



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di martedì 30/09/2025

www.math.unipd.it/~maraston/Analisi3

Sarò già presente il seguente materiale:

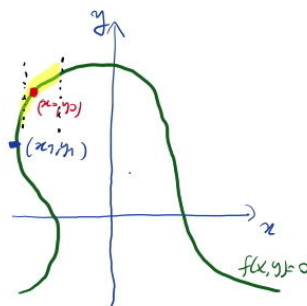
- Analisi 2 (note mie)
- note di Teoria sulle Varietà Differenziali
- Informazioni generali sul corso
 - Orario: MAR, GIO e VEN (Aula C) 8:30-10:30
 - Macroargomenti del corso:
 1. Varietà differenziali e sistemi vincolati
 2. Integrazione multidimensionale (area, volumi)
 3. Teoremi classici d'integrazione di campi vettoriali
(teorema della divergenza / Gauss, formule di Green, formule di Kelvin-Stokes)
 4. Equazioni differenziali ordinarie: teoremi generali
 5. Equazioni differenziali ordinarie LINEARI

VARIEtà DIFFERENZIALI

Iniziamo ricordando il TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA (Dini) in due variabili.

$$\begin{array}{lcl}
 \left\{ \begin{array}{l} f(x,y) = 0 \\ (x_0, y_0) \end{array} \right. & \xrightarrow{?} & \left\{ \begin{array}{l} y = \varphi(x) \\ y_0 = \varphi(x_0) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(ALmeno} \\ \text{LOCALMENTE)} \end{array} \\
 \text{(f continua)} & \xrightarrow{?} & \left\{ \begin{array}{l} x = \psi(y) \\ x_0 = \psi(y_0) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(" " ")} \\ \text{almeno in un intorno di } x_0 \text{ (o di } y_0) \end{array}
 \end{array}$$

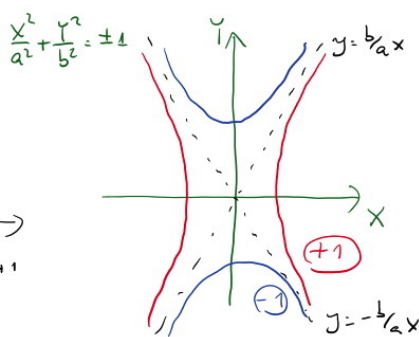
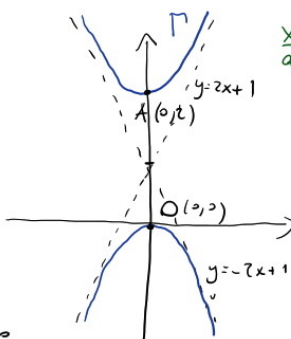
Quando è possibile questo, a seconda di chi è (x_0, y_0) ?



[Ev.]

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 4x^2 - y^2 + 2y = 0 \\ 4x^2 - y^2 + 2y - 1 + 1 &= 0 \\ 4x^2 - (y-1)^2 &= -1 \\ \frac{x^2}{(1/2)^2} - \frac{(y-1)^2}{1^2} &= -1 \end{aligned}$$

Observando Γ , pare che si
possa esprimere $y(x)$ attorno
a ciascun punto di Γ , mentre invece
si può tenere che all'intorno di 0 e di A.



Teorema

(Dini PER FUNZIONI DI DUE VARIABILI)

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $\mathcal{C}^1$ rispetto a y .

Sia $(x_0, y_0) \in A$ in cui $f(x_0, y_0) = 0$

Si assume che $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

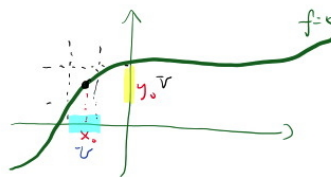
Allora $\exists$ intorno $U \subseteq \mathbb{R}$ di x_0 , intorno $V \subseteq \mathbb{R}$ di y_0

e un'unica funzione continua $\varphi: U \rightarrow V$ t.c.

per $(x, y) \in U \times V$ si abbia che

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$$

Inoltre se f è di classe $\mathcal{C}^k$
(oppure $\mathcal{C}^\infty$) tale è anche φ .



Dim. Supponiamo ad es. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$.

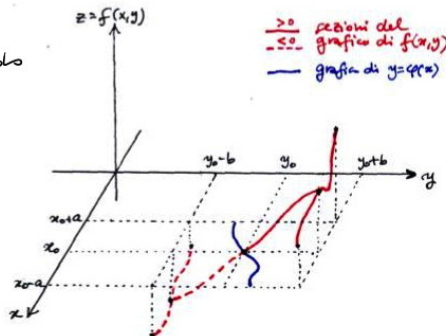
$\frac{\partial f}{\partial y}$ continua $\xRightarrow{\text{PECN. SECONDO}}$ $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ IN TUTTO IL RETTANGOLO PICCOLO

In particolare, $\forall x$ t.c. $|x - x_0| < a$
le x -sezioni

$f_x:]y_0 - b, y_0 + b[\rightarrow \mathbb{R}$, $f_x(y) := f(x, y)$
è strettamente crescente ($f'_x = \frac{\partial f}{\partial y}$)

$$\text{Poi } f(x, y_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x_0 - b, y_0) < 0 \\ f(x_0 + b, y_0) > 0 \end{cases}$$

$\xRightarrow{\text{PECN. SECONDO}}$ tutte le sezioni f_x partono < 0 e arrivano > 0



ESSENZA STRUTTURALE
CICLOLOGIA
 $\forall x \exists! y_x \text{ con } |y_x - y_0| < b \text{ t.c. } f(x, y_x) = 0 \text{ (T. ZER)} \Rightarrow$

Poniamo dunque $\varphi(x) := y_x$

Dalla costruzione è chiaro che

$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$, e che φ è unica.

Continuità di φ (basta vederla in x_0):

dato $\varepsilon > 0$ scegliamo a, b come sopra con $b < \varepsilon$,

allora $\varphi([x_0 - a, x_0 + a]) \subset [y_0 - b, y_0 + b] \subset [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$.

Poi se f è C^1 allora anche φ è C^1 (v. NOTE, Lema Lagrange). $\square$

In generale f è implicita, dunque spesso $y = \varphi(x)$ non si potrà esprimere in forma finita. Tuttavia potremo determinare lo sviluppo di Taylor di $y = \varphi(x)$ attorno a $x = x_0$ (finché consentito dalla regolarità!).

$f(x, y) = 0 \xrightarrow{y = \varphi(x)} f(x, \varphi(x)) \equiv 0$ all'intorno di $x = x_0$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \right) \equiv 0 \quad (*)$$

CALCOLO PER $x = x_0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \varphi'(x_0) = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi'(x_0) = - \frac{\partial_x f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)} \neq 0}$$

Potremmo proseguire derivando (*) di nuovo (rispetto a x) (suppongo f sia C^2 $\Rightarrow$ vale Schwarz)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \varphi' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \varphi' \right) \varphi' + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi'' \equiv 0$$

CALCOLO PER $x = x_0$
E RICAVO $\varphi''(x_0)$

$$\boxed{\varphi''(x_0) = - \frac{\partial_{xx}^2 f(x_0, y_0) + (2 \partial_{xy}^2 f(x_0, y_0) + \partial_{yy}^2 f(x_0, y_0)) \varphi'(x_0)}{\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0}}$$

e dunque

$$y = \varphi(x) = \underbrace{\varphi(x_0)}_{= y_0} + \underbrace{\varphi'(x_0)}_{\text{CALCOLO}} (x - x_0) + \frac{1}{2} \underbrace{\varphi''(x_0)}_{\text{CALCOLO}} (x - x_0)^2 + \mathcal{O}_x(x - x_0)^3$$

Ex. $f(x,y) = 4x^2 - y^2 + 2y = 0 \quad \nabla f = (8x, -2y+2)$

- Esplicitare $y(x)$? Non è più che $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \begin{cases} 4x^2 - y^2 + 2y = 0 \\ -2y + 2 = 0 \end{cases} \begin{cases} y=1 \\ 4x^2 + 1 = 0 \end{cases}$ No!
- Esplicitare $x(y)$? Non è più che $\begin{cases} f=0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}=0 \end{cases} \begin{cases} 4x^2 - y^2 + 2y = 0 \\ 8x = 0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=0, 2 \end{cases}$

Non è più in $O(0,0)$ e $A(0,2)$.
Tutto finito!

Esplicitare $y(x)$ attorno a 0 oppure attorno ad A.

0: $y = \varphi(x)$. $\varphi(0) = 0$; $4x^2 - y^2 + 2y = 0 \xrightarrow{y=\varphi(x)} 8x - 2y\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 0$

$x=0$: $8 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot \varphi'(0) + 2\varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi'(0) = 0$

Derivare ancora: $8x - 2y\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 0 \xrightarrow{dx} 8 - 2(\varphi')^2 - 2y\varphi''(x) + 2\varphi'(x) = 0$

$x=0$: $8 - 2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot \varphi''(0) + 2\varphi'(0) = 0 \Rightarrow \varphi''(0) = -4$

$y = \varphi(x) = 0 + 0 \cdot (x-0) + \frac{1}{2}(-4) \cdot (x-0)^2 + o((x-0)^3)$

$y = -2x^2 + o(x^2)$

In qual caso è possibile anche esprimere $y(x)$ in forma finita:

$4x^2 - y^2 + 2y = 0 \quad y^2 - 2y - 4x^2 = 0 \quad y(x) = 1 \pm \sqrt{1+4x^2}$

Ma attorno a 0 due sono $y(0) = 0 \rightarrow y(x) = 1 - \sqrt{1+4x^2}$

Invece, attorno a $A(0,2)$, sarebbe $y(x) = 1 + \sqrt{1+4x^2}$

Ex. $f(x,y) = 2xe^y + y + 1 = 0$

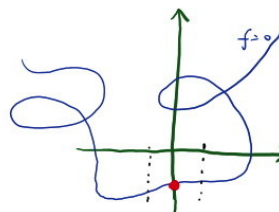
Mostrare che $f=0$ definisce all'intorno di $x_0=0$ un'unica funzione $y = \varphi(x)$ t.c. $\varphi(0) = -1$.

Determinare lo sviluppo di φ fino al II° ordine.

$f(0,-1) = 0 \quad \nabla f = (2e^y, 2xe^y + 1)$

$\nabla f(0,-1) = (2e, 1)$

$\varphi(0) = -1 \quad ; \quad \varphi'(0) = -\frac{2/e}{1} = -2/e$

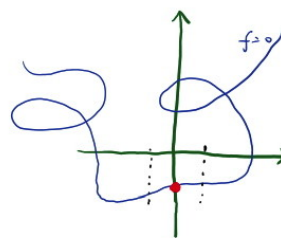


Alternativamente:

$$f=0 \xrightarrow{d/dx} 2e^y + 2xy'e^y + y' = 0 \quad (*)$$

$$\xrightarrow{x=0} 2e^{-1} + 2 \cdot 0 \cdot y'(0) \cdot e^{-1} + y'(0) = 0$$

$$\Rightarrow y'(0) = -2/e$$



Derivata ulteriore (*):

$$2y'e^y + 2y'e^y + 2xy''e^y + 2xy' \cdot y'e^y + y'' = 0$$

$$\xrightarrow{x=0} 2 \cdot (-2/e) \cdot e^{-1} + 2 \cdot (-2/e) \cdot e^{-1} + 2 \cdot 0 \cdot y''(0) \cdot e^{-1} + 2 \cdot 0 \cdot (-2/e)^2 \cdot e^{-1} + y''(0) = 0$$

$$-4/e^2 - 4/e^2 + y''(0) = 0 \Rightarrow y''(0) = 8/e^2$$

$$\text{Dunque } y = \varphi(x) = -1 + (-2/e) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 8/e^2 \cdot x^2 + o(x^2)$$

ESERCIZI

(Risoluzioni in aula, o in calce alle prossime note pdf delle lezioni)

- (1) Da $2e^{xy} + xy^2 + \cos y - 3 \equiv 0$ esplicitare se possibile $y(x)$ oppure $x(y)$ all'intorno delle soluzioni $(0,0)$, determinando lo sviluppo di Taylor al II° ordine.
- (2) L'equazione $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3 + x + y^2 - 2 = 0$ definisce tre funzioni implicite $y_j(x)$ ($j=1,2,3$) all'intorno di $x_0 = 1$: calcolarne gli sviluppi, e viceversa un abbozzo della curva $f(x,y)=0$ nelle strisce verticali attorno a $x=x_0$.