UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 19/12/2024

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Test guidato di prova scritta (19/12/2024)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2024/25

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (10/02/2020)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2019/20

Cognome-Nome ________________________________ *Matr.* __________ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. *Nello spazio cartesiano sia* $\Gamma = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 2(y+1),\ z^2 = 2x-1\}$.

(a) *Si mostri che* Γ *è una curva regolare all'intorno del suo punto* $P(1,0,-1)$, *esprimerne una parametrizzazione locale, e calcolarne la retta tangente affine in due modi.*

(b) *Dire per quale* $\alpha \in \mathbb{R}$ *il punto* P *è stazionario per* $f(x,y,z) = 2x + \alpha y$ *su* Γ, *determinandone la natura.*

(c) *Dimostrare che* Γ *è compatta, e determinarne i punti più alto e più basso.*

2. *Nel piano cartesiano, dato* $a > 0$ *sia* $A = \{(x,y) : y \geq 0,\ ax \geq y^2,\ x^2+y^2 \leq 2a^2\}$.

(a) *Disegnare* A *e calcolarne area e baricentro.*

(b) *Calcolare (se finiti) per* $\alpha = -1$ *gli integrali* $\int_{A'} x^\alpha\,dx\,dy$ *e* $\int_{A'} y^\alpha\,dx\,dy$, *ove* $A' = A \cap \{x \leq a\}$.

(c) *Discutere l'integrabilità su* A' *delle funzioni* x^α *e* y^α *al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. *Nello spazio cartesiano si disegni l'insieme* A *dell'Ex. 2 nel piano* (x,z), *e sia* E *il solido nel primo ottante generato da una rotazione di un quarto di giro di* A *attorno all'asse* z.

(a) *Si disegni* E *e se ne calcoli il volume in due modi.*

(b) *Verificare il teorema di Gauss per* E *e per il campo* $F = (0,z,0)$.

(c) *Verificare la formula di Kelvin-Stokes per* F *e la componente di* ∂E *sul piano* (y,z).

4. *Si abbia l'equazione differenziale* $y'' + (y')^2 = y^2$ *nella funzione incognita scalare* $y(t)$.

(a) *Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Vi sono soluzioni costanti? Se* $\varphi(t)$ *è una soluzione su un intervallo, lo sono anche* $\varphi(-t)$ *(oppure* $-\varphi(-t)$*) sull'intervallo opposto? Se ciò fosse vero, le soluzioni definite in* $t = 0$ *sarebbero necessariamente (dis)pari?*

(b) *Determinare la soluzione tale che* $y(0) = 1$ *e* $y'(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. *Determinare tutte le soluzioni reali* $y(t)$ *dell'equazione* $y''' + 4y = 2y' + \frac{1}{\cos t}$ *tali che* $y(0) = 0$, *specificandone a priori il dominio.*

Analisi Matematica III – Esame Scritto (10/02/2020) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) Detta $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z)) = (x^2+y^2+z^2-2y,\ z^2-2x)$, la curva Γ è data da $(g_1, g_2) = (2, -1)$. Lo jacobiano di g è $\mathsf{J}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2(y-1) & 2z \\ -2 & 0 & 2z \end{pmatrix}$, e nel punto $P(1,0,-1)$ di Γ si ha che $\mathsf{J}_g(P) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ha rango 2: ciò prova che Γ è una curva regolare all'intorno di P. Poiché ad esempio il minore della prima e terza colonna è nonsingolare, per Dini è possibile esprimere localmente $x(y)$ e $z(y)$ con $x(0) = 1$ e $z(0) = -1$. Derivando le equazioni rispetto a y si ha $(2xx'+2y+2zz'-2,\ 2zz'-2x') = (0,0)$, che calcolata in $y = 0$ dà $(2(x'(0)-z'(0)-1),\ -2(z'(0)+x'(0))) = (0,0)$ ovvero $x'(0) = \frac{1}{2}$ e $z'(0) = -\frac{1}{2}$; derivando ulteriormente si ottiene $(2((x')^2+xx''+1+(z')^2+zz''),\ 2((z')^2+zz''-x''))) = (0,0)$, che calcolata in $y = 0$ dà $(2(\frac{1}{4}+x''(0)+1+\frac{1}{4}-z''(0)),\ 2(\frac{1}{4}-z''(0)-x''(0)))) = (0,0)$ ovvero $(x''(0)-z''(0),\ x''(0)+z''(0))) = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$, da cui $(x''(0),\ z''(0))) = (-\frac{5}{8}, \frac{7}{8})$: una parametrizzazione locale di Γ attorno a P è dunque $\gamma(y) = (x(y), y, z(y))$ con $x(y) = 1+\frac{1}{2}y-\frac{5}{16}y^2+o_0(y^2)$ e $z(y) = -1-\frac{1}{2}y+\frac{7}{16}y^2+o_0(y^2)$. La retta tangente affine a Γ in P si può ottenere o arrestando γ al primo ordine o come nucleo traslato di $\mathsf{J}_g(P)$, dando in entrambi i casi la retta $\begin{cases} x-y-z=2 \\ x+z=0 \end{cases}$.

(b) Per il metodo di Lagrange, la condizione affinché $P(1,0,-1)$ sia stazionario per $f(x,y,z) = 2x+\alpha y$ su Γ è che $\nabla f(P)$ sia combinazione lineare di $\nabla g_1(P)$ e $\nabla g_2(P)$, ovvero $\det \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 0$, e questo porge $\alpha = -1$. Quanto alla natura, basta esaminare quella di $y = 0$ per $F(y) = f(\gamma(y)) = 2x(y)-y$: si ha $F'(y) = 2x'-1$ (da cui $F'(0) = 0$, come previsto), e $F''(y) = 2x''$ (da cui $F''(0) = 2x''(0) = -\frac{5}{4} < 0$). Si tratta dunque di un punto di massimo locale stretto.

(c) La curva Γ è compatta in quanto chiusa (sistema di due equazioni continue) e limitata (in quanto $x^2+y^2+z^2-2y = 2$, ovvero $x^2+(y-1)^2+z^2 = 3$ è la superficie sferica di centro $(0,1,0)$ e raggio $\sqrt{3}$). Pertanto per Weierstrass ha senso cercare i suoi punti più alto e più basso, ovvero gli estremi assoluti su Γ della funzione $h(x,y,z) = z$. Da $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x & 2(y-1) & 2z \\ -2 & 0 & 2z \end{pmatrix} = 0$ si ottiene $y = 1$, che messo nelle equazioni di Γ porge i due punti $A_\pm(\sqrt{5}-1, 1, \pm\sqrt{2\sqrt{5}-3})$, rispettivamente il più alto e il più basso di Γ.

2. (a) (Figura 2) Nel primo quadrante le curve $ax = y^2$ (parabola) e $x^2+y^2 = 2a^2$ (circonferenza di raggio $a\sqrt{2}$) si intersecano in (a,a). L'area si ottiene come somma di uno spicchio di cerchio e di un settore parabolico, e risulta $\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}(a\sqrt{2})^2+\int_0^a (y-\frac{1}{a}y^2)\,dy = \frac{3\pi+2}{12}a^2$. • Procedendo per y-fili si ha $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^a dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^{\sqrt{2a^2-y^2}} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a (2a^2-y^2-\frac{1}{a^2}y^4)\,dy = \frac{1}{2}[2a^2y-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{5a^2}y^5]_0^a = \frac{1}{2}(2a^3-\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{5a^2}a^5) = \frac{11}{15}a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^a dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^{\sqrt{2a^2-y^2}} y\,dx = \int_0^a y(\sqrt{2a^2-y^2}-\frac{1}{a}y^2)\,dy = [-\frac{1}{3}(2a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4a}y^4]_0^a = (-\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^3)-9-\frac{1}{3}2\sqrt{2}a^3) = \frac{8\sqrt{2}-7}{12}a^2$ da cui, dividendo per l'area, il baricentro risulta il punto $(\frac{44}{5(3\pi+2)}a, \frac{8\sqrt{2}-7}{3\pi+2}a)$.

(b) Le funzioni x^α e y^α sono positive su $A' = A \cap \{x \le a\} = \{(x,y) : 0 \le y \le a,\ \frac{1}{a}y^2 \le x \le a\}$, dunque per Fubini e Tonelli si possono esaminare integrali iterati. • Posto $\alpha = -1$, si ha $\int_0^a dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^a \frac{1}{x}\,dx = \int_0^a (\log a - \log(\frac{1}{a}y^2))\,dy = \int_0^a \log(\frac{a}{y^2/a})\,dy = 2\int_0^a (\log a - \log y)\,dy$, che converge ($\log y$ è integrabile in $y \sim 0$). Per il calcolo, si ha $2[(\log a)y - y(\log y\ -1)]_0^a = 2a$. • D'altra parte si ha $\int_0^a dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^a \frac{1}{y}\,dx = \int_0^a \frac{a-\frac{1}{a}y^2}{y}\,dy$, che invece diverge (si noti che $\frac{a-\frac{1}{a}y^2}{y} \sim_0^* \frac{1}{y}$).

(c) Sia ora $\alpha \ne -1$. • Si ha $\int_0^a dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^a x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^a (a^{\alpha+1}-(\frac{1}{a}y^2)^{\alpha+1})\,dy = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^a (a^{\alpha+1}-\frac{1}{a^{\alpha+1}}y^{2(\alpha+1)})\,dy$, che per l'integrabilità in $y \sim 0$ richiede $2(\alpha+1) > -1$, ovvero $\alpha > -\frac{3}{2}$. • Si ha $\int_0^a dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^a y^\alpha\,dx = \int_0^a (a-\frac{1}{a}y^2)y^\alpha\,dy$: notando che la funzione integranda è $\sim_0^* y^\alpha$, si ha la condizione $\alpha > -1$.

3. (a) (Figura 3) Calcoliamo il volume di E in due modi. (1. Guldino) Vale $\mathrm{Vol}\,E = \frac{\pi}{2}\int_A x\,dx\,dz = \frac{\pi}{2}\frac{11}{15}a^3 = \frac{11\pi}{30}a^3$. (2. Per z-fette) Fissato $0 \le z \le a$ la z-fetta è un quarto di corona circolare di raggi $\frac{1}{a}z^2$ e $\sqrt{2a^2-z^2}$ che ha area $\frac{1}{4}\pi(2a^2-z^2-\frac{1}{a^2}z^4)$, dunque $\mathrm{Vol}\,E = \int_0^a \frac{1}{4}\pi(2a^2-z^2-\frac{1}{a^2}z^4)\,dz = \frac{\pi}{4}[2a^2z-\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{5a^2}z^5]_0^a = \frac{11\pi}{30}a^3$.

(b) La divergenza del campo $F = (0,z,0)$ è nulla, dunque dobbiamo mostrare che il flusso totale di F uscente da A è pure nullo. Il campo F è parallelo all'asse y, dunque i flussi di F uscenti da A' (nel piano (y,z)) e dalla base B (nel piano (x,y) sono nulli. Il flusso uscente da A è $\int_A (0,z,0)\cdot(0,-1,0)\,dy\,dz = -\int_A z\,dx\,dz = -\frac{8\sqrt{2}-7}{12}a^3$ (già calcolato nell'Ex. 2 con y al posto di z), quello da S (componente sferica di ∂E) è $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \det \begin{pmatrix} 0 & -a\sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi & a\sqrt{2}\cos\theta\cos\varphi \\ a\sqrt{2}\cos\varphi & a\sqrt{2}\cos\theta\cos\varphi & a\sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & 0 & -a\sqrt{2}\sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi = 2\sqrt{2}\,a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}[\sin^3\varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}a^3$, e quello da T (paraboloidale, parametrizzata in coordinate cilindriche da $(\frac{1}{a}z^2\cos\theta, \frac{1}{a}z^2\sin\theta, z)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le z \le a$, con normale entrante) è $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \det \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a}z^2\sin\theta & \frac{2}{a}z\cos\theta \\ z & \frac{1}{a}z^2\cos\theta & \frac{2}{a}z\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = -\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta \int_0^a z^3\,dz = -\frac{1}{4}a^3$. Il flusso totale di F uscente da E è dunque nullo, e ciò verifica il teorema di Gauss.

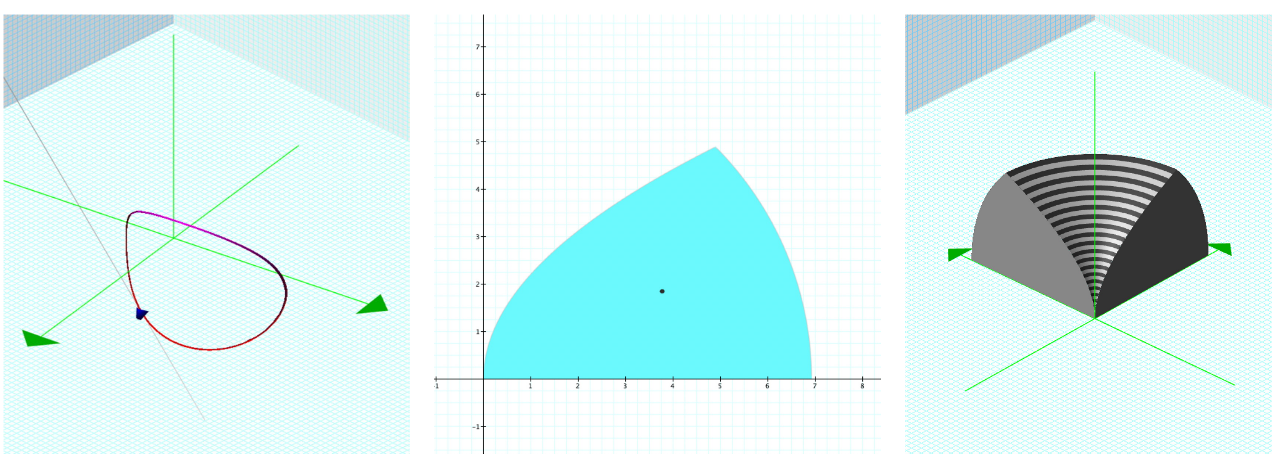
(c) Il flusso di $\nabla \times F = (-1,0,0)$ attraverso A' con normale $(1,0,0)$ è $\int_{A'} (-1,0,0)\cdot(1,0,0)\,dy\,dz = -\mathrm{Area}\,A' = -\frac{3\pi+2}{12}a^2$. Calcolando poi la circuitazione antioraria di F lungo $\partial A'$ si ha $0+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (0, a\sqrt{2}\cos\varphi, 0)\cdot(0, a\sqrt{2}\cos\varphi, -a\sqrt{2}\sin\varphi))\,d\varphi+\int_a^0 (0,z,0)\cdot(0, \frac{2}{a}z, 1)\,dz = -2a^2[\frac{\varphi+\sin\varphi\cos\varphi}{2}]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{a}[\frac{1}{3}z^3]_0^a = -a^2(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})-\frac{2}{3}a^2 = -\frac{3\pi+2}{12}a^2$, come prima.

4. (a) L'equazione scalare del secondo ordine $y''+(y')^2 = y^2$ è equivalente al sistema autonomo del primo ordine nel piano

$(y,p)=(y,y')$ (il piano delle fasi) dato da $\begin{cases} y'=p \\ p'=y^2-p^2 \end{cases}$. La funzione $f(y,p)=(p,y^2-p^2)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto il piano delle fasi, dunque esistenza e unicità locale sono assicurate per ogni dato iniziale (e con esse anche l'unicità globale), mentre essendoci crescita quadratica (non sublineare) non possiamo dire nulla sull'esistenza globale, che tuttavia non si può escludere a priori per alcune delle soluzioni. Una soluzione costante $y\equiv\alpha$ deve soddisfare $0=\alpha^2$, dunque l'unica soluzione costante è $y\equiv 0$. Se poi $\varphi(t)$ è una soluzione su un intervallo I, posto $\psi(t):=\varphi(-t)$ per $t\in -I$ si ha $\psi'(t)=-\varphi'(-t)$ e $\psi''(t)=\varphi''(-t)$, perciò $\psi''(t)+(\psi'(t))^2=\varphi''(-t)+(-\varphi'(-t))^2=\varphi''(-t)+\varphi'(-t)^2=\varphi(-t)^2=\psi(t)^2$, dunque anche $\varphi(-t)$ è soluzione su $-I$; un'analoga verifica per $-\varphi(-t)$ invece non funziona. Ciò implica che le soluzioni definite in $t=0$ sono pari? No, perché se $\varphi(t)$ è una tale soluzione, posto $\psi(t)=\varphi(-t)$ abbiamo che $\varphi(0)=\psi(0)$ ma ciò non implica che sia $\varphi=\psi$ (ovvero che φ sia pari) perché siamo in un caso del secondo ordine, e per fornire un dato iniziale in $t=0$ non basta fornire il valore della funzione ma serve anche quello della derivata. Ad esempio la soluzione del punto (b) è definita all'intorno di $t=0$ (in realtà il suo dominio sarà $\mathbb{R}$) ma non è pari (come si nota da $y'(0)\neq 0$).

(b) L'equazione totale associata al sistema del primo ordine è $\omega=(y^2-p^2)\,dy-p\,dp=0$. La forma ω non è esatta (infatti $\frac{\partial(y^2-p^2)}{\partial p}-\frac{\partial(-p)}{\partial y}=-2p\neq 0$), ma poiché $\frac{1}{-p}(\frac{\partial(y^2-p^2)}{\partial p}-\frac{\partial(-p)}{\partial y})=2$ non dipende da p si ha che e^{2y} è un fattore integrante per ω. In effetti, se $F(y,p)$ deve soddisfare $\frac{\partial F}{\partial y}=(y^2-p^2)e^{2y}$ e $\frac{\partial F}{\partial p}=-pe^{2y}$, dalla seconda abbiamo che $F=-\frac12 p^2e^{2y}+\phi(y)$ per una certa funzione ϕ, così dalla prima si ricava $\frac{\partial F}{\partial y}=-p^2e^{2y}+\phi'(y)=(y^2-p^2)e^{2y}$, ovvero $\phi'(y)=y^2e^{2y}$: integrando per parti si trova $\phi(y)=\frac14(2y^2-2y+1)e^{2y}$, da cui $F(y,p)=\frac14(2y^2-2y+1-2p^2)e^{2y}$. Le curve integrali nel piano delle fasi sono date perciò dalle curve di livello di F, ovvero $(2y^2-2y+1-2p^2)e^{2y}=k$ con $k\in\mathbb{R}$. • Imponendo la condizione iniziale $(y(0),p(0))=(1,-\frac{1}{\sqrt2})$ si ottiene $k=0$, ovvero l'equazione del primo ordine $(y')^2=y^2-y+\frac12$, che ricordando che $y'(0)<0$ dà $y'=-\sqrt{y^2-y+\frac12}=-\frac12\sqrt{(2y-1)^2+1}$. Posto $u=2y-1$ (dunque $u(0)=2y(0)-1=1$) si ricava $u'=-\sqrt{u^2+1}$; separando le variabili e integrando si ha $\operatorname{sett\,sinh} u=\log(\sqrt{u^2+1}+u)=k-t$ con $k=\log(\sqrt2+1)$, da cui $\sqrt{u^2+1}+u=(\sqrt2+1)e^{-t}$. Si ha allora $\sqrt{u^2+1}=(\sqrt2+1)e^{-t}-u$, che con la condizione necessaria $u(t)\le(\sqrt2+1)e^{-t}$ equivale a $u^2+1=((\sqrt2+1)e^{-t}-u)^2$, ovvero $u(t)=\frac{(\sqrt2+1)e^{-t}-(\sqrt2-1)e^{t}}{2}$, e infine $y(t)=\frac{(\sqrt2+1)e^{-t}-(\sqrt2-1)e^{t}+2}{4}$, soluzione che ha senso su tutto $\mathbb{R}$.

5. L'equazione $y'''-2y'+4y=\frac{1}{\cos t}$ è lineare a coefficienti costanti, dunque possiamo affermare già ora che il dominio delle sue soluzioni reali con $y(0)=0$ sarà lo stesso del termine non omogeneo $\frac{1}{\cos t}$, ovvero $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. L'equazione caratteristica $\lambda^3-2\lambda+4=0$ ha soluzioni -2 e $1\pm i$, dunque una base reale di soluzioni per l'equazione omogenea associata sarà dato da $y_1(t)=e^{-2t}$, $y_2(t)=e^t\cos t$ e $y_3(t)=e^t\sin t$. La matrice wroskiana $W(t)=\begin{pmatrix} e^{-2t} & e^t\cos t & e^t\sin t \\ -2e^{-2t} & e^t(\cos t-\sin t) & e^t(\cos t+\sin t) \\ 4e^{-2t} & -2e^t\sin t & 2e^t\cos t \end{pmatrix}$ ha determinante 10; per il metodo di variazione delle costanti una soluzione particolare dell'equazione completa sarà della forma $\tilde y(t)=c_1(t)y_1(t)+c_2(t)y_2(t)+c_3(t)y_3(t)$ ove $c_1'(t)=\frac{e^{2t}}{10\cos t}$, $c_2'(t)=-\frac{(\cos t+3\sin t)e^{-t}}{10\cos t}$ e $c_3'(t)=\frac{(3\cos t-\sin t)e^{-t}}{10\cos t}$. Denotate con $\tilde c_j(t)$ le primitive con $\tilde c_j(0)=0$ per $j=1,2,3$ (ovvero $\tilde c_j(t)=\int_0^t c_j'(\tau)\,d\tau$), le soluzioni reali dell'equazione saranno tutte e sole $y(t)=(A+\tilde c_1(t))e^{-2t}+e^t((B+\tilde c_2(t))\cos t+(C+\tilde c_3(t))\sin t)$ al variare di $A,B,C\in\mathbb{R}$; in particolare, essendo $y(0)=A+B$, le soluzioni tali che $y(0)=0$ saranno tutte e sole $y(t)=(A+\tilde c_1(t))e^{-2t}+e^t\big((\tilde c_2(t)-A)\cos t+(B+\tilde c_3(t))\sin t\big)$ al variare di $A,B\in\mathbb{R}$.



1. Ex. 1. **2** Ex. 2. **3** Ex. 3.

1. $\Gamma = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 2(y+1),\ z^2 = 2x-1\}$ $\quad P(1,0,-1)$

(a) $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x^2+y^2+z^2-2y,\ z^2-2x)$

$\Gamma = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = (2,-1)\}$

$$J_g = \begin{pmatrix} 2x & 2(y-1) & 2z \\ -2 & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

$J_g(P) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ha rango 2 $\Rightarrow$ Γ è curva regolare attorno a P.

Da $g(x,y,z) = (2,-1)$ si può ad es. esprimere $(x(y), z(y))$ con

$(x(y), z(y)) = \left(1 + \frac{1}{2}y - \frac{5}{16}y^2 + o(y^2),\ -1 - \frac{1}{2}y + \frac{7}{16}y^2 + o(y^2)\right)$.

Retta tg. affine a Γ in P: $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}y \\ z = -1 - \frac{1}{2}y \end{cases}$

oppure $J_g(P)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (stessa retta)

(b) Lagrange: $\nabla f(P)$ combinazione lineare di $\nabla g_1(P)$ e $\nabla g_2(P)$

$$\det\begin{pmatrix} \nabla f(P) \\ \hline J_g(P) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 0 \iff \alpha = -1.$$

Dunque $f(x,y,z) = 2x - y$.

Natura: come quella di $y=0$ per $F(y) = f(x(y), y, z(y)) = 2x(y) - y$

$F'(y) = 2x'(y) - 1 \Rightarrow F'(0) = 2x'(0) - 1 = 0$ (come previsto)

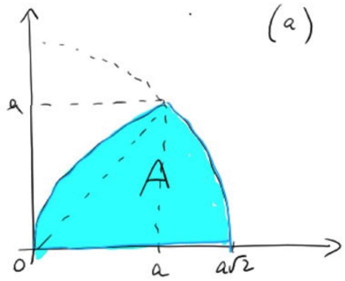
$F''(y) = 2x''(y) \Rightarrow F''(0) = -\frac{5}{4} < 0 \Rightarrow$ P è punto di MAX locale stretto

(c) Γ chiusa (sistema di equazioni continue)
Γ limitata ($g_1 = 2$ è superficie sferica) $\Bigg\} \Rightarrow$ compatta

Estremi assoluti di $h(x,y,z) = z$ su Γ

$$\begin{cases} \det\begin{pmatrix} \nabla h \\ \hline J_g \end{pmatrix} = 0 \\ g(x,y,z) = (2,-1) \end{cases} \qquad \begin{cases} \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x & 2(y-1) & 2z \\ -2 & 0 & 2z \end{pmatrix} = 0 \\ x^2+y^2+z^2-2y = 2 \\ z^2 - 2x = -1 \end{cases} \quad \ldots$$

2.



(a) Somma di spicchio di cerchio e settore parab.

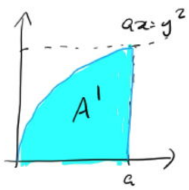
$$\text{Area}(A) = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{4}\,(a\sqrt{2})^2 + \int_0^a \left(y - \frac{1}{a}y^2\right) = \frac{3\pi+2}{12}\,a^2$$

Baricentro: per y-fili

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}} \int_0^a dy \int_{1/a\,y^2}^{\sqrt{2a^2-y^2}} x\,dx = \ldots = \frac{44}{5(3\pi+2)}\,a$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}} \int_0^a dy \int_{1/a\,y^2}^{\sqrt{2a^2-y^2}} y\,dx = \ldots = \frac{8\sqrt{2}-7}{3\pi+2}\,a$$

(b)



$x^\alpha, y^\alpha > 0$ su A'

$\overset{F+T}{\Longrightarrow}$ vediamo integrale iterato.

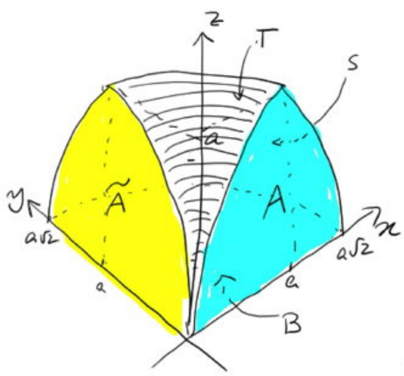
$$\int_0^a dy \int_{1/a\,y^2}^a {}^1\!/\!_x\,dx = \int_0^a \left(\log a - \log\left(\tfrac{1}{a}y^2\right)\right) dy = 2\int_0^a \left(\log a - \log y\right) dy \quad \text{(CONVERGE)}$$

$$= 2\,\Big(y\log a - y(\log y - 1)\Big]_0^a = 2a\,.$$

$$\int_0^a dy \int_{1/a\,y^2}^a {}^1\!/\!_y\,dy = \int_0^a \frac{1}{y}\left(a - \frac{1}{a}y^2\right) dy \quad \text{DIVERGE} \ \left(\overset{*}{\underset{0}{\sim}}\ {}^1\!/\!_y\right).$$

(c) x^α integrabile su A' per $\alpha > -\frac{3}{2}$; y^α per $\alpha > -1$ (V. NOTA)

3.



(a) Volume di E

1. Guldino : $\frac{\pi}{2}\int_A x\,dx\,dz = \frac{11\pi}{30}a^3$

2. z-fette per $0\le z\le a$, le z-fette è corone circolari di raggi $\frac{1}{a}z^2$ e $\sqrt{2a^2-z^2}$:

$$\int_0^a \frac{1}{4}\pi\left(2a^2-z^2-\left(\frac{1}{a}z^2\right)^2\right)dz = \frac{11\pi}{30}a^3.$$

(b) $F=(0,z,0)$ divergenza $\nabla\cdot F=0$.

Campo // asse y $\Rightarrow$ $\Phi_{\tilde A}(F) = \Phi_B(F)=0$

$$\Phi_A(F) = \int_A (0,z,0)\cdot(0,-1,0)\,dx\,dz = -\int_A z\,dx\,dz = -\frac{8\sqrt2-7}{12}a^3$$

S componente sferica $(a\sqrt2\cos\theta\sin\varphi,\ a\sqrt2\sin\theta\sin\varphi,\ a\sqrt2\cos\varphi)$ $\binom{0\le\theta\le\pi/2}{0\le\varphi\le\pi/4}$

T comp. parabolica $(\frac12 z^2\cos\theta,\ \frac12 z^2\sin\theta,\ z)$ $\binom{0\le\theta\le\pi/2}{0\le z\le a}$

Calcoli : vedi note.

(c) $\nabla\times F = \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & z & 0 \end{vmatrix} = (-1,0,0)$

$$\Phi_{\tilde A}(\nabla\times F) = \int_{\tilde A}(-1,0,0)\cdot(1,0,0)\,dy\,dz = -\text{Area}(\tilde A) = -\frac{3\pi+2}{12}a^2$$

e tale risulta anche $\oint_{\partial\tilde A}\vec F\cdot d\vec\ell$ (VEDI NOTE).

4. (a) $y''+(y')^2=y^2$ eq. autonoma scalare del II° ordine

equivale al sistema autonomo

$$\begin{cases} y'=p \\ p'=y^2-p^2 \end{cases}$$ nel piano delle fasi $(y,p)=(y,y')$.

$f(y,p)$ è $\mathcal{C}^1$ $\Rightarrow$ $\exists!$ sol. garantita $\forall$ dato $(y(0),y'(0))$.

$\exists$ globale non si può dire.

Si verifica che

$\varphi(t)$ soluz. su $I \subset \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow \varphi(-t)$ soluz. su $-I \subset \mathbb{R}_{<0}$

ma ciò non implica che φ sia pari ...

(b) Equazione totale $\omega = (y^2-p^2)\,dy - p\,dp = 0$

ω non esatta, ma $\frac{1}{-p}\left(\frac{\partial(y^2-p^2)}{\partial p} - \frac{\partial(p)}{\partial y}\right) = 2$

non dipende da $p \Rightarrow \rho(y) = e^{2y}$ fattore integrante.

$\Rightarrow e^{2y}\omega$ esatta.

Primitiva $F(y,p) = \frac{1}{4}(2y^2-2y+1-2p^2)\,e^{2y}$

Curve integrali $F(y,p) = K \Rightarrow \underline{2y^2-2y+1-2p^2 = Ke^{-2y}}$.

Cond. iniziale $(y(0), y'(0)) = (1, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow K = 0$.

Dunque $(y')^2 = y^2 - y + \frac{1}{2} \underset{y'(0)<0}{\Longrightarrow}$

$y' = -\sqrt{y^2-y+\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}\sqrt{(2y-1)^2+1}$.

che si può risolvere ponendo $2y-1 = u$ (VEDI NOTE).

5. $y''' - 2y' + 4y = \frac{1}{\cos t}$ lineare a coeff. costanti

$\Rightarrow$ soluzione con $y(0) = 0$ avrà dominio $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$\lambda^3 - 2\lambda + 4 = 0$ ha soluzione -2 :

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & & -2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & // \end{array}$$

dunque altre due soluzioni $1 \pm i$.

$\Rightarrow$ sistema fondamentale e^{-2t}, $e^t\cos t$, $e^t\sin t$.

Una soluzione particolare dell'equazione completa si deve calcolare usando il metodo di variazione delle costanti arbitrarie (VEDI NOTE).