Università degli Studi di Padova

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 06/12/2024

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Test guidato di prova scritta (06/12/2024)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2024/25

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (27/08/2018)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2017/18

Cognome-Nome ____________________________________ *Matr.* __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. *Sia* $g(x,y,z) = \sqrt{x+y-z} + 2xz - y^2$.

(a) *Notato che la superficie di livello* S *di* g *passante per* $P(0,1,0)$ *è regolare, parametrizzarla in* P *e trovarne in due modi il piano ivi tangente.*

(b) *Dire per quali* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *la funzione* $f(x,y,z) = x + \alpha y + \beta z$ *ha* P *come punto stazionario su* S*, determinandone la natura.*

2. *Nel piano cartesiano si disegni* $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 2ax,\ x \le y\}$ *(ove* $a > 0$*).*

(a) *Calcolare area e baricentro di* A*.*[1]

(b) *Dire per quali* (α, β) *esiste finito l'integrale su* A *di* $x^\alpha y^\beta$*, e calcolarlo per* $(\alpha,\beta) = (-1,0)$ *e* $(0,-1)$*.*

3. *Nello spazio cartesiano si disegni* $E = \{(x,y,z) : x,y,z \ge 0,\ x^2+y^2 \le a^2,\ x+z \le a\}$ *(ove* $a > 0$*).*

(a) *Calcolare il volume (possibilmente in due modi) e l'area totale esterna di* E*.*

(b) *Verificare il teorema di Gauss per* E *e per il campo* $F = (x, 0, 2y)$*.*

(c) *Verificare la formula di Kelvin-Stokes per* F *e la porzione cilindrica di* ∂E*.*

4. *È data l'equazione differenziale* $t^2(1+\sqrt{|y|})\, y' = \sqrt{|y|}$ *nella funzione scalare* $y(t)$*.*

(a) *Che si può dire a priori su esistenza, unicità, crescenza, invarianza temporale delle soluzioni? Ve ne sono di costanti? Se* $\eta(t)$ *è una soluzione su* $I \subset \mathbb{R}_{>0}$*, lo sono anche* $\eta(-t)$ *oppure* $-\eta(-t)$ *su* $-I$*?*

(b) *Determinare le soluzioni tali che* $y(1) = -1$*,* $y(1) = 1$ *oppure* $y(1) = 0$*, specificando il loro dominio.*

5. *Trovare tutte le soluzioni* $(x(t), y(t))$ *del sistema differenziale* $\begin{cases} \dot{x} = x + 1 - 2y \\ \dot{y} = \alpha x - (\alpha+1) y \end{cases}$ *al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

---

[1] *Può essere utile sapere che* $\int \cos^4\theta\, d\theta = \frac{1}{8}(3(\theta + \sin\theta\cos\theta) + 2\sin\theta\cos^3\theta)$ *e* $\int \sin^4\theta\, d\theta = \frac{1}{8}(3(\theta - \sin\theta\cos\theta) - 2\sin^3\theta\cos\theta)$*.*

Analisi Matematica III – Esame Scritto (27/08/2018) – Soluzioni.

1. (a) Il gradiente di $g(x,y,z)=\sqrt{x+y-z}+2xz-y^2$ è $\nabla g=(\frac{1}{2R}+2z,\ \frac{1}{2R}-2y,\ -\frac{1}{2R}+2x)$ (ove si è posto per comodità $R=\sqrt{x+y-z}$). In $P(0,1,0)$ vale $g(P)=0$ e $\nabla g(P)=(\frac12,-\frac32,-\frac12)$, dunque la superficie di livello S passante per P (data da $g=0$) è regolare. Attorno P si può ad esempio esplicitare $x(y,z)$ con $x(1,0)=0$, $\dot x_y(1,0)=-\frac{-3/2}{1/2}=3$ e $\dot x_z(1,0)=-\frac{-1/2}{1/2}=1$: ne ricaviamo che il piano tangente a S in P è dato da $x=0+3(y-1)+1(z-0)$ ovvero $x-3y-z+3=0$, risultato che si ritrova anche da $\nabla g(P)\cdot(x-0,y-1,z-0)=0$.

(b) Per Lagrange la condizione affinché la funzione $f(x,y,z)=x+\alpha y+\beta z$ abbia P come punto stazionario su S è che $\nabla f(P)=(1,\alpha,\beta)$ e $\nabla g(P)=(\frac12,-\frac32,-\frac12)$ siano paralleli, e ciò dà $\alpha=-3$ e $\beta=-1$. A questo punto, studiare la natura di P per f su S equivale a studiare la natura di $(y_0,z_0)=(1,0)$ per $F(y,z)=f(x(y,z),y,z)=x(y,z)-3y-z$. Essendo $\nabla F(y,z)=(\dot x_y-3,\dot x_z-1)$ si vede subito che $\nabla F(1,0)=(0,0)$, come già noto; passando poi alle derivate seconde si ha che $\mathsf{H}_F(y,z)=\mathsf{H}_x(y,z)$, dunque per capire la natura di $(0,1)$ per F (ovvero la natura di P per f su S) abbiamo bisogno di calcolare $\mathsf{H}_x(1,0)$. Derivando $g(x(y,z),y,z)\equiv 0$ rispetto y e z si ha $\frac{1}{2R}(\dot x_y+1)+2\dot x_y z-2y=0$ e $\frac{1}{2R}(\dot x_z-1)+2\dot x_z z+2x=0$ (da cui per $(y,z)=(1,0)$ con $x(1,0)=0$ si trova nuovamente $\dot x_y(1,0)=3$ e $\dot x_z(1,0)=1$). Derivando nuovamente la prima delle due rispetto a y e z si ha $\frac{1}{2R^2}(\ddot x_{yy}R-\frac{1}{2R}(\dot x_y+1)^2)+2\ddot x_{yy}z-2=0$ e $\frac{1}{2R^2}(\ddot x_{yz}R-\frac{1}{2R}(\dot x_y+1)(\dot x_z-1))+2\ddot x_{yz}z+2\dot x_y=0$, che calcolate in $(y,z)=(1,0)$ coi valori trovati prima danno $\ddot x_{yy}(1,0)=12$ e $\ddot x_{yz}(1,0)=-12$; derivando poi la seconda delle due nuovamente rispetto z si ha $\frac{1}{2R^2}(\ddot x_{zz}R-\frac{1}{2R}(\dot x_z-1)^2)+2\ddot x_{zz}z+2\dot x_z+2\dot x_z=0$, che calcolata in $(y,z)=(1,0)$ coi valori trovati prima dà $\ddot x_{zz}(1,0)=-8$. Si ha perciò $\mathsf{H}_F(y,z)=\mathsf{H}_x(y,z)=\begin{pmatrix}12&-12\\-12&-8\end{pmatrix}$, matrice indefinita (si noti che det <0): questo ci dice che P è un punto di sella per f su S.

2. (a) (Figura 1) L'insieme $A=\{(x,y):x^2+y^2\le 2ax,\ x\le y\}$ si può descrivere in coordinate polari come $\rho\le 2a\cos\theta$ con $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, e la sua area risulta dunque $\frac12\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(2a\cos\theta)^2\,d\theta=a^2[\theta+\cos\theta\sin\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-2}{4}a^2$. Si ha poi $\int_A x\,dx\,dy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\cos\theta\,\rho\,d\rho=\frac83a^3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=\frac83a^3[\frac18(3(\theta+\sin\theta\cos\theta)+2\sin\theta\cos^3\theta)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac13a^3[(\frac{3\pi}{2}-(\frac{3\pi}{4}+\frac32+\frac12)]=\frac{3\pi-8}{12}a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\sin\theta\,\rho\,d\rho=\frac83a^3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^3\theta\,d\theta=\frac83a^3[-\frac14\cos^4\theta)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac23a^3[0-(-\frac14)]=\frac16a^3$, da cui $(x_G,y_G)=(\frac{1}{\text{Area }A}\int_A x\,dx\,dy,\ \frac{1}{\text{Area }A}\int_A y\,dx\,dy)=(\frac{3\pi-8}{3(\pi-2)}a,\ \frac{2}{3(\pi-2)}a)$ (si noti che il baricentro appartiene all'asse di simmetria $x+y=a$).

(b) La funzione $x^\alpha y^\beta$ è positiva su A, dunque per Fubini e Tonelli basta esaminare un integrale iterato che descrive $\int_A x^\alpha y^\beta\,dx\,dy$ e vedere cosa succede. Si ha $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}(\rho\cos\theta)^\alpha(\rho\sin\theta)^\beta\,\rho\,d\rho=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^\alpha\theta\sin^\beta\theta\,d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^{\alpha+\beta+1}\,d\rho$, che per essere integrata in $\rho\sim 0$ richiede sia $\alpha+\beta+1>-1$ ovvero $\beta>-\alpha-2$. Sotto questa ipotesi, integrando in ρ si ricava $\frac{(2a)^{\alpha+\beta+2}}{\alpha+\beta+2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\alpha+\beta+2}\theta\,\sin^\beta\theta\,d\theta$: ora gli eventuali problemi di integrazione sono in $\theta\sim\frac{\pi}{2}$, in cui il coseno è uno zero del primo ordine, dunque la condizione necessaria per l'integrabilità è $2\alpha+\beta+2>-1$ ovvero $\beta>-2\alpha-3$. Ricapitolando, la funzione $x^\alpha y^\beta$ ha integrale finito su A se e solo se $\begin{cases}\beta>-\alpha-2\\ \beta>-2\alpha-3\end{cases}$. In particolare questa condizione è soddisfatta in entrambi i casi proposti per il calcolo: se $(\alpha,\beta)=(-1,0)$ si ottiene $2a\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2}a$, mentre se $(\alpha,\beta)=(0,-1)$ si ha $2a\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\sin^{-1}\theta\,d\theta=2a\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{cotg}\theta\,d\theta=2a[\log\sin\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-2a\log\frac{1}{\sqrt2}=a\log 2$.

3. (a) (Figura 2) Calcoliamo il volume di E in due modi. 1. Per (x,y)-fili: detta B la base di E sul piano orizzontale (il quarto di cerchio di raggio a), il filo sopra $(x,y)\in B$ è dato da $0\le z\le a-x$, dunque il volume di E risulta $\int_B(a-x)\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a(a-\rho\cos\theta)\,\rho\,d\rho=a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac12-\frac13\cos\theta)\,d\theta=a^3[\frac12\theta-\frac13\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=(\frac{\pi}{4}-\frac13)a^3$. 2. Per x-fette: fissato $0\le x\le a$ la corrispondente x-fetta è data da $0\le y\le\sqrt{a^2-x^2}$ e $0\le z\le a-x$, ovvero un rettangolo in (y,z) di lati $\sqrt{a^2-x^2}$ e $a-x$, pertanto il volume di E risulta $\int_0^a(a-x)\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx-\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a\cdot\frac14\pi a^2-[-\frac13(a^2-x^2)^{\frac32}]_0^a=(\frac{\pi}{4}-\frac13)a^3$. • La base B ha area $\frac14\pi a^2$; le porzioni laterali triangolare S e quadrata S' hanno aree $\frac12a^2$ e a^2. Il coperchio superiore P è parametrizzato da $(x,y,a-x)$ con $x,y\in B$ (elemento d'area $\sqrt2\,dx\,dy$), dunque la sua area — conformemente anche alla legge del coseno — è $\sqrt2\cdot\text{Area}\,B=\frac{\sqrt2}{4}\pi a^2$. Infine la porzione laterale cilindrica C è parametrizzata da $(a\cos\theta,a\sin\theta,z)$ con $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ e $0\le z\le a-x=a(1-\cos\theta)$ (elemento d'area $a\,d\theta\,dz$), e l'area è $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a(1-\cos\theta)}a\,dz=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos\theta)\,d\theta=a^2[\theta-\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=(\frac{\pi}{2}-1)a^2$. L'area totale di E, somma di questi contributi, risulta dunque $(\frac{\pi}{4}+\frac12+1+\frac{\sqrt2\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-1)a^2=\frac{(3+\sqrt2)\pi+2}{4}a^2$.

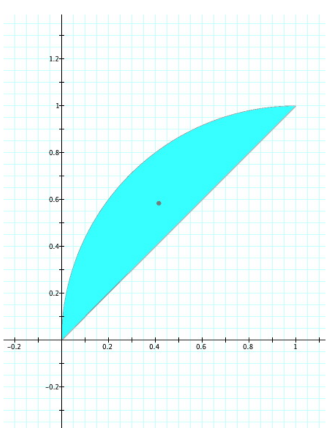
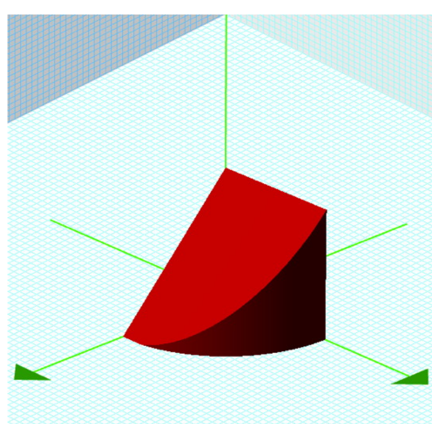
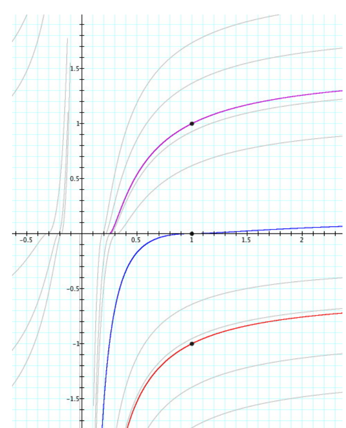
(b) Il campo $F=(x,0,2y)$ ha divergenza 1, dunque va verificato che il flusso uscente totale sia pari al volume di E, ovvero $(\frac{\pi}{4}-\frac13)a^3$. Poiché F è parallelo al piano (x,z) si ha $\Phi_S(F)=0$. Sul piano (y,z) il campo è parallelo all'asse z e dunque a S', perciò $\Phi_{S'}(F)=0$. Per la base B si ha $\Phi_B(F)=\int_B(x,0,2y)\cdot(0,0,-1)\,dx\,dy=-2\int_B y\,dx\,dy=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\rho\sin\theta\,\rho\,d\rho=-\frac23a^3$. Per il coperchio P si ha $\Phi_P(F)=+\int_B\det\begin{pmatrix}x&1&0\\0&0&1\\2y&-1&0\end{pmatrix}dx\,dy=\int_B(x+2y)\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a(\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho=\frac13a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+2\sin\theta)\,d\theta=\frac13a^3[\sin\theta-2\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=a^3$. Infine per C si ha $\Phi_C(F)=+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a(1-\cos\theta)}\det\begin{pmatrix}a\cos\theta&-a\sin\theta&0\\0&a\cos\theta&0\\2a\sin\theta&0&1\end{pmatrix}dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a(1-\cos\theta)}a^2\cos^2\theta\,dz=a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos\theta)\cos^2\theta\,d\theta=a^3[\frac12(\theta+\sin\theta\cos\theta)-\sin\theta+\frac13\sin^3\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=(\frac{\pi}{4}-\frac23)a^3$. Si ha così $\Phi_{\partial E}(F)=\Phi_S(F)+\Phi_{S'}(F)+\Phi_B(F)+\Phi_P(F)+\Phi_C(F)=(0+0-\frac23+1+\frac{\pi}{4}-\frac23)a^3=(\frac{\pi}{4}-\frac13)a^3$, come atteso.

(c) F ha rotore $\nabla\times F=(2,0,0)$, e dunque $\Phi_C(\nabla\times F)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a(1-\cos\theta)}\det\begin{pmatrix}2&-a\sin\theta&0\\0&a\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}dz=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos\theta)\cos\theta\,d\theta=$

$a^2[2\sin\theta - \theta - \sin\theta\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = (2-\frac{\pi}{2})a^2$. Calcoliamo ora la circuitazione di F lungo ∂C con l'orientazione antioraria: partendo da $(a,0,0)$ si ha $\oint_{+\partial P} F\cdot d\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos\theta,0,2a\sin\theta)\cdot(-a\sin\theta,a\cos\theta,0)\,d\theta + \int_0^a (0,0,2a)\cdot(0,0,1)\,dz + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (a\cos\theta,0,2a\sin\theta)\cdot(-a\sin\theta,a\cos\theta,a\sin\theta)\,d\theta = -a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta + 2a\int_0^a\,dz + a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta)\,d\theta = 2a\int_0^a\,dz - a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\theta\,d\theta = 2a^2 - [\theta - \sin\theta\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = (2-\frac{\pi}{2})a^2$, come già trovato in precedenza.

4. (a) Dall'equazione $t^2(1+\sqrt{|y|})\,y' = \sqrt{|y|}$ si nota che una soluzione $y(t)$ definita in $t=0$ deve necessariamente annullarsi lì, ovvero $y(0)=0$; notato ciò, si può porre in forma normale $y' = f(t,y) = \frac{\sqrt{|y|}}{t^2(1+\sqrt{|y|})}$. La funzione f è continua in tutti i punti del piano (t,y) con $t\neq 0$, ed è lipschitziana rispetto a y ovunque tranne che nel punti con $y=0$ (ove è asintotica a $\sqrt{|y|}$): ne ricaviamo che per ogni dato iniziale (t_0,y_0) con $t_0\neq 0$ la soluzione esiste, ma che per i dati con $y_0=0$ non è assicurata l'unicità (anzi: ricordando il noto caso di $y'=\sqrt{|y|}$ è assai probabile che l'unicità salti). Poiché $f\geq 0$ le soluzioni saranno crescenti sul loro dominio; poiché l'equazione non è autonoma non si avrà invarianza temporale delle soluzioni. L'unica soluzione costante è quella nulla $y\equiv 0$; infine, una semplice verifica mostra che se $\eta(t)$ è una soluzione su $I\subset\mathbb{R}_{>0}$ lo sarà anche $-\eta(-t)$ su $-I$.
(b) (Figura 3) L'equazione è a variabili separabili; per $t\neq 0$ si ha $(\frac{1}{\sqrt{|y|}}+1)\,dy = \frac{1}{t^2}\,dt$, che integrata (posto $\sigma = \operatorname{sign} y$) dà $2\sigma\sqrt{|y|}+y = c-\frac{1}{t}$. • Per la soluzione (definita e unica per $t>0$ finché non si annulla) con $y(1)=-1$ si ricava $c=-2$, da cui $-2\sqrt{|y|}+y = -2-\frac{1}{t}$, da cui (essendo $y=-(\sqrt{|y|})^2$) si ha $(\sqrt{|y|})^2+2\sqrt{|y|}-(2+\frac{1}{t})=0$, da cui $\sqrt{|y|}=\sqrt{3+\frac{1}{t}}-1$, da cui infine $y(t) = -(4+\frac{1}{t}-2\sqrt{3+\frac{1}{t}})$, che per $t>0$ non si annulla mai (verificare) e dunque ha dominio $t>0$. • Per la soluzione (definita e unica per $t>0$ finché non si annulla) con $y(1)=1$ si ricava $c=4$, da cui $2\sqrt{y}+y=4-\frac{1}{t}$, da cui (essendo $y=(\sqrt{y})^2$) si ha $(\sqrt{y})^2+2\sqrt{y}-(4-\frac{1}{t})=0$, da cui $\sqrt{y}=\sqrt{5-\frac{1}{t}}-1$, da cui infine $y(t)=6-\frac{1}{t}-2\sqrt{5-\frac{1}{t}}$, che per $t>0$ si annulla per $t=\frac{1}{4}$ (verificare) e dunque ha dominio $]\frac{1}{4},+\infty[$. • Infine, per la soluzione con $y(1)=0$ già prevediamo di perdere l'unicità. In effetti $y\equiv 0$ è già un'evidente soluzione, su tutto $\mathbb{R}$; d'altra parte un'eventuale soluzione $y(t)$ non costante dovrà soddisfare per crescenza $y\gtrless 0$ se $t\gtrless 1$, pertanto se $t<1$ si avrà $c=1$ e $-2\sqrt{|y|}+y=1-\frac{1}{t}$, da cui (essendo $y=-(\sqrt{|y|})^2$) si ricava $y(t)=2\sqrt{\frac{1}{t}}-\frac{1}{t}-1$, mentre se $t>1$ si avrà ancora $c=1$ e $2\sqrt{y}+y=1-\frac{1}{t}$, da cui (essendo $y=(\sqrt{y})^2$) si ricava $y(t)=3-\frac{1}{t}-2\sqrt{2-\frac{1}{t}}$. Quella appena descritta à un'altra soluzione con $y(1)=0$, non costante, definita su $]0.+\infty[$; ma ve ne sono infinite altre, ottenute saldando un tratto di costanza 0 attorno a $t=1$ con soluzioni del tipo di quella appena trovata.

5. Il sistema dato si scrive come $\dot{Y} = AY+b$ con $Y=\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \alpha & -(\alpha+1)\end{pmatrix}$ e $b=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. La matrice A ha autovalori -1 e $1-\alpha$, dunque vanno tenuti presente come casi particolari $\alpha=1$ (in cui il secondo autovalore è nullo) e $\alpha=2$ (in cui i due autovalori coincidono). • Per $\alpha\neq 1,2$, due autovettori riferiti a -1 e $1-\alpha$ sono rispettivamente $(1,1)$ e $(2,\alpha)$; d'altra parte una soluzione particolare del sistema completo sarà una costante (a,b), e i calcoli danno $(a,b)=(\frac{\alpha+1}{\alpha-1},\frac{\alpha}{\alpha-1})$. Dunque le soluzioni saranno tutte e sole quelle del tipo $\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\,e^{-t}+2B\,e^{(1-\alpha)t}+\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \\ A\,e^{-t}+\alpha B\,e^{(1-\alpha)t}+\frac{\alpha}{\alpha-1}\end{pmatrix}$ al variare di $A,B\in\mathbb{C}$. • Per $\alpha=1$ nulla cambia per la parte omogenea mentre una soluzione particolare del sistema completo sarà stavolta del tipo $(at+b,ct+d)$, e dai conti si trova $a=2$, $c=1$ e $b=2d+1$: scegliendo ad esempio $d=0$ si hanno le soluzioni $\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\,e^{-t}+2B+2t+1 \\ A\,e^{-t}+B+t\end{pmatrix}$ al variare di $A,B\in\mathbb{C}$. • Per $\alpha=2$ entrambi gli autovalori valgono -1: in tal caso sappiamo che $N=A-(-1)\mathbf{1}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ è nilpotente (infatti $N^2=\mathbf{0}$), e vale $e^{tA}=e^{-t}(1+tN)=\begin{pmatrix}(1+2t)\,e^{-t} & -2t\,e^{-t} \\ 2t\,e^{-t} & (1-2t)\,e^{-t}\end{pmatrix}$. D'altra parte una soluzione particolare del sistema completo sarà ancora una costante (a,b), e posto $\alpha=2$ nel calcolo precedente si ha $(a,b)=(3,2)$. Le soluzioni saranno dunque del tipo $\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = e^{tA}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(2(A-B)t+A)\,e^{-t}+3 \\ (2(A-B)t+B)\,e^{-t}+2\end{pmatrix}$ al variare di $A,B\in\mathbb{C}$.

1. Ex. 2. **2** Ex. 3. **3** Ex. 4.

(a) $\nabla g = \left(\frac{1}{2R} + 2z, \frac{1}{2R} - 2y, -\frac{1}{2R} + 2x \right) \quad R = \sqrt{x+y-z}$

$\nabla g(P) = \left(\overset{\neq 0}{\tfrac{1}{2}}, -\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2} \right) \qquad g(P) = 0 \qquad S = \{ (x,y,z) : g(x,y,z) = 0 \}$

S è regolare all'intorno di P.

$g = 0 \xrightarrow{\text{Dini}} x(y,z) = ; \quad x(1,0) = 0, \quad \dot{x}_y(1,0) = -\frac{-3/2}{1/2} = 3, \quad \dot{x}_z(1,0) = -\frac{-1/2}{1/2} = 1$

$x(y,z) = 3(y-1) + 1(z-0) + \cdots$ piano TG. $x = 3(y-1) + z$

$\nabla g(P) \cdot (x-0, y-1, z-0) = 0$

(b) $\nabla f = (1, \alpha, \beta) \quad \nabla g(P) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2} \right) \quad \nabla f \parallel \nabla g(P) \iff \begin{matrix} \alpha = -3 \\ \beta = -1 \end{matrix}$

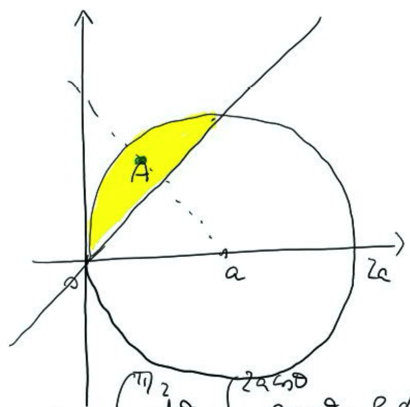
$f(x,y,z) = x - 3y - z \qquad F(y,z) = x(y,z) - 3y - z$

$\nabla F = (\dot{x}_y - 3, \dot{x}_z - 1) \qquad \nabla F(1,0) = (0,0)$ (punto.)

$H_F = H_x = \begin{pmatrix} \ddot{x}_{yy} & \ddot{x}_{yz} \\ \ddot{x}_{zy} & \ddot{x}_{zz} \end{pmatrix} \qquad H_F(1,0) = H_x(1,0) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & -8 \end{pmatrix}$ indefinita $\Rightarrow$ P è sella di f su S

2

(a)



Area $A = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{\pi - 2}{4} a^2$

Polari: $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$

$x^2 + y^2 \le 2ax \quad \rho^2 \le 2a\rho\cos\theta$

$\rho \le 2a\cos\theta = \rho(\theta)$

$\text{Area}(A) = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^2(\theta)\, d\theta =$

$= \frac{1}{2} \cdot 4a^2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta$

$= 2a^2 \left[\frac{\theta + \sin\theta\cos\theta}{2} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi - 2}{4} a^2$

$\int_A x \, dx\, dy = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho\cos\theta \cdot \rho \, d\rho = \frac{8a^3}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4\theta \, d\theta = \cdots$

$\int_A y \, dx\, dy = \quad '' \quad '' \sin\theta \quad = \frac{8a^3}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta \cos^3(\theta)\, d\theta = \frac{8a^3}{3} \left[-\frac{\cos^4\theta}{4} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \cdots$

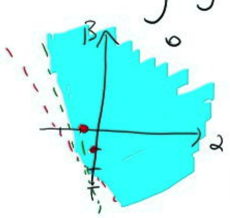
(b) $\int_A x^\alpha y^\beta \, dx\, dy \overset{\text{FTT}}{=} \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho^\alpha \cos^\alpha\theta \, \rho^\beta \sin^\beta\theta \, \rho \, d\rho =$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^\alpha\theta \sin^\beta\theta \, d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho^{\alpha+\beta+1} d\rho = \frac{(2a)^{\alpha+\beta+2}}{\alpha+\beta+2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^{2\alpha+\beta+2}(\theta) \sin^\beta\theta \, d\theta$

$\theta \sim 0 \to \boxed{\alpha + \beta + 1 > -1}$

$\theta \sim \pi/2 \to \boxed{2\alpha + \beta + 2 > -1}$

$\begin{cases} \beta > -\alpha - 2 \\ \beta > -2\alpha - 3 \end{cases}$

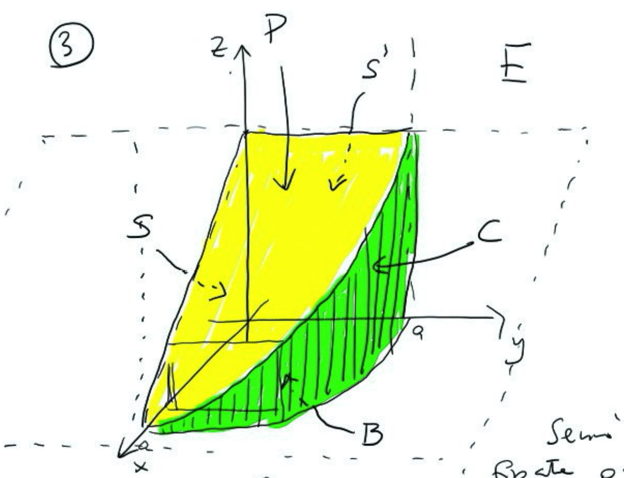


$(\alpha, \beta) = (-1, 0): \quad 2a \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta = 2a \cdot \pi/4 = \frac{\pi a}{2}$

$(\alpha, \beta) = (0, -1): \quad 2a \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta = 2a (\log \sin\theta) \Big]_{\pi/4}^{\pi/2}$

$= 2a \left(0 - \log \tfrac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2a \log\sqrt{2} = a \log 2$

③



$$\mathrm{Vol}(E) = \int_B (a-x)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a (a-\rho\cos\theta)\rho\,d\rho = \int_0^{\pi/2} d\theta \left(\frac{a\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3}\cos\theta\right)\Big]_0^a$$

$$= a^3\int_0^{\pi/2}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\cos\theta\right)d\theta = a^3\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\sin\theta}{3}\right)\Big]_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)a^3$$

Se uso, B x-semplice: fissato $0 \le x \le a$ ho $0 \le y \le \sqrt{a^2-x^2}$, $0 \le z \le a-x$

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_0^a (a-x)\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx - \int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{4} - \left(-\tfrac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}\right)\Big]_0^a \quad \left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)a^3.$$

$$P = \{(x,y,a-x) : (x,y)\in B\} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \qquad d\sigma = \sqrt{2}\,dx\,dy$$

$$\text{Area } P = \sqrt{2}\,\text{Area } B = \sqrt{2}\cdot\frac{\pi a^2}{4}.$$

$$C = \{(a\cos\theta, a\sin\theta, z) : z \le a-x = a(1-\cos\theta)\} \qquad d\sigma = a\,d\theta\,dz$$

$$\text{Area } C = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a(1-\cos\theta)} a\,dz = a^2\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)\,d\theta = a^2(\theta-\sin\theta)\Big]_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2.$$

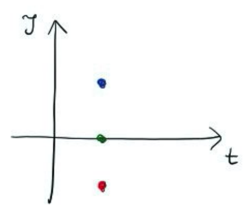
④ (a) $y(t)$ soluzione definita all'intorno di $t=0$ $\quad 0 = \sqrt{|y(0)|} \Rightarrow y(0)=0$

$$y' = \frac{\sqrt{|y|}}{t^2(1+\sqrt{|y|})} = f(t,y)$$

f continua $\forall (t_0,y_0)$ con $t_0 \neq 0$
$\mathcal{C}^\infty$ $\forall (t_0,y_0)$ con $t_0\neq 0$, $y_0 \neq 0$.

$\Rightarrow \exists$ pb di Cauchy dati $(t_0 \neq 0, y_0)$
$\exists!$ pb di Cauchy dati $(t_0 \neq 0, y_0 \neq 0)$ (locale)

(b)



$$\left(\frac{1}{\sqrt{|y|}}+1\right)dy = t^{-2}\,dt \qquad \sigma = \operatorname{sgn} y$$

$$2\sigma\sqrt{|y|} + y = -\frac{1}{t} + K$$

$$(y(1) = -1) \qquad 2(-1)\sqrt{1} + (-1) = -\frac{1}{1} + K$$

$$K = -2 \qquad -2\sqrt{|y|} + \underbrace{y}_{-(\sqrt{|y|})^2} = -\frac{1}{t} - 2$$

$$(\sqrt{|y|})^2 + 2\sqrt{|y|} - 2 - \frac{1}{t} = 0 \Rightarrow \sqrt{|y|} = \sqrt{3+1/t} - 1$$

$$\Rightarrow y(t) = -\left(4 + 1/t - 2\sqrt{3+1/t}\right)$$

Si può annullare? $\quad 4 + 1/t - 2\sqrt{3+1/t} = 0 \qquad 2\sqrt{3+1/t} = 4 + 1/t$

$4\left(3+\frac{1}{t}\right)=16+\frac{1}{t^2}+\frac{8}{t}$ $\qquad \frac{1}{t^2}+\frac{4}{t}+4=0 \quad \left(\frac{1}{t}+2\right)^2=0$

Dunque il dominio è $]0,+\infty[$ $\qquad t=-\frac{1}{2}$ No! (visto $t>0$)

- $(y(1)=1)$ $\qquad 2\cdot 1\cdot\sqrt{1}+1=-\frac{1}{1}+K \implies K=4$

  $2\sqrt{y}+\underbrace{y}_{=(\sqrt{y})^2}=4-\frac{1}{t} \qquad (\sqrt{y})^2+2\sqrt{y}-\left(4-\frac{1}{t}\right)=0$

  $\implies \sqrt{y}=\sqrt{5-\frac{1}{t}}-1 \implies y(t)=6-\frac{1}{t}-2\sqrt{5-\frac{1}{t}}$

  $6-\frac{1}{t}-2\sqrt{5-\frac{1}{t}}=0 \qquad 2\sqrt{5-\frac{1}{t}}=6-\frac{1}{t} \qquad 4\left(5-\frac{1}{t}\right)=36+\frac{1}{t^2}-\frac{12}{t}$

  $\frac{1}{t^2}-\frac{8}{t}+16=0 \quad \left(\frac{1}{t}-4\right)^2=0 \quad t=\frac{1}{4}$ $\qquad$ Dominio: $]\frac{1}{4},+\infty[$.

- $(y(1)=0)$ $\qquad y\equiv 0$ è soluzione!

  Una soluzione non costante diventa ≤ 0 $\forall\, t\leq 1$ (è crescente).

  Dunque, se $t<1$: $26\sqrt{|y|}+y=K-\frac{1}{t} \overset{t=1}{\implies} 2(-1)\sqrt{|y|}+y=K-\frac{1}{1}$ $\quad y=0 \implies K=1$

  quindi $-2\sqrt{|y|}+y=1-\frac{1}{t} \implies y(t)=2\sqrt{\frac{1}{t}}-\frac{1}{t}-1$ $\quad (\forall\, \underline{t<1})$

  se $t>1$: $\quad 2\cdot 1\cdot\sqrt{y}+y=K-\frac{1}{1} \implies K=1 \implies y(t)=3-\frac{1}{t}-2\sqrt{2-\frac{1}{t}}$ $\quad (\forall\, \underline{t>1})$

  $$y(t)=\begin{cases} 2\sqrt{\frac{1}{t}}-\frac{1}{t}-1 & (\forall\, 0<t<1) \\ 0 & t=1 \\ 3-\frac{1}{t}-2\sqrt{2-\frac{1}{t}} & (\forall\, t>1)\end{cases}$$

  più ALTRE possibili soluzioni...

---

(5) $$\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}^{\cdot}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \alpha & -\alpha-1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}$$

Autovalori di A: $\quad -1, \quad 1-\alpha$ $\qquad$ $\underline{\alpha=2}$ Un solo autovalore -1 $\qquad$ $\underline{\alpha=1}$ 0 è un autovalore.

$\underline{\text{Se } \alpha\neq 1,2}$ $\quad$ Autovettori: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}$ $\forall\, -1$, $\quad \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha\end{pmatrix}$ $\forall\, 1-\alpha$.

Soluz. part. dell'eq. completa: $\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}$, dai calcoli: $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}e^{-t}+B\begin{pmatrix} 2 \\ \alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\end{pmatrix} \qquad A,B\in\mathbb{C}$$

$\underline{\text{Se } \alpha=2}$ $\qquad A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3\end{pmatrix}$ $\qquad N=A-(-1)\mathbb{1}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2\end{pmatrix}$ nilpotente ($N^2=0$)

$$e^{tA}=e^{-t}(\mathbb{1}+tN)=\begin{pmatrix} 1+2t & -2t \\ 2t & 1-2t\end{pmatrix}e^{-t}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1+2t)e^{-t} & -2te^{-t} \\ 2te^{-t} & (1-2t)e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 2\end{pmatrix} \qquad A,B\in\mathbb{C}$$

$\underline{\text{Se } \alpha=1}$ $\qquad$ Soluz. part $\begin{pmatrix} at+b \\ ct+d\end{pmatrix}$ $\qquad$ dai conti $\begin{pmatrix} 2t+1 \\ t\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}e^{-t}+B\begin{pmatrix} 2 \\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2t+1 \\ t\end{pmatrix}, \quad A,B\in\mathbb{C}$$