettore normale uscente a  $L$   
 $\Rightarrow \int_L \vec{G} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_L \vec{n} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_L d\sigma = \text{Area}(L)$ .

E il calcolo di flusso con la parametr. d'è sopra d'è 8.

(d)  $B = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \mid z=r\} = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, r)\}$

con  $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq r \leq 2 \cos \theta$ .

$H = (x-z, 2z, x-y) \Rightarrow \nabla \times H = (-3, -2, 0)$

e si calcola  $\oint_B (\nabla \times \mathbf{H}) = 8$ .

D'altra parte

$$\partial B = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \mid (r, z) = (2 \cos \theta, 2 \cos \theta) \right\} = \left\{ (2 \cos^2 \theta, 2 \sin \theta \cos \theta, 2 \cos \theta) \right\}$$

e il cont. dà  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 8$ . (dettagli nelle note)

4. Si consideri l'equazione differenziale  $y' = \frac{\sin^2 y}{1+t^2}$  nella funzione incognita  $y(t)$ .

- (a) Spiegare perché ha senso parlare di soluzioni massimali, e dire se sono definite su tutto  $\mathbb{R}$ . Trovare le soluzioni costanti, e mostrare che quelle non costanti sono strettamente monotone.  
 (b) Dato  $y_0 \in ]0, \pi[$ , sia  $\varphi(t)$  la soluzione con  $\varphi(0) = y_0$ . Mostrare che i  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi(t)$  esistono finiti.  
 (c) Determinare esplicitamente  $\varphi(t)$ . Per quali  $y_0$  si ha  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \pi$ , oppure  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = 0$ ?

(a)  $f(t, y) = \frac{\sin^2 y}{1+t^2}$  è  $\mathcal{C}^1$  su  $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$  almeno vale  $\exists!$  local e unica sol. globale

Inoltre  $\frac{\partial f}{\partial y}$  limitata  $\Rightarrow \exists$  globale

Però soluzioni massimali avranno dominio  $\mathbb{R}$ .

Costante  $y = 2$  soluzione  $\Leftrightarrow 2 = k\pi$

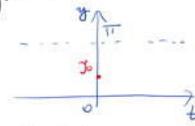
Dunque le altre soluzioni saranno s.t.c. asint. in una sfera orizz. .

(b)  $\varphi(t)$  è s.t.c. asint. e con valori in  $]0, \pi[ \Rightarrow$  limiti finiti

(c)  $\frac{1}{\sin^2 y} dy = \frac{1}{1+t^2} dt \Rightarrow (-\cot y) \Big|_{y_0}^y = (\arctan t) \Big|_0^t \Rightarrow$

$-\cot y \varphi(t) + \cot y y_0 = \arctan t \Rightarrow \varphi(t) = \arccot \left( \cot y y_0 - \arctan t \right)$

$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi(t) = \arccot \left( \cot y y_0 \mp \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \nexists y_0$  t.c.  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = 0$  oppure  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \pi$ .



5. Siano  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$  e  $b(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ t-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ove  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; e si ponga  $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ .

- (a) Determinare  $e^{tA}$ , e risolvere il problema di Cauchy dato da  $Y' = AY$  e  $Y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .  
 (b) Trovare tutte le soluzioni del sistema differenziale  $Y' = AY + b(t)$ .

(a) Per  $A$  si chiama che  $\langle \vec{e}_2 \rangle$  e  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle$  sono invarianti dunque auto di  $e^{tA}$  indipendenti per  $e^{tA}$ .

- Per  $\langle \vec{e}_2 \rangle$ :  $e^{\alpha t}$
- Per  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle$ :  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  auto. vale doppio  $-1$   
 $\Rightarrow \tilde{N} = \tilde{A} - (-1)I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$  nilpotent  
 $\Rightarrow e^{t\tilde{A}} = e^{-t}(I + t\tilde{N}) = \begin{pmatrix} (1+2t)e^{-t} & -2te^{-t} \\ 2te^{-t} & (1-2t)e^{-t} \end{pmatrix}$   
 $\Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} (1+2t)e^{-t} & 0 & -2te^{-t} \\ 0 & e^{\alpha t} & 0 \\ 2te^{-t} & 0 & (1-2t)e^{-t} \end{pmatrix}$

Dunque soluzione del pb. di Cauchy  $\leftarrow Y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $e^{tA} \cdot Y(0)$ .

(b) Anche qui trattiamo separatamente per  $\langle \vec{e}_2 \rangle$  e  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle$ .

- Su  $\langle \vec{e}_2 \rangle$ :  $y' = \alpha y + t - 1 \Rightarrow y(t) = \begin{cases} Ke^{\alpha t} - \frac{2t-2-1}{\alpha^2} & (\alpha \neq 0) \\ \frac{1}{2}t^2 - t + K & (\alpha = 0) \end{cases}$

- Su  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle$ : poiché  $1$  non è auto. val. di  $\tilde{A}$  c'è soluzioni particolari  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} e^t$  e li trov.  $u=2, v=1$

Per i dettagli vedere le note.

# Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

## TEST n. 2 di Esame Scritto (20/12/2024)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2024/25

- Sia  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da  $g(x, y, z) = (x^2 + 2z^2 + 2x, 3xz - 2y)$ , e si considerino gli insiemi  $X_{\alpha, \beta} = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = (\alpha, \beta)\}$  e  $X = X_{1,1}$ , e il punto  $A(-1, 1, -1) \in X$ .
  - Quali degli insiemi  $X_{\alpha, \beta}$  sono varietà regolari? Di che dimensione? Calcolare poi  $T_A X$ .
  - Provare che  $X$  è una varietà compatta, e trovarne una parametrizzazione.
  - Determinare in due modi i punti più in alto e più in basso di  $X$ .
- Si consideri l'integrale  $\int_T f(x, y) dx dy$ , ove  $f(x, y) = (x + y)^{-\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$  e  $T$  è il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ .
  - Applicare all'integrale il cambio di variabile  $(u, v) = (x + y, x - y)$ , disegnando il nuovo insieme d'integrazione  $E$ .
  - Supponendo di sapere che  $f \in L^1(T)$ , calcolare l'integrale.
  - Dimostrare che  $f \in L^1(T)$ .
- Si disegni il solido  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ .
  - Determinare volume e baricentro geometrico di  $D$ .
  - Calcolare il flusso totale di  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  uscente da  $\partial D$  e attraverso le singole porzioni  $A$  (sul piano  $z = 0$ ),  $L$  (sulla superficie  $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ ) e  $B$  (la rimanente).
  - Trovare il flusso di  $G(x, y, z) = (x - 1, y, 0)$  uscente da  $L$ , e l'area di  $L$  (relazione tra i due?).
  - Verificare la formula di Stokes per la superficie  $B$  e il campo  $H(x, y, z) = (x - z, 2z, x - y)$ .
- Si consideri l'equazione differenziale  $y' = \frac{\sin^2 y}{1 + t^2}$  nella funzione incognita  $y(t)$ .
  - Spiegare perché ha senso parlare di soluzioni massimali, e dire se sono definite su tutto  $\mathbb{R}$ . Trovare le soluzioni costanti, e mostrare che quelle non costanti sono strettamente monotone.
  - Dato  $y_0 \in ]0, \pi[$ , sia  $\varphi(t)$  la soluzione con  $\varphi(0) = y_0$ . Mostrare che i  $\lim_{t \rightarrow \mp\infty} \varphi(t)$  esistono finiti.
  - Determinare esplicitamente  $\varphi(t)$ . Per quali  $y_0$  si ha  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \pi$ , oppure  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = 0$ ?
- Siano  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$  e  $b(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ t-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ove  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; e si ponga  $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ .
  - Determinare  $e^{tA}$ , e risolvere il problema di Cauchy dato da  $Y' = AY$  e  $Y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
  - Trovare tutte le soluzioni del sistema differenziale  $Y' = AY + b(t)$ .

1. (a) Vediamo in quali punti  $P(x, y, z)$  di  $\mathbb{R}^3$  la mappa  $g(P) = (x^2 + 2z^2 + 2x, 3xz - 2y)$  non è sommersiva, ovvero il differenziale  $dg_P$  non è suriettivo: in questi punti i relativi insiemi di livello  $X_{\alpha, \beta}$  (che, visto il calcolo dimensionale  $3 - 2 = 1$ , saranno delle curve) potranno avere delle singolarità. La matrice jacobiana  $J_g(P) = \begin{pmatrix} 2(x+1) & 0 & 4z \\ 3z & -2 & 3x \end{pmatrix}$  ha rango  $< 2$  se e solo se  $2(x+1) = 4z = 0$ , ovvero in tutti e soli i punti del tipo  $P_u(-1, u, 0)$  al variare di  $u \in \mathbb{R}$  (una retta in  $\mathbb{R}^3$ ), in cui  $g(P_u) = (-1, -2u)$ . Pertanto tutte le curve  $X_{\alpha, \beta}$  sono regolari tranne quelle del tipo  $X_{-1, \beta}$  nel loro punto  $P(-1, -\frac{1}{2}\beta, 0)$ . In particolare la curva  $X = X_{1,1}$  è regolare, e lo spazio tangente lineare a  $X$  in  $A(-1, 1, -1) \in T_A X = \ker dg_A$  dato da  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , che dà la retta orizzontale omogenea  $\begin{cases} z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$  (generata dal vettore  $\vec{v} = (2, -3, 0)$ ). Invece lo spazio tangente affine a  $X$  in  $A$  è dato da  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - (-1) \\ y - 1 \\ z - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ovvero la retta orizzontale  $\begin{cases} z = -1 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$ .
- (b) (Figure 1a e 1b) La curva  $X$  è data dal sistema  $\begin{cases} x^2 + 2z^2 + 2x = 1 \\ 3xz - 2y = 1 \end{cases}$ , dunque è un chiuso di  $\mathbb{R}^3$  (equazioni continue). Notiamo che la prima equazione può essere facilmente riscritta come  $(x+1)^2 + 2z^2 = 2$ , ovvero  $\frac{(x+1)^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z^2}{1^2} = 1$ , che è un'ellisse traslata (in effetti  $X$  è data dall'intersezione tra la superficie  $3xz - 2y = 1$  e il cilindro con asse parallelo all'asse  $y$  generato da tale ellisse): questo prova che  $|x+1| \leq \sqrt{2}$  e  $|z| \leq 1$ , ed essendo poi  $y = \frac{1}{2}(3xz - 1)$  anche la coordinata  $y$  ne risulta limitata (poiché il valore massimo possibile per  $|xz|$  è  $\sqrt{2} + 1$ , si avrà  $|y| = \frac{1}{2}|3xz - 1| \leq \frac{1}{2}(3|xz| + 1) \leq \frac{1}{2}(3(\sqrt{2} + 1) + 1) = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ ). Ne segue che  $X$  è una curva compatta. Per la parametrizzazione, abbiamo visto che l'ellisse in  $(x, z)$  si può parametrizzare in modo adattato come  $(x, z) = (-1 + \sqrt{2} \cos \psi, \sin \psi)$  con  $|\psi| \leq \pi$ , pertanto una parametrizzazione per  $X$  è  $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  data da  $\gamma(\psi) = (-1 + \sqrt{2} \cos \psi, \frac{1}{2}(3 \sin \psi (\sqrt{2} \cos \psi - 1) - 1), \sin \psi)$ . Il vettore derivato risulta  $\gamma'(\psi) = (-\sqrt{2} \sin \psi, \frac{3}{2}(\sqrt{2} \cos 2\psi - \cos \psi), \cos \psi)$  (notiamo che  $A = \gamma(-\frac{\pi}{2})$  e che  $\gamma'(-\frac{\pi}{2}) = (\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2, -3, 0)$ , vettore parallelo a  $\vec{v}$ ).
- (c) Si chiede di trovare i punti di massimo e minimo assoluto della funzione  $f(x, y, z) = z$  su  $X$ , che esistono grazie a Weierstrass (essendo  $X$  compatta). Lo facciamo in due modi.
- Il metodo di Lagrange per la ricerca dei punti stazionari di  $z$  col vincolo di stare in  $X$  dà il sistema dato dalle due equazioni di  $X$  più la terza equazione  $\det \begin{pmatrix} 2(x+1) & 0 & 4z \\ 3z & -2 & 3x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$ , ovvero  $\begin{cases} x^2 + 2z^2 + 2x = 1 \\ 3xz - 2y = 1 \\ -4(x+1) = 0 \end{cases}$ , che ha soluzioni  $A(-1, 1, -1)$  e  $B(-1, -2, 1)$ , rispettivamente punto più basso e alto di  $X$ .
  - Usando la parametrizzazione  $\gamma$  ci possiamo ridurre a studiare gli estremi in  $[-\pi, \pi]$  della funzione  $F(\psi) := f(\gamma(\psi)) = \sin \psi$ , che sono evidentemente  $-1$  e  $1$  ottenuti rispettivamente in  $\psi = -\frac{\pi}{2}$  (che corrisponde ad  $A$ ) e in  $\psi = \frac{\pi}{2}$  (che corrisponde a  $B$ ).
2. (a) Da  $(u, v) = (x + y, x - y)$  si ricava  $(x, y) = \phi(u, v) = (\frac{1}{2}(u + v), \frac{1}{2}(u - v))$ ; la matrice jacobiana  $J_\phi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  ha determinante  $-\frac{1}{2} \neq 0$ . Il triangolo  $T$  è descritto da  $0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 1 - x$ , e inserendo le espressioni in  $u$  e  $v$  si ottiene dunque  $0 \leq u + v \leq 2$  e  $0 \leq u - v \leq 2 - u - v$ , ovvero  $-u \leq v \leq 2 - u$ ,  $v \leq u$  e  $u \leq 1$ : ne deduciamo che l'insieme  $E$  è, nel piano  $(u, v)$ , il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(1, -1)$ .
- (b) Supporre che  $f \in L^1(T)$  (cosa che dimostreremo nel punto successivo) equivale, per il teorema del cambio di variabile d'integrazione, a supporre che  $(f \circ \phi) |\det J_\phi| \in L^1(E)$ , e allora per Fubini possiamo calcolare l'integrale multiplo come integrale iterato, ottenendo  $\int_{u=0}^{u=1} du \int_{v=-u}^{v=u} u^{-\frac{3}{2}} \cos(\frac{v}{u}) \frac{1}{2} dv = \frac{1}{2} \int_{u=0}^{u=1} u^{-\frac{3}{2}} (u \sin(\frac{v}{u}))_{v=-u}^{v=u} du = (\sin 1) \int_{u=0}^{u=1} u^{-\frac{1}{2}} du = (\sin 1)(2\sqrt{u})_0^1 = 2 \sin 1$ .
- (c) Come detto, provare che  $f \in L^1(T)$  equivale a provare che  $(f \circ \phi) |\det J_\phi| = \frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} \cos(\frac{v}{u}) \in L^1(E)$ . A tal fine osserviamo che la funzione è positiva su  $E$  (infatti, levando gli inessenziali punti di bordo, e tra essi  $(0, 0)$  ove la funzione non è definita, da  $u > 0$  e  $-u < v < u$  si ricava  $-1 \leq \frac{v}{u} \leq 1$ , da cui  $\cos 1 < \cos(\frac{v}{u}) < 1$ ): dunque, per Tonelli, per verificarne l'integrabilità basta vedere se un integrale iterato è finito (e il valore dell'integrale multiplo coinciderà con tale valore), ma questo è proprio ciò che abbiamo fatto nel precedente punto (b).
3. (a) (Figura 2) L'equazione  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  definisce la superficie conica di generatrice la semiretta  $\begin{cases} z = x, y = 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$  e asse  $\begin{cases} x = y = 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$ , mentre l'equazione  $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$  rappresenta il cilindro retto illimitato di base il cerchio di centro  $(1, 0)$  e raggio 1 nel piano  $(x, y)$ : ne deriviamo che il solido  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$  è la parte di spazio interna al cilindro e racchiusa tra il piano orizzontale  $(x, y)$  (sotto) e la superficie conica (sopra), e il modo probabilmente più agevole per descriverla è in coordinate cilindriche standard  $(r, \theta, z)$  come  $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq r \leq 2 \cos \theta$ ,  $0 \leq z \leq r$ . Il volume è pertanto  $\text{Vol}(D) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} dr \int_0^r r dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{3} r^3)_{r=0}^{r=2 \cos \theta} d\theta = \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{8}{3} (\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{9}$ . Per il baricentro, ragioni di simmetria ci dicono che  $y_G = 0$ , e si calcola poi che  $x_G = \frac{1}{\text{Vol}(D)} \int_D x dx dy dz = \frac{9}{32} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} dr \int_0^r r \cos \theta r dz =$

$$\frac{9}{32} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} r^4\right)_{r=0}^{r=2 \cos \theta} \cos \theta d\theta = \frac{9}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta = \frac{9}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta (1 - \sin^2 \theta)^2 d\theta = \frac{9}{8} (\sin \theta - \frac{2}{3} \sin^3 \theta + \frac{1}{5} \sin^5 \theta) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6}{5}$$

e che<sup>(1)</sup>  $z_G = \frac{1}{\text{Vol}(D)} \int_D z dx dy dz = \frac{9}{32} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} dr \int_0^r z r dz = \frac{9}{32} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8} r^4\right)_{r=0}^{r=2 \cos \theta} d\theta = \frac{9}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{9}{32} ((\sin \theta \cos^3 \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta) = \frac{27}{32} \left(\frac{\theta + \sin \theta \cos \theta}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{27\pi}{128} \sim 0,7.$

- (b) La divergenza di  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  vale 3, dunque per il teorema di Gauss il flusso totale di  $F$  uscente da  $\partial D$  è pari a  $3 \text{Vol}(D) = \frac{32}{3}$ . D'altra parte, il flusso di  $F$  uscente da  $A$  e da  $B$  è in entrambi i casi nullo perché il campo è evidentemente parallelo ad entrambe queste porzioni di superficie: ne deduciamo che tutto il flusso uscente è quello attraverso  $L$ , ovvero  $\frac{32}{3}$ . Per verifica, notiamo che  $L$  è parametrizzata da  $(\theta, z)$  tramite  $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)|_{r=2 \cos \theta} = (2 \cos^2 \theta, 2 \sin \theta \cos \theta, z)$  con  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  e  $0 \leq z \leq r = 2 \cos \theta$ , dunque il flusso uscente di  $F$  da  $L$  è dato anche dalla seguente espressione, dove le colonne sono rispettivamente il campo  $F$  e le derivate parziali della parametrizzazione rispetto  $\theta$  e  $z$  (si noti che il prodotto vettoriale di queste ultime due, nell'ordine citato, dà la normale uscente):  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \det \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \theta & -2 \sin 2\theta & 0 \\ 2 \sin \theta \cos \theta & 2 \cos 2\theta & 0 \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} 4 \cos^2 \theta dz = 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{32}{3}$ , come già trovato prima.

- (c) Per la superficie  $L$  il campo  $G(x, y, z) = (x - 1, y, 0)$  coincide proprio col vettore normale uscente  $\vec{n} = \frac{(2(x-1), 2y, 0)}{\sqrt{4(x-1)^2 + 4y^2}}$ , dunque il flusso di  $G$  uscente da  $L$  è  $\int_L G \cdot \vec{n} d\sigma = \int_L \vec{n} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_L d\sigma$ , ovvero l'area di  $L$ . Quanto al conto, usando la parametrizzazione di  $L$  vista in (b) si ha  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \det \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \theta - 1 & -2 \sin 2\theta & 0 \\ 2 \sin \theta \cos \theta & 2 \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} 2 dz = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 8$ .

- (d) La superficie  $B$ , ovvero la porzione di  $\partial D$  che giace sulla superficie conica, è parametrizzata tramite  $(r, \theta)$  da  $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)|_{z=r} = (r \cos \theta, r \sin \theta, r)$  con  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  e  $0 \leq r \leq 2 \cos \theta$ , mentre il rotore di  $H(x, y, z) = (x - z, 2z, x - y)$  risulta  $\nabla \times H = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x - z & 2z & x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , pertanto il flusso di  $\nabla \times H$  uscente da  $B$  risulta  $-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \det \begin{pmatrix} -3 & -r \sin \theta & \cos \theta \\ 0 & r \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} (3 \cos \theta + 2 \sin \theta) r dr = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos \theta + 2 \sin \theta) \cos^2 \theta d\theta = 6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = 8$ . D'altra parte, il circuito  $\partial B$  è parametrizzato da  $\theta$  come  $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)|_{(r,z)=(2 \cos \theta, 2 \cos \theta)} = (2 \cos^2 \theta, 2 \sin \theta \cos \theta, 2 \cos \theta)$  con  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , dunque vale  $\oint_{\partial B} H \cdot d\ell = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (0, 4 \cos \theta, 2 \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta) \cdot (-4 \sin \theta \cos \theta, 2(2 \cos^2 \theta - 1), -2 \sin \theta) d\theta = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) - \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta)) d\theta = 4(2 \sin \theta - \sin^3 \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 8$ , stesso valore di prima. Questo verifica la formula di Stokes, come richiesto.

4. (a) (Figura 3) Nell'equazione differenziale  $y' = f(t, y) = \frac{\sin^2 y}{1+t^2}$  la funzione  $f$  è di classe  $C^1$  su tutto il piano  $\mathbb{R}^2$ : ciò assicura esistenza e unicità locale, dunque anche unicità globale e, di conseguenza, il significato per la nozione di soluzioni massimali. Inoltre  $f$  è evidentemente limitata (vale  $0 \leq f(t, y) \leq 1$ ), dunque ha crescita sublineare: ciò dice che le soluzioni massimali saranno tutte definite su  $\mathbb{R}$ . Una costante  $y \equiv \alpha$  sarà soluzione se e solo se  $0 = \frac{\sin^2 \alpha}{1+t^2}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , ovvero se e solo se  $\alpha = k\pi$  per qualche  $k \in \mathbb{Z}$ . Per unicità le altre soluzioni non potranno mai assumere tali valori, e pertanto la loro derivata  $y' = \frac{\sin^2 y}{1+t^2} > 0$  mostra che esse saranno strettamente crescenti.

- (b) Come detto, per unicità la soluzione  $\varphi(t)$  tale  $\varphi(0) = y_0$  non potrà mai assumere i valori  $0$  e  $\pi$  e dunque dovrà essere limitata, con valori in  $]0, \pi[$ ; inoltre essa sarà strettamente crescente. Poiché il limite di una funzione monotona e limitata esiste finito, ciò dice che i limiti  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi(t)$  saranno finiti (e rispettivamente  $\leq y_0$ ).

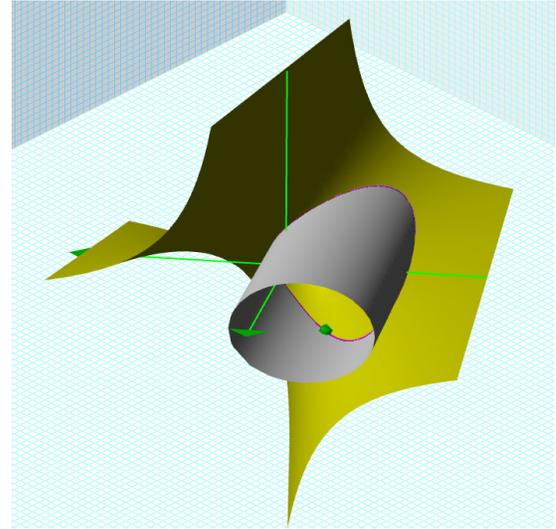
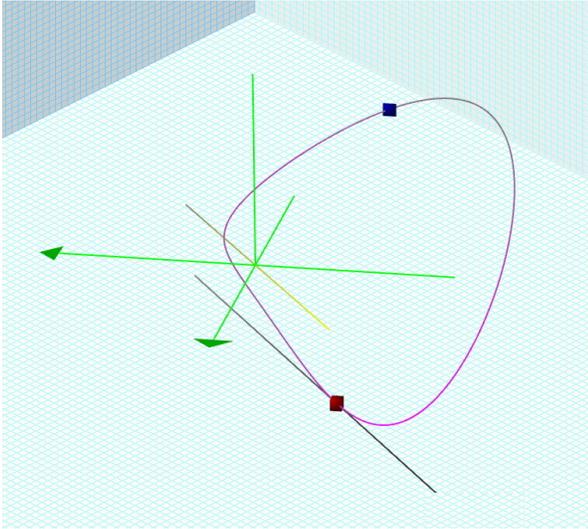
- (c) Separando le variabili si ha  $\frac{1}{\sin^2 \varphi(t)} \varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ , da cui integrando tra gli istanti  $0$  e  $t$  si ottiene  $-\cotg \varphi(t) + \cotg y_0 = \arctg t$ , ovvero  $\varphi(t) = \arctg(\cotg y_0 - \arctg t)$ . Infine, poiché  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi(t) = \arctg(\cotg y_0 \mp \frac{\pi}{2})$ , e  $\cotg y_0 \mp \frac{\pi}{2}$  è un valore finito per ogni prefissato  $y_0 \in ]0, \pi[$ , non esiste nessun  $y_0$  per il quale si abbia  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \pi$ , oppure  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = 0$ .

5. (a) Per l'operatore associato alla matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$  è evidente che i sottospazi  $\langle \vec{e}_2 \rangle$  (relativo alla variabile  $y$ ) e  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle$  (relativo alle variabili  $(x, z)$ ) sono invarianti, dunque il calcolo di  $e^{tA}$  diventa indipendente su ciascuno di essi. Su  $\langle \vec{e}_2 \rangle$  l'operatore è l'omotetia di rapporto  $\alpha$ , dunque l'esponenziale diventa  $e^{\alpha t}$ ; su  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle$  l'operatore indotto è  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ , che ha autovalore doppio  $-1$  e dunque  $\tilde{N} = \tilde{A} - (-1)\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$  è nilpotente e vale  $e^{t\tilde{A}} = e^{-t}(\mathbf{1}_2 + t\tilde{N}) = \begin{pmatrix} (1+2t)e^{-t} & -2te^{-t} \\ 2te^{-t} & (1-2t)e^{-t} \end{pmatrix}$ : ne ricaviamo che  $e^{tA} = \begin{pmatrix} (1+2t)e^{-t} & 0 & -2te^{-t} \\ 0 & e^{\alpha t} & 0 \\ 2te^{-t} & 0 & (1-2t)e^{-t} \end{pmatrix}$ . Di conseguenza il problema di Cauchy dato da  $Y' = AY$  e  $Y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

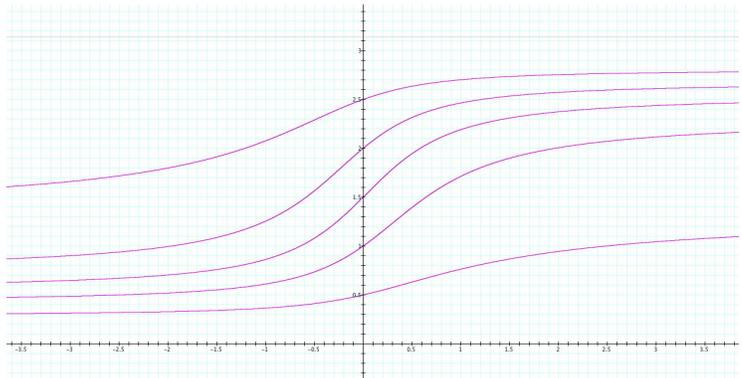
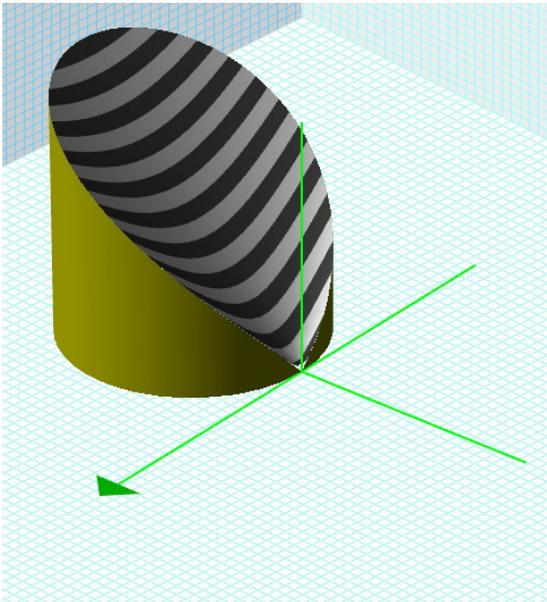
<sup>(1)</sup>Si è usato il fatto che  $\int \cos^{2n} t dt = \frac{1}{2n} (\cos^{2n-1} t \sin t + (2n-1) \int \cos^{2(n-1)} t dt)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

ha soluzione  $e^{tA} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+6t)e^{-t} \\ 3e^{\alpha t} \\ (2-6t)e^{-t} \end{pmatrix}$ .

- (b) Anche in questo caso trattiamo i singoli problemi indipendenti per i sottospazi  $\langle \vec{e}_2 \rangle$  e  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle$ . Su  $\langle \vec{e}_2 \rangle$  il problema è  $y' = \alpha y + t - 1$ : se  $\alpha \neq 0$  si ottiene  $y(t) = k e^{\alpha t} - \frac{\alpha t - \alpha - 1}{\alpha^2}$  mentre se  $\alpha = 0$  si ottiene  $y(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + k$ , al variare di  $k \in \mathbb{C}$ . Su  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle$ , per  $\begin{cases} x' = x - 2z + 2e^t \\ z' = 2x - 3z \end{cases}$  le soluzioni del problema omogeneo associato sono del tipo  $\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{t\tilde{A}} \begin{pmatrix} h \\ \ell \end{pmatrix}$  al variare di  $h, \ell \in \mathbb{C}$ ; per quanto riguarda una soluzione particolare del sistema completo, poiché 1 non è autovalore di  $\tilde{A}$  conviene cercarne una della forma  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} e^t$  con  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  vettore costante da determinare, e i calcoli danno  $\begin{cases} u e^t = u e^t - 2v e^t + 2e^t \\ v e^t = 2u e^t - 3v e^t \end{cases}$ , ovvero  $\begin{cases} u = u - 2v + 2 \\ v = 2u - 3v \end{cases}$ , che dà  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Ricapitolando, le soluzioni di  $Y' = AY + b(t)$  sono tutte e sole quelle del tipo  $\begin{cases} x(t) = (h(1+2t) - 2\ell t) e^{-t} + 2e^t \\ y(t) = k e^{\alpha t} - \frac{\alpha t - \alpha - 1}{\alpha^2} \\ z(t) = (2ht + \ell(1-2t)) e^{-t} + e^t \end{cases}$  se  $\alpha \neq 0$ , e  $\begin{cases} x(t) = (h(1+2t) - 2\ell t) e^{-t} + 2e^t \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + k \\ z(t) = (2ht + \ell(1-2t)) e^{-t} + e^t \end{cases}$  se  $\alpha = 0$ , al variare di  $h, k, \ell \in \mathbb{C}$ .



1. Ex. 1: la curva  $X$ , e le due superfici da cui  $X$  si ottiene come intersezione.



2. Ex. 3: il solido  $D$  (la superficie  $L$  è in giallo, la  $B$  a strisce). 3. Ex. 4: alcune soluzioni in  $]0, \pi[$ .