Università
degli Studi
di Padova

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2024/25

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 09/01/2025

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Test guidato di prova scritta (09/01/2025)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2024/25

---

1. (a) *Quali superfici di livello di* $g(x,y,z) = x^2 + yz - \log(x - y + 2z)$ *sono regolari? Detta* S *quella di* $A(0,1,1)$*, trovare lo spazio tangente affine e una parametrizzazione locale di* S *in* A*.*

(b) *Dire per quale* $\alpha \in \mathbb{R}$ *si ha che* A *è stazionario per* $f(x,y,z) = x + \alpha y + z$ *su* S*, determinandone la natura. Trovare poi gli estremi di tale* f *su* $K = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 6,\, x + y \geq 0\}$*.*

2. *Si consideri la funzione* $f(x,y) = x \log(2 - \frac{y}{x})$*.*

(a) *Studiare dominio, zeri, segno, curve di livello e limiti interessanti di* f*.*

(b) *Dire se ha senso l'integrale di* f *su* $E = \{(x,y) : 0 < x < 1,\, 0 < y < 2x\}$*; se sì, calcolarlo.*

3. *Si consideri nel piano verticale* (x,z) *l'insieme* $A = \{(x,z) : x^2 + z^2 \leq R^2\,,\ z > 0\,,\ x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}R\}$*, e sia* D *il solido di* $\mathbb{R}^3$ *ottenuto ruotando* A *di un quarto di giro in verso antiorario attorno l'asse* z*.*

(a) *Determinare area e baricentro di* A*, volume e momento d'inerzia di* D *rispetto all'asse* z*.*

(b) *Parametrizzare la porzione* L *della frontiera di* D *che fa parte della superficie sferica esterna; calcolarne poi l'area in due modi, sia usando la parametrizzazione che il teorema di Guldino.*

(c) *Verificare la formula di Kelvin-Stokes per* L *e per il campo* $F = (0,0,x)$*.*

(d) *Detta* B *la porzione della frontiera di* D *sul piano orizzontale* (x,y)*, calcolare* $\int_B xy^2\,dx\,dy$ *sia direttamente che tramite la formula di Green, verificando che il risultato non cambia.*

4. *È data l'equazione differenziale totale* $(2xy - 1)\,dx - x^2\,dy = 0$*.*

(i) *Determinare le curve integrali dell'equazione.*

(ii) *Trovare gli equilibri e un integrale primo del sistema autonomo nel piano naturalmente associato all'equazione. Disegnarne poi le orbite e il verso di percorrenza.*

(iii) *L'insieme delle soluzioni del sistema ha qualche parità? Nel senso: se* $\varphi(t) : I \to \mathbb{R}^2$ *(ove* I *è intervallo di* $\mathbb{R}$*) è soluzione, lo è necessariamente anche* $-\varphi(t)$*, o* $\varphi(-t)$*, o* $-\varphi(-t)$*, o nessuna?*

(iv) *Trovare il flusso del sistema, cioè le sue soluzioni al variare del dato* $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*.*

5. *Si consideri l'equazione differenziale* $y'' + (1 - 2i)y' - 2iy = 2\cos t - 5e^{-t}$ *nell'incognita* $y(t)$*.*

(a) *Descrivere a priori la struttura dell'integrale generale, indi calcolarlo esplicitamente.*

(b) *Scrivere il sistema del primo ordine* $Y' = AY + b(t)$ *(ove* $Y(t) = \binom{y_1(t)}{y_2(t)}$ *) equivalente all'equazione data; calcolarne poi* e^{tA} *e la soluzione con condizione iniziale nulla.*

Analisi Matematica III – TEST n. 3 di Esame Scritto (09/01/2025) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1a) Il gradiente di $g(x,y,z) = x^2+yz-\log(x-y+2z)$ è $\nabla g = (2x-\frac{1}{x-y+2z},\ z+\frac{1}{x-y+2z},\ y-\frac{2}{x-y+2z})$, che si annulla quando $2x = -z = \frac{1}{2}y = \frac{1}{x-y+2z}$: pertanto $y = 4x$, $z = -2x$ e $2x = \frac{1}{x-y+2z} = \frac{1}{x-(4x)+2(-2x)} = -\frac{1}{7x}$, ovvero $x^2 = -\frac{1}{14}$, impossibile. Ne segue che tutte le superfici di livello di g sono regolari. • Il punto $A(0,1,1)$ appartiene alla superficie di livello S data da $g(x,y,z) = g(A) = 1$, e lo spazio tangente affine a S in A è dato da $\nabla g(A)\cdot(x-0, y-1, z-1) = (-1,2,-1)\cdot(x, y-1, z-1) = 0$, ovvero il piano $x-2y+z+1=0$. Per una parametrizzazione locale, essendo $\frac{\partial g}{\partial x}(A) = -1 \neq 0$ possiamo esplicitare $x(y,z)$, ottenendo così una parametrizzazione locale $\gamma(y,z) = (x(y,z), y, z)$ con $x(1,1) = 0$, $\nabla x(1,1) = (2,-1)$ e (facendo ulteriori conti di derivazione dell'identità $g(x(x,z),y,z)\equiv 0$) l'hessiano $\mathsf{H}_x(1,1) = \begin{pmatrix} \ddot{x}_{yy}(1,1) & \ddot{x}_{yz}(1,1) \\ \ddot{x}_{yz}(1,1) & \ddot{x}_{zz}(1,1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

(b) (Figura 1b) Il gradiente di $f(x,y,z) = x+\alpha y+z$ è $\nabla f = (1,\alpha,1)$, e affinché A sia stazionario per f serve che $\nabla f(A) = (1,\alpha,1)$ e $\nabla g(A) = (-1,2,-1)$ siano dipendenti: questo dà $\alpha = -2$. Per capire il carattere di A per f su S basta comporre f con la parametrizzazione γ, ottenendo $F(y,z) := f(x(y,z),y,z) = x(y,z)-2y+z$, e studiare il carattere del punto $(1,1)$ per F. Si ha $F(1,1) = f(0,1,1) = -1$, $\nabla F(y,z) = (\dot{x}_y - 2,\ \dot{x}_z + 1)$ (da cui $\nabla F(1,1) = (\dot{x}_y(1,1)-2,\ \dot{x}_z(1,1)+1) = (0,0)$, come previsto) e $\mathsf{H}_F(y,z) = \begin{pmatrix} \ddot{F}_{yy} & \ddot{F}_{yz} \\ \ddot{F}_{yz} & \ddot{F}_{zz}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_{yy} & \ddot{x}_{yz} \\ \ddot{x}_{yz} & \ddot{x}_{zz}\end{pmatrix} = \mathsf{H}_x(y,z)$, da cui $\mathsf{H}_F(1,1) = \mathsf{H}_x(1,1) = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 3\end{pmatrix}$ che è definita positiva: ne segue che A è un punto di minimo locale stretto per f su S. • Nel compatto $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 6,\ x+y\geq 0\}$ non vi sono punti stazionari per $f(x,y,z) = x-2y+z$ ne' tra i punti interni (il gradiente $\nabla f = (1,-2,1)$ non si annulla mai) ne' tra i punti del disco posteriore $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2+z^2<6\end{cases}$ (i due gradienti di f e della superficie del disco sono ovunque indipendenti). La condizione di stazionarietà per i punti sulla superficie sferica $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y>0\end{cases}$ è data da $\begin{cases} \operatorname{rango}\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix} < 2 \\ x^2+y^2+z^2=6,\ x+y>0\end{cases}$, ovvero $\begin{cases} x = z \\ y = -2x \\ x^2+y^2+z^2=6,\ x+y>0\end{cases}$, con unica soluzione accettabile $P(-1,2,-1)$. Infine, i punti stazionari sulla circonferenza $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y=0\end{cases}$ sono dati da $\begin{cases} \det\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix} = 0 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y=0\end{cases}$, ovvero $\begin{cases} x-y-3z=0 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y=0\end{cases}$, con soluzioni $Q_\pm(\pm 3\sqrt{\frac{3}{11}}, \mp 3\sqrt{\frac{3}{11}}, \pm 2\sqrt{\frac{3}{11}})$. Poiché $f(P) = -6 < f(Q_-) = -\sqrt{33} < f(Q_+) = \sqrt{33}$, il massimo assoluto di f su K è $\sqrt{33}\sim 5{,}7$ (assunto in Q_+) e il minimo assoluto è -6 (in P).

2. (a) (Figura 2) Il dominio di $f(x,y) = x\log(2-\frac{y}{x})$ è dato da $x\neq 0$ e $2-\frac{y}{x}>0$, ovvero $\frac{2x-y}{x}>0$: per $x\gtrless 0$ si ha dunque $y\lessgtr 2x$. Nel dominio si ha $f(x,y) = 0$ quando $2-\frac{y}{x} = 1$, ovvero sulla bisettrice $y = x$; si ha poi $\log(2-\frac{y}{x})>0$ quando $2-\frac{y}{x}>1$ ovvero $\frac{x-y}{x}>0$, pertanto vale $f(x,y)>0$ se e solo se $y<x$. La curva di livello $C_k = \{(x,y) : f(x,y) = k\}$ è il grafico $y = x(2-e^{k/x})$: notato che C_{-k} è la simmetrizzata di C_k (ovvero $(x,y)\in C_{-k}$ se e solo se $(-x,-y)\in C_k$), si ha che per $k>0$ tale grafico tende a 0^- per $x\to 0^-$ e tende a $-\infty$ per $x\to 0^+$, ha un unico zero in $x = \frac{1}{\log 2}k$ ed è asintotico alla bisettrice $y = x$ per $x\to\infty$. La funzione f è $\mathcal{C}^\infty$ nel suo dominio, dunque i limiti interessanti sono nei punti della retta $y = 2x$, nei punti dell'asse $x = 0$ e nel punto all'infinito ∞_2 del piano. In un punto $(x_0, 2x_0)$ con $x_0\neq 0$ il limite è chiaramente $\mp\infty$ a seconda che $x_0\gtrless 0$. In un punto $(0,y_0)$ con $y_0\neq 0$, preso $0<\varepsilon<|y_0|$ e considerata la semipalla di centro tale punto e raggio ε contenuta nel dominio, in essa si ha che $x\log(2-\frac{y_0+\varepsilon}{x}) < f(x,y) < x\log(2-\frac{y_0-\varepsilon}{x})$ (ciò vale sia quando $y_0>0$, caso in cui la semipalla è quella con $x<0$, sia quando $y_0<0$, caso in cui la semipalla è quella con $x>0$), da cui per il teorema dei carabinieri segue che il limite di f è 0. Quanto all'origine $O(0,0)$, tendendovi lungo $y = x$ il limite è 0 (e tale resta anche tendendovi lungo ogni altra retta $y = mx$ contenuta nel dominio, ovvero con $m<2$), ma il limite non può essere 0 perché in ogni intorno di O vi sono altri punti della retta $y = 2x$ in cui il limite è ∞ (mentre, se il limite fosse 0, per definizione dovrebbe esistere un intorno di O nel quale $|f(x,y)|<1$), dunque in O il limite non esiste; a tal proposito notiamo anche che quando $r\to 0$ si ha che $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos\theta\,\log(2-\operatorname{tg}\theta)$ effettivamente tende a 0 ma non in modo uniforme rispetto a $-\frac{\pi}{2}<\theta<\operatorname{arctg} 2$. Quanto infine a ∞_2, tendendovi lungo $y = x$ il limite è 0 mentre tendendovi lungo $y = \frac{1}{2}x$ il limite è $\mp\infty$, pertanto anche in questo caso il limite non esiste.

(b) L'insieme di integrazione $E = \{(x,y) : 0<x<1,\ 0<y<2x\}$ è contenuto nel dominio di f, e su esso f è continua ma ne' limitata ne' a segno costante, dunque va prestata particolare attenzione perché l'integrale di Lebesgue potrebbe anche non avere senso (ciò accadrebbe nel caso in cui entrambi gli integrali delle sue parti positiva e negativa $f^\pm$ fossero infiniti). Notiamo che, posti $E_\pm = \{(x,y)\in E : x\gtrless y\}$ si ha $E = E_-\cup E_+$ (a meno di insiemi trascurabili) e $f\gtrless 0$ su $E_\pm$, dunque $\int_E f^\pm(x,y)\,dx\,dy = \pm\int_{E^\pm} f(x,y)\,dx\,dy$: esaminiamo dunque i due singoli integrali $\int_{E^\pm} f(x,y)\,dx\,dy$, in cui f ha segno costante e che dunque, convergano essi o no, possono essere affrontati come integrali iterati, e poi trarremo le debite conclusioni circa l'esistenza di $\int_E f(x,y)\,dx\,dy$ (più precisamente, se almeno uno dei due sarà finito avrà senso definire $\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_E f^+(x,y)\,dx\,dy - \int_E f^-(x,y)\,dx\,dy = \int_{E^+} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{E^-} f(x,y)\,dx\,dy$). • Si ha $\int_{E^+} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=1} dx\int_{y=0}^{y=x} x\,\log(2-\frac{y}{x})\,dy = \int_{x=0}^{x=1} x(\,(y-2x)(\log(2-\frac{y}{x})-1)\,]_{y=0}^{y=x}\,dx = \int_0^1(-x(-1)-(-2x)(\log 2-1))\,dx = (2\log 2-1)\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2\log 2-1}{3}$, dunque finito (e >0). • Si ha $\int_{E^-} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=1} dx\int_{y=x}^{y=2x} x\,\log(2-\frac{y}{x})\,dy = \int_{x=0}^{x=1} x(\,(y-2x)(\log(2-\frac{y}{x})-1)\,]_{y=x}^{y=2x}\,dx = \int_0^1(0-(-x)(-1))\,dx = -\int_0^1 x^2\,dx = -\frac{1}{3}$, pure esso finito (e <0). • Dunque ha senso ed è finito anche $\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_E f^+(x,y)\,dx\,dy - \int_E f^-(x,y)\,dx\,dy = \int_{E^+} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{E^-} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{2\log 2-1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}(1-\log 2) < 0$.

3. (a) (Figura 3) L'area della zona piana $A = \{(x,z) : x^2+z^2\leq R^2,\ z>0,\ x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}R\}$ può essere calcolata agevolmente

per differenza, vedendo A come $A' \setminus A''$ ove A' è il settore circolare dato (in coordinate polari (ρ,ψ) del piano (x,z)) da $0 \le \psi \le \frac{\pi}{4}$ e $0 \le \rho \le R$, e A'' è il triangolo $\{(x,z) : 0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}R,\, 0 \le z \le x\}$: si ottiene dunque $\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}R^2 - \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}R)^2 = \frac{\pi-2}{8}R^2$. Anche il calcolo delle coordinate del baricentro può procedere per differenza tra settore circolare e triangolo: essendo $\int_{A'} x\,dx\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\psi \int_0^R \rho\cos\psi\,\rho\,d\rho = \frac{\sqrt{2}}{6}R^3$ e $\int_{A''} x\,dx\,dz = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} dx \int_0^x x\,dz = \frac{1}{6\sqrt{2}}R^3$ otteniamo $x_G = \frac{1}{\mathrm{Area}(A)}(\int_{A'} x\,dx\,dz - \int_{A''} x\,dx\,dz) = \frac{4}{3\sqrt{2}(\pi-2)}R$; in modo simile si ottiene $z_G = \frac{1}{\mathrm{Area}(A)}(\int_{A'} z\,dx\,dz - \int_{A''} z\,dx\,dz) = \frac{2(4\sqrt{2}-5)}{\sqrt{2}(\pi-2)}R$. A questo punto, per trovare il volume di D conviene usare il teorema di Guldino per i volumi dei solidi di rotazione, ottenendo $\frac{\pi}{2}x_G\,\mathrm{Area}(A) = \frac{\pi}{12\sqrt{2}}R^3$. Passiamo infine al momento d'inerzia $\mathcal{I}$ di D rispetto all'asse z: D si può parametrizzare naturalmente in coordinate cilindriche (r,θ,z) con $(r,z) \in A$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, dunque, detta μ la densità di massa, si ottiene $\mathcal{I} = \int_D \mu(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \mu\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_A r^2\,r\,dr\,dz = \frac{\pi}{2}\mu\int_A r^3\,dr\,dz$. Il calcolo di $\int_A r^3\,dr\,dz$ può essere fatto ancora una volta per differenza tra A' e A'', ma giusto per cambiare lo facciamo usando la formula di Green (per maggiori spiegazioni sulla quale rimandiamo a (d)), ottenendo $\int_{\partial A} \frac{1}{4}r^4\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}R^4\cos^4\psi\,R\cos\psi\,d\psi - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} \frac{1}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2}R)^4\,dz = \frac{1}{4}R^5\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^5\psi\,d\psi - \frac{\sqrt{2}}{32}R^5 = \frac{7\sqrt{2}}{120}R^5$. In conclusione vale $\mathcal{I} = \frac{\pi}{2}\mu\int_A r^3\,dr\,dz = \frac{7\pi\sqrt{2}}{240}\mu\,R^5$.

(b) L si parametrizza naturalmente con gli angoli $\psi \in [0,\frac{\pi}{4}]$ formato dal vettore posizione col piano orizzontale (x,y) e $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$ delle coordinate cilindriche, avendo dunque $\phi(\psi,\theta) = (x(\psi,\theta),\, y(\psi,\theta),\, z(\psi,\theta)) = (R\cos\psi\cos\theta,\, R\cos\psi\sin\theta,\, R\sin\psi)$: l'elemento d'area risulta $d\sigma = R^2\cos\psi\,d\psi\,d\theta$, da cui $\mathrm{Area}(L) = \int_L d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}} R^2\cos\psi\,d\psi = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}R^2$. Usando invece Guldino, possiamo parametrizzare l'arco Γ di curva sul piano (x,z) che descrive L tramite $(x(\psi),\, z(\psi)) = (R\cos\psi,\, R\sin\psi)$, da cui $\mathrm{Area}(L) = \frac{\pi}{2}\int_\Gamma x\,d\ell = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} R\cos\psi\,R\,d\psi = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}R^2$, come già ottenuto in precedenza.

(c) Va verificato che $\Phi_L(\nabla\times F) = \oint_{\partial L} F\cdot d\vec{\ell}$, ove $\nabla\times F = (0,-1,0)$ è il rotore di $F = (0,0,x)$. Per L usiamo ancora la parametrizzazione $\phi(\psi,\theta) = (x(\psi,\theta),\, y(\psi,\theta),\, z(\psi,\theta)) = (R\cos\psi\cos\theta,\, R\cos\psi\sin\theta,\, R\sin\psi)$ con $\psi \in [0,\frac{\pi}{4}]$ e $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$: poiché la normale positiva a L che ne risulta è quella che entra nella sfera (verificare con le tre dita), l'orientazione indotta sul bordo ∂L è quella secondo cui il bordo, visto da fuori, è percorso in senso orario. • Si calcola $\Phi_L(\nabla\times F) = \int_{[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \det\begin{pmatrix} 0 & -R\sin\psi\cos\theta & -R\cos\psi\sin\theta \\ -1 & -R\sin\psi\sin\theta & R\cos\psi\cos\theta \\ 0 & R\cos\psi & 0 \end{pmatrix} d\psi\,d\theta = R^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\psi\,d\psi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta = R^2(\frac{1}{2}(\psi + \sin\psi\cos\psi)]_0^{\frac{\pi}{4}}(-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi+2}{8}R^2$. • Il campo F, ovunque parallelo all'asse z, è ortogonale ai due tratti orizzontali e nullo sul tratto nel piano $x=0$ del circuito ∂L, dunque l'unico contributo a $\int_{\partial L} F\cdot dx$ viene dall'arco Γ, che stante l'orientazione oraria di ∂L va percorso dal basso verso l'alto: usando la parametrizzazione di Γ già vista nel punto precedente otteniamo dunque $\int_{\partial L}\omega = \int_0^{\frac{\pi}{4}} R\cos\psi\,R\cos\psi\,d\psi = R^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\psi\,d\psi = \frac{\pi+2}{8}R^2$, come già trovato.

(d) La porzione B della frontiera di D sul piano orizzontale (x,y) è il quarto di corona circolare compreso tra i raggi $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ e R: con le coordinate polari si ottiene $\int_B xy^2\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^R (r\cos\theta)(r^2\sin^2\theta)\,r\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^R r^4\,dr = (\frac{1}{3}\sin^3\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{5}r^5]_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^R = \frac{1}{15}(1-\frac{1}{4\sqrt{2}})R^5$. • Ricordiamo la formula di Green: se W è un aperto di $\mathbb{R}^2$, $U \subset W$ un aperto con bordo regolare ∂U tutto contenuto in W e $f,g : W \to \mathbb{R}$ due funzioni $\mathcal{C}^1$, si ha che $\oint_{\partial U}(f\,dx + g\,dy) = \int_U \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy$ (ove si intende che ∂U è orientato in senso antiorario). Nel nostro caso abbiamo $W = \mathbb{R}^2$ e $U = B$; per ottenere la funzione integranda x^2y possiamo ad esempio scegliere $(f,g) = (0,\frac{1}{2}x^2y^2)$, dunque si tratta di calcolare $\int_{\partial B}\frac{1}{2}x^2y^2\,dy$. Poiché la forma $\frac{1}{2}x^2y^2\,dy$ è nulla sugli assi, i contributi significativi all'integrale provengono dai due tratti curvilinei esterno e interno, percorsi rispettivamente in su e in giù: usando l'ovvia parametrizzazione polare si ha allora $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(R\cos\theta)^2(R\sin\theta)^2\,R\cos\theta\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}R\cos\theta)^2(\frac{\sqrt{2}}{2}R\sin\theta)^2\,\frac{\sqrt{2}}{2}R\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{4\sqrt{2}})R^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin^2\theta\,d\theta =$ [posto $u = \sin\theta$] $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{4\sqrt{2}})R^5\int_0^1 u^2(1-u^2)\,du = (1-\frac{1}{4\sqrt{2}})R^5(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5]_0^1 = \frac{1}{15}(1-\frac{1}{4\sqrt{2}})R^5$, come già trovato in precedenza.

4. (i) (Figura 4) Nell'equazione differenziale totale $\omega = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = 0$ con $p(x,y) = 2xy-1$ e $q(x,y) = -x^2$, la forma ω non ha punti singolari (infatti il sistema $p(x,y) = q(x,y) = 0$ non ha soluzioni), e non è esatta in quanto $\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 4x \neq 0$. Tuttavia, dopo aver notato che $x=0$ è una curva integrale dell'equazione, notiamo anche che la funzione $\frac{1}{q}(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}) = -\frac{4}{x}$ non dipende da y, dunque un fattore integrante è $\exp(\int(-\frac{4}{x})\,dz) = \frac{1}{x^4}$: in effetti la forma $\frac{1}{x^4}\omega$ è esatta (perché chiusa in ciascuno dei semipiani $x \gtrless 0$), con primitiva $F(x,y) = \frac{1}{3x^3} - \frac{y}{x^2}$. Le curve integrali dell'equazione totale sono dunque la già trovata $x=0$, e le curve di livello $F(x,y) = k$: quanto a queste ultime, se $k=0$ si trova l'iperbole equilatera $xy = \frac{1}{3}$, e in generale le altre curve $y = \frac{1-3kx^3}{3x}$ sono facilmente disegnabili (vedi in figura). In particolare si noti che, detta C_k la curva data da tale equazione, la curva C_{-k} è la simmetrizzata di C_k rispetto all'origine (ovvero vale $(x,y) \in C_{-k}$ se e solo se $(-x,-y) \in C_k$); inoltre C_k ha un asintoto in $x=0$, e quando $k \neq 0$ ha un solo zero in $x = (3k)^{-\frac{1}{3}}$ (ove per $k<0$ si intende che la radice cubica è negativa) ed è asintotica alla parabola $y = -kx^2$.

(ii) Il sistema autonomo nel piano naturalmente associato all'equazione totale data è $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = 2xy - 1 \end{cases}$. Alle domande di questo punto si è già sostanzialmente risposto nel precedente punto (i): il sistema non ha alcun equilibrio (l'equazione totale non ha punti singolari), l'integrale primo è la funzione $F(x,y)$, e le orbite sono i singoli rami connessi delle curve integrali dell'equazione descritte in precedenza. L'unica cosa rimasta da discutere sono i versi di percorrenza di ciascuna orbita, ma anche questo è immediato: per le orbite del tipo $F(x,y) = k$, ovvero i rami delle curve $y = \frac{1-3kx^3}{3x}$, essendo $\dot{x} = x^2 > 0$ esse saranno percorse necessariamente nel verso delle x crescenti, mentre sulla orbita $x=0$ (ovvero l'asse y) si ottiene

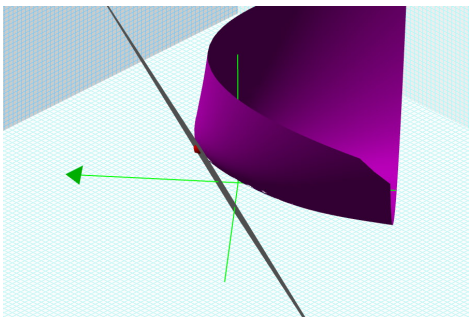
$\dot y \equiv -1$ e dunque l'asse verrà percorso in modo uniforme verso il basso, con legge oraria $y(t) = -t + y_0$ (ove $y_0 = y(0)$).

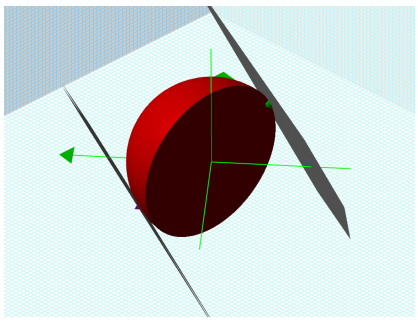
(iii) Per quanto detto prima su simmetria delle curve C_k e verso di percorrenza delle orbite, delle parità proposte l'unica che potrebbe esserci è quella per cui se $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) : I \to \mathbb{R}^2$ è soluzione allora anche $-\varphi(-t) = (-\varphi_1(-t), -\varphi_2(-t)) : -I \to \mathbb{R}^2$ lo è, ove $-I$ è l'intervallo opposto di I. Ed è vero: detta $\psi(t) := -\varphi(-t)$ (dunque $(\psi_1(t), \psi_2(t)) = (-\varphi_1(-t), -\varphi_2(-t))$) si ha che $\begin{cases} \dot\psi_1(t) = \dot\varphi_1(-t) = \varphi_1(-t)^2 = (-\varphi_1(-t))^2 = \psi_1(t)^2 \\ \dot\psi_2(t) = \dot\varphi_2(-t) = 2\varphi_1(-t)\varphi_2(-t) - 1 = 2(-\varphi_1(-t))(-\varphi_2(-t)) - 1 = 2\psi_1(t)\psi_2(t) - 1 \end{cases}$, come si voleva.

(iv) • Se il dato iniziale è con $x_0 = 0$ abbiamo già risposto nel punto (ii): la soluzione è $(x(t), y(t)) = (0, -t + y_0)$, che è definita su tutto $\mathbb{R}$ e percorre uniformemente l'asse y verso il basso. • Se invece il dato iniziale è con $x_0 \neq 0$, da $\dot x = x^2$ si ricava facilmente che $x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$: ne consegue $\dot y = 2\frac{x_0}{1-x_0 t} y - 1$, ovvero l'equazione lineare $\dot y + 2\frac{x_0}{x_0 t - 1} y = -1$. Una primitiva di $u(t) = 2\frac{x_0}{x_0 t - 1}$ è $U(t) = 2\log|x_0 t - 1| = \log(x_0 t - 1)^2$, e $\int e^{U(t)}(-1)\,dt = -\frac{1}{3x_0}(x_0 t - 1)^3$: si ha dunque $y(t) = e^{-U(t)}(\int_0^t e^{U(\tau)}(-1)\,d\tau + y_0\, e^{U(0)}) = \frac{1}{(x_0 t-1)^2}(-\frac{1}{3x_0}(x_0 t - 1)^3 - \frac{1}{3x_0} + y_0) = \frac{1}{3x_0}(\frac{3x_0 y_0 - 1}{(x_0 t-1)^2} + 1 - x_0 t)$. La soluzione è allora $(x(t), y(t)) = (\frac{x_0}{1-x_0 t}, \frac{1}{3x_0}(\frac{3x_0 y_0 - 1}{(x_0 t-1)^2} + 1 - x_0 t))$, definita sull'intervallo $]-\infty, \frac{1}{x_0}[$ (se $x_0 > 0$) o sull'intervallo $]\frac{1}{x_0}, +\infty[$ (se $x_0 < 0$), intorni in ogni caso dell'istante iniziale $t = 0$.

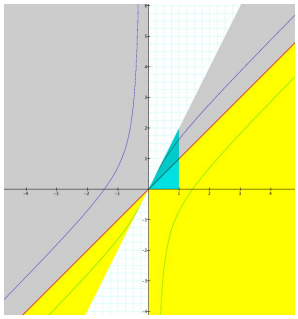
5. (a) L'equazione differenziale $y'' + (1-2i)y' - 2iy = 2\cos t - 5e^{-t}$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, con termine non omogeneo $\beta(t) = 2\cos t - 5e^{-t}$ definito su tutto $\mathbb{R}$: sappiamo che allora l'integrale generale S è uno spazio affine di dimensione 2 di funzioni $y(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$, ottenuto traslando lo spazio vettoriale 2-dimensionale S_0 delle soluzioni dell'equazione omogenea associata con una qualsiasi soluzione $\tilde y(t)$ dell'equazione completa. • L'equazione caratteristica $\tau^2 + (1-2i)\tau - 2i = 0$ ha radici $2i$ e -1, dunque $S_0 = \{a_1 e^{2it} + a_2 e^{-t} : a_1, a_2 \in \mathbb{C}\}$. Essendo poi $2\cos t = e^{it} + e^{-it}$, iniziamo trovando due soluzioni particolari per e^{it} e e^{-it} per poi sommarle: esse saranno rispettivamente del tipo $u\,e^{it}$ e $v\,e^{-it}$ con u, v da determinare, e i calcoli danno $u = \frac{1+i}{2}$ e $v = -\frac{1-i}{6}$. Quanto a $-5e^{-t}$, poiché -1 è radice caratteristica semplice una soluzione particolare sarà del tipo $w\,t\,e^{-t}$, e i calcoli danno $w = 1 - 2i$. Una soluzione particolare per $\beta(t) = 2\cos t - 5e^{-t}$ sarà pertanto $\tilde y(t) = \frac{1+i}{2} e^{it} - \frac{1-i}{6} e^{-it} + (1-2i)\,t\,e^{-t}$, da cui l'integrale generale risulta essere $S = \{a_1 e^{2it} + (a_2 + (1-2i)\,t)\,e^{-t} + \frac{1+i}{2} e^{it} - \frac{1-i}{6} e^{-it} : a_1, a_2 \in \mathbb{C}\}$.

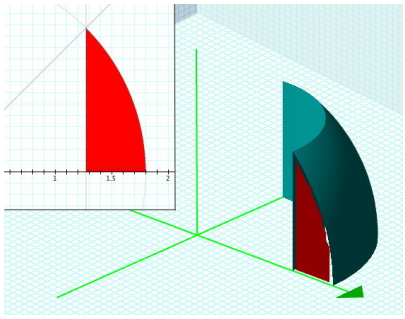
(b) Posto $Y(t) = \binom{y_1(t)}{y_2(t)}$, il sistema $Y' = A\,Y + b(t)$ equivalente all'equazione data è quello con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2i & -1+2i \end{pmatrix}$ e $b(t) = \binom{0}{\beta(t)} = \binom{0}{2\cos t - 5e^{-t}}$. Già sappiamo che gli autovalori di A sono $2i$ e -1, e che una risolvente per il sistema omogeneo associato è la matrice wronskiana delle soluzioni $\{e^{2it}, e^{-t}\}$, ovvero $W(t) = \begin{pmatrix} e^{2it} & e^{-t} \\ 2i\,e^{2it} & -e^{-t} \end{pmatrix}$: otteniamo dunque $e^{tA} = W(t)\,W(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2it} & e^{-t} \\ 2i\,e^{2it} & -e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2i & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1-2i}{5}\begin{pmatrix} e^{2it} & e^{-t} \\ 2i\,e^{2it} & -e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2i & -1 \end{pmatrix} = \frac{1-2i}{5}\begin{pmatrix} e^{2it} + 2i\,e^{-t} & e^{2it} - e^{-t} \\ 2i\,(e^{2it} - e^{-t}) & 2i\,e^{2it} + e^{-t} \end{pmatrix}$. Infine, per trovare la soluzione $Y_0(t)$ del sistema con condizione iniziale nulla (ovvero $Y_0(0) = 0$) si può usare la formula $Y_0(t) = e^{tA}\int_0^t e^{-\tau A}\,b(\tau)\,d\tau$, o si può ricordare che naturalmente sarà $Y_0(t) = \binom{y_{0,1}(t)}{y_{0,2}(t)} = \binom{y_0(t)}{y_0'(t)}$ ove $y_0(t)$ è la soluzione in S tale che $y_0(0) = y_0'(0) = 0$ (i calcoli dovrebbero dare $(a_1, a_2) = (\frac{1+8i}{3}, -\frac{2(1+5i)}{3})$).

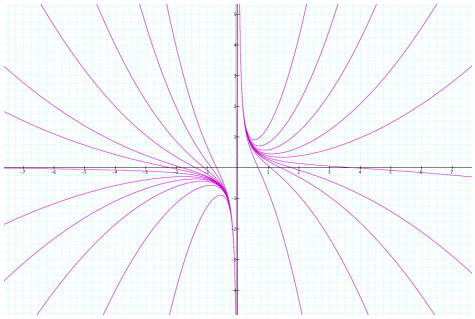




1a. Ex. 1: la superficie S, il punto A e le curve di livello di f. **1b.** Ex. 1: il compatto K e le curve di livello di f.







2. Ex. 2: segno, zeri, curve di livello, l'insieme E. **3.** Ex. 3. la figura piana A e il solido D. **4.** Ex. 4: alcune curve integrali.

1. (a) Quali superfici di livello di $g(x,y,z) = x^2 + yz - \log(x - y + 2z)$ sono regolari? Detta S quella di $A(0,1,1)$, trovare lo spazio tangente affine e una parametrizzazione locale di S in A.

(b) Dire per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che A è stazionario per $f(x,y,z) = x + \alpha y + z$ su S, determinandone la natura. Trovare poi gli estremi di tale f su $K = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 6,\ x + y \ge 0\}$.

(a) $\nabla g = \left(2x - \frac{1}{x-y+2z},\ z + \frac{1}{x-y+2z},\ y - \frac{2}{x-y+2z}\right)$

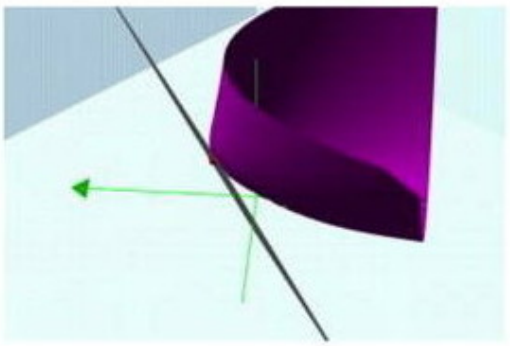
$\nabla g = 0$ ... mai. Dunque tutte le sup. di livello di g sono regolari.

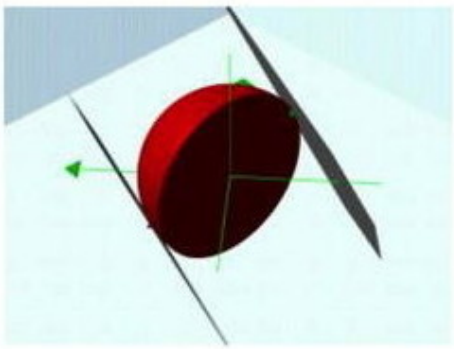
$g(A) = 1$, $\nabla g(A) = (-1, 2, -1) \Rightarrow$ sp. tg. affine $x - 2y + z + 1 = 0$

Parametrizzazione: $\frac{\partial g}{\partial x}(A) = -1 \neq 0 \rightsquigarrow x(y,z)$ con $x(1,1) = 0$,

$\nabla x(1,1) = (2,-1)$ (e con conti ulteriori: $Hl_x(1,1) = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$)

dunque $\gamma(y,z) = (x(y,z), y, z)$ (parametrizzazione locale di S attorno a A)





(b) $\nabla f = (1, \alpha, 1)$ deve essere $\parallel \nabla g(A) = (-1, 2, -1) \iff \alpha = -2$

(notazione di A: $F(y,z) := f(x(y,z), y, z) = x(y,z) - 2y + z$

$F(1,1) = f(0,1,1) = -1$,

$\nabla F(y,z) = (x_y - 2,\ x_z + 1) \Rightarrow \nabla F(1,1) = (0,0)$ (ok)

$Hl_F(y,z) = H_x(y,z) \Rightarrow Hl_F(1,1) = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ DEF. POSITIVA $\Rightarrow$ pto di minimo locale stretto

Nei punti interni di K è $\nabla f \neq 0 \Rightarrow$ estremi assunti sul bordo.

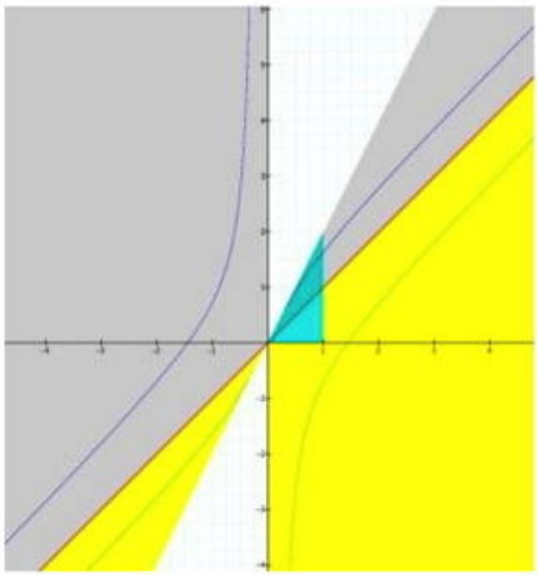
Dettagli della ricerca nelle note (vedi anche la figura).

2. Si consideri la funzione $f(x,y) = x\,\log(2 - \frac{y}{x})$.

(a) Studiare dominio, zeri, segno, curve di livello e limiti interessanti di f.

(b) Dire se ha senso l'integrale di f su $E = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 2x\}$; se sì, calcolarlo.

(a) Dominio: parte colorata. f positiva / negativa in zone gialle / grigie.
Gli zeri di f: retta rossa $y = x$.
Dettagli nelle note.



(b) Insieme E è azzurro.
Su esso, f non è né limitata né a segno costante.
Zone di positività / negatività:

$$E_\pm = \{(x,y) \in E : x \gtrless y\}.$$

Esaminiamo $\int_{E^\pm} f\,dx\,dy$ con F+T:
affinché $\int_E f\,dx\,dy$ esista dovranno essere entrambi finiti, e in tal caso $\int_E f = \overbrace{\int_{E_+} f}^{>0} + \overbrace{\int_{E_-} f}^{<0}$.

$$\int_{E^+} f\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=1} dx \int_{y=0}^{y=x} x \log(2 - y/x)\,dy = \int_{x=0}^{x=1} x\left((y-2x)\left(\log(2-y/x) - 1\right)\right]_{y=0}^{y=x} dx$$

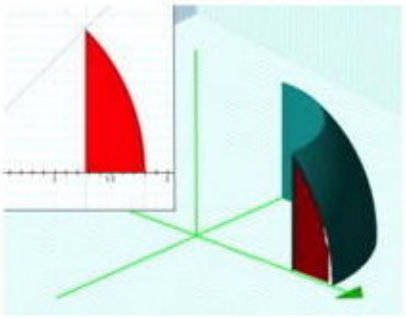
$$= (2\log 2 - 1)\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2\log 2 - 1}{3} \quad \text{finito } (e > 0)$$

$$\int_{E^-} f\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=1} dx \int_{y=x}^{y=2x} x \log(2 - y/x)\,dy = \dots = -\int_0^1 x^2\,dx = -\frac{1}{3} \quad \text{finito } (e < 0)$$

Dunque esiste $\int_E f\,dx\,dy = \frac{2\log 2 - 1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}(1 - \log 2) < 0$

3. Si consideri nel piano verticale (x,z) l'insieme $A=\{(x,z): x^2+z^2\le R^2,\ z>0,\ x\ge \frac{\sqrt{2}}{2}R\}$, e sia D il solido di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando A di un quarto di giro in verso antiorario attorno l'asse z.

(a) Determinare area e baricentro di A, volume e momento d'inerzia di D rispetto all'asse z.
(b) Parametrizzare la porzione L della frontiera di D che fa parte della superficie sferica esterna; calcolarne poi l'area in due modi, sia usando la parametrizzazione che il teorema di Guldino.
(c) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per L e per il campo $F=(0,0,x)$.
(d) Detta B la porzione della frontiera di D sul piano orizzontale (x,y), calcolare $\int_B xy^2\,dx\,dy$ sia direttamente che tramite la formula di Green, verificando che il risultato non cambia.



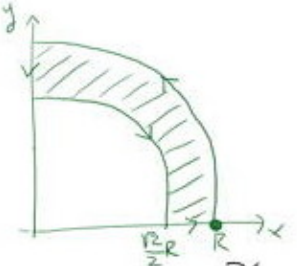
(a) Area (per dilatazione): $\frac{\pi-2}{8}R^2$
Baricentro (calcolo per dilatazione) e
Volume (con Guldino): vedi note

(b) Parametrizzo L con $\psi=\frac{\pi}{2}-\varphi$ (colatitudine) e θ (longitudine), con $0\le\psi\le\frac{\pi}{4}$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$
$\gamma(\psi,\theta)=(R\cos\psi\cos\theta, R\cos\psi\sin\theta, R\sin\psi)$
$d\sigma = R^2\cos\psi\,d\psi\,d\theta \Rightarrow \text{Area}(L)=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\pi/4}R^2\cos\psi\,d\psi=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}R^2$

Alternativa con Guldino: arco di circ $\Gamma:(R\cos\psi, R\sin\psi)$
dopo $\text{Area}(L)=\pi/2\int_\Gamma x\,dl=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/4}R\cos\psi\cdot R\,d\psi=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}R^2$.

(c) $F=(0,0,x) \Rightarrow \nabla\times F=(0,-1,0)$
Param. $\gamma(\psi,\theta)$ ha normale all'esterno entrante $\Rightarrow$
orientazione all'esterno di ∂L è in senso orario (vista da fuori).
Si calcola $\Phi_L(\nabla\times F)=\frac{\pi+2}{8}R^2$ (altro calcolo, vedi note)
D'altra parte F ($\parallel$ asse z) è $\perp$ tratti orizzontali di ∂L
e nulla su piano $x=0$ $\Rightarrow \oint_{\partial L}F\cdot dl=\int_0^{\pi/4}R\cos\psi\cdot R\cos\psi\,d\psi=\frac{\pi+2}{8}R^2$.

(d)



Polari: $\int_B xy^2\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{R}(r\cos\theta)(r\sin\theta)^2 r\,dr=\dots$

Green: $\int_B\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_{\partial B}(f\,dx+g\,dy)$

Per avere $\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=xy^2$ scelgo $f=0$ e $g=\frac{1}{2}x^2y^2$

$$\oint_{\partial B}\tfrac{1}{2}x^2y^2\,dy=\int_0^{\pi/2}\tfrac{1}{2}(R\cos\theta)^2(R\sin\theta)^2R\cos\theta\,d\theta+0+\int_{\pi/2}^{0}\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}R\cos\theta\right)^2\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}R\sin\theta\right)^2$$
$$+\int_{\pi/2}^{0}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}R\cos\theta\right)^2\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}R\sin\theta\right)^2\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}R\cos\theta\,d\theta+0=\dots$$

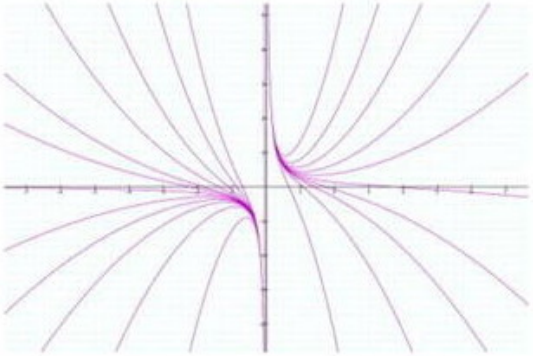
4. È data l'equazione differenziale totale $(2xy-1)\,dx - x^2\,dy = 0$.

(i) Determinare le curve integrali dell'equazione.

(ii) Trovare gli equilibri e un integrale primo del sistema autonomo nel piano naturalmente associato all'equazione. Disegnarne poi le orbite e il verso di percorrenza.

(iii) L'insieme delle soluzioni del sistema ha qualche parità? Nel senso: se $\varphi(t) : I \to \mathbb{R}^2$ (ove I è intervallo di $\mathbb{R}$) è soluzione, lo è necessariamente anche $-\varphi(t)$, o $\varphi(-t)$, o $-\varphi(-t)$, o nessuna?

(iv) Trovare il flusso del sistema, cioè le sue soluzioni al variare del dato $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.



(i) $\omega = \underset{P}{(2xy-1)}\,dx + \underset{Q}{(-x^2)}\,dy$

Nessun punto singolare

Non esatta ma $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\frac{4}{x}$ NON DIPENDE DA y

Fattore integrante $\exp\left(\int(-\frac{4}{x})\,dx\right) = \frac{1}{x^4}$

$\frac{1}{x^4}\omega$ esatta con potenziale $F(x,y)$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2y}{x^3} - \frac{1}{x^4} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow F(x,y) = \frac{1}{3x^3} - \frac{y}{x^2}$$

Curve integrali: $x=0$, e curve $F = K$.

Per $K=0$: iperbole equilatere $xy = 1/3$ (vedi figura)

(ii) Sistema associato $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = 2xy - 1 \end{cases}$

Poco da aggiungere tranne i versi di percorrenza

(iii) Unica proprietà è $-\varphi(-t)$, e lo è (vedi nota)

(iv) Dato iniziale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$

- Se $x_0 = 0$: $x \equiv 0$, $\dot{y} = -1$ $\Rightarrow (x(t), y(t)) = (0, y_0 - t)$
- Se $x_0 \neq 0$: $\dot{x} = x^2 \Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$ e poi

$$\dot{y} = 2\frac{x_0}{1-x_0 t}\,y - 1 \Rightarrow \dot{y} + \frac{2x_0}{x_0 t - 1}\,y = -1 \quad \text{lineare}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{3x_0}\left(\frac{3x_0 y_0 - 1}{(x_0 t - 1)^2} + 1 - x_0 t\right) \quad \text{(vedi nota)}.$$

5. Si consideri l'equazione differenziale $y'' + (1-2i)y' - 2iy = 2\cos t - 5e^{-t}$ nell'incognita $y(t)$.

(a) Descrivere a priori la struttura dell'integrale generale, indi calcolarlo esplicitamente.

(b) Scrivere il sistema del primo ordine $Y' = AY + b(t)$ (ove $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$) equivalente all'equazione data; calcolarne poi e^{tA} e la soluzione con condizione iniziale nulla.

(a) Eq. lineare II° ordine a coeff. costanti: soluzioni su tutto $\mathbb{R}$, formano uno spazio affine di dim. 2 in $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Radici caratteristiche $2i$ e -1 $\Rightarrow$ $S_0 = \langle e^{2it}, e^{-t} \rangle$.
Per soluzione particolare vedi note.

(b) $Y' = AY + b(t)$, con $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2i & -1+2i \end{pmatrix}$,
$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos t - 5e^{-t} \end{pmatrix}$

Risolvente $W(t) = \begin{pmatrix} e^{2it} & e^{-t} \\ 2ie^{2it} & -e^{-t} \end{pmatrix}$

$e^{tA} = W(t) \cdot W(0)^{-1}$.

Per le soluzioni con condizioni iniziali nulle vanno le formule $Y_0(t) = e^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} b(\tau)\, d\tau$

ottenuta $Y_0(t) = \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_0'(t) \end{pmatrix}$ ove $y_0(t)$ è soluzione di (i)

tale che $y_0(0) = y_0'(0) = 0$ (vedi note).