



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 02/10/2025

Il teorema del Dini ha una naturale generalizzazione al caso di più variabili:

Es. 3 variabili
$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ (x_0, y_0, z_0) \end{cases} \leadsto \begin{cases} z = \varphi(x, y) \\ \varphi(x_0, y_0) = z_0 \end{cases}$$



Teorema (Dini per n variabili)

A punto di $\mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $\mathcal{C}^1$ rispetto a x_n .

Si $\underline{x}_0 = (x_0, \dots, x_{n-1}, x_n)$ t.c. $f(\underline{x}_0) = 0$.

Si assume che $\frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \neq 0$.

Allora $\exists$ intorno $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ di $\underline{x}'_0$, intorno $V \subseteq \mathbb{R}$ di x_n

e un'unica $\varphi: U \rightarrow V$ t.c. per $\underline{x} = (\underline{x}', x_n) \in U \times V$ si abbia

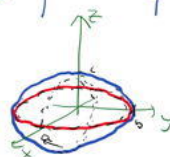
$$f(\underline{x}', x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n = \varphi(\underline{x}').$$

Intorno la regolarità ($\mathcal{C}^k, \mathcal{C}^\infty$) di f deriva anche quella di φ

Es. $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ $f(x, y, z) = 0$

Punti di $f=0$ in cui NON è più semplice far $z = \varphi(x, y)$:

$$\begin{cases} f=0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} f=0 \\ z=0 \end{cases}$$



Anche in quel caso rispetto le condizioni fatte in due variabili,

ad es. sulle sviluppabilità di φ attorno al punto base $\underline{x}'_0$

(calcoli delle derivate parziali $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\underline{x}'_0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(\underline{x}'_0), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}'_0), \dots$)

Calcoliam ad esempio $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\underline{x}'_0)$ per un caso fiss. $1 \leq j \leq n-1$

Si parte da $f(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})) \equiv 0$ all'intorno di $\underline{x}' \sim \underline{x}'_0$

Derivando rispetto x_j :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}', \varphi(\underline{x}')) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}', \varphi(\underline{x}')) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0$$

tutti gli altri addetti
 $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}', \varphi(\underline{x}')) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = 0$
semplici ($1 \leq k \leq n-1, k \neq j$)

Calcol per $\underline{x}' = \underline{x}'_0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\underline{x}'_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\underline{x}'_0) = - \frac{\partial_j f(\underline{x}_0)}{\partial_n f(\underline{x}_0)}$$

Es.

Da $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$ si ricavi $z(x, y)$
t.c. $z(2, 0) = 1$, mostrando che tale funzione implicita ha ivi minimo

$$\nabla f = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) = (4x - 8z, 4y, 2z - 8x - 1)$$

$$f(2, 0, 1) = 0 \quad \nabla f(2, 0, 1) = (0, 0, -15) \leadsto \begin{cases} z(x, y) \\ z(2, 0) = 1 \end{cases} \quad \mathcal{C}^\infty$$

$$\nabla z = (\partial_x z, \partial_y z) \quad \nabla z(2, 0) = \left(-\frac{\partial_x f(2, 0, 1)}{\partial_z f(2, 0, 1)}, -\frac{\partial_y f(2, 0, 1)}{\partial_z f(2, 0, 1)} \right) = (0, 0)$$

Effettivamente $(2,0)$ è punto stazionario per $z(x,y)$.

Per capire il carattere, esamineremo la matrice Hesse in $H_2(2,0)$.

$$4 + 2(\dot{z}_y)^2 + 2z\ddot{z}_{xx} - 8\dot{z}_x - 8\dot{z}_y - 8x\ddot{z}_{xy} - \ddot{z}_{xx} = 0$$

$$\begin{aligned} f=0 \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow 4x + 2z\dot{z}_x - 8z - 8x\dot{z}_x - \dot{z}_x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow 4y + 2z\dot{z}_y - 8x\dot{z}_y - \dot{z}_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow 2\dot{z}_x\dot{z}_y + 2z\ddot{z}_{xy} - 8\dot{z}_y - 8x\ddot{z}_{yy} - \ddot{z}_{xy} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow 2\dot{z}_x\dot{z}_y + 2z\ddot{z}_{xy} - 8\dot{z}_x - 8x\ddot{z}_{xy} - \ddot{z}_{xy} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

uguale (SCHWARZ)

$$\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow 4 + 2(\dot{z}_y)^2 + 2z\ddot{z}_{yy} - 8x\ddot{z}_{yy} - \ddot{z}_{yy} = 0$$

Calcoliamo per $(x,y) = (2,0)$ ricordando che $z(2,0) = 1$

Derivate prime:

$$\dot{z}_x: 8 + 2\dot{z}_x(2,0) - 8 - 16\dot{z}_x(2,0) - \dot{z}_x(2,0) = 0 \Rightarrow \dot{z}_x(2,0) = 0$$

$$\dot{z}_y: 0 + 2\dot{z}_y(2,0) - 8\dot{z}_y(2,0) - \dot{z}_y(2,0) = 0 \Rightarrow \dot{z}_y(2,0) = 0$$

Derivate seconde:

$$\ddot{z}_{xx}: 4 + 0 + 2\ddot{z}_{xx}(2,0) - 0 - 0 - 16\ddot{z}_{xx}(2,0) - \ddot{z}_{xx}(2,0) = 0 \Rightarrow \ddot{z}_{xx}(2,0) = 4/15$$

$$\ddot{z}_{xy}: 0 + 2\ddot{z}_{xy}(2,0) - 0 - 16\ddot{z}_{xy}(2,0) - \ddot{z}_{xy}(2,0) = 0 \Rightarrow \ddot{z}_{xy}(2,0) = 0$$

$$\ddot{z}_{yy}: 4 + 0 + 2\ddot{z}_{yy}(2,0) - 16\ddot{z}_{yy}(2,0) - \ddot{z}_{yy}(2,0) = 0 \Rightarrow \ddot{z}_{yy}(2,0) = 4/15$$

Dunque $H_2(2,0) = \begin{pmatrix} 4/15 & 0 \\ 0 & 4/15 \end{pmatrix}$ def. positiva!

Perciò $(2,0)$ è punto di minimo locale stretto per $z(x,y)$

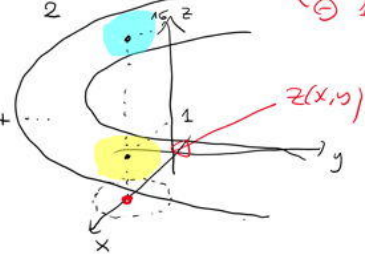
N.B. In quest'ora si potrebbe anche fare i conti per $z(x,y)$ in forma chiusa:

$$z^2 - (8x+1)z + 2x^2 + 2y^2 + 8 = 0 \Rightarrow z = \frac{8x+1 \pm \sqrt{56x^2 + 8y^2 + 16x - 31}}{2}$$

Nel nostro caso interessa $z(x,y) = \frac{8x+1 - \sqrt{\dots}}{2}$

Con questo visto prima, si può sempre capire che

$$z(x,y) = 1 + \underbrace{(0,0)}_{z(2,0)} \cdot \underbrace{(x-2,y-0)}_{\nabla z(2,0)} + \frac{1}{2} \underbrace{(x-2,y-0)}_{\nabla z(2,0)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4/15 & 0 \\ 0 & 4/15 \end{pmatrix}}_{H_2(2,0)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x-2 \\ y-0 \end{pmatrix}}_{\nabla z(2,0)} + \dots$$



Variazioni del Dini per i SISTEMI:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (m \leq n) \quad \begin{matrix} ? \\ \rightsquigarrow \end{matrix}$$

$$\underline{x} = (\underbrace{x_1, \dots, x_{n-m}}_{x'}, \underbrace{x_{n-m+1}, \dots, x_n}_{x''})$$

Vorrei sapere se ad esempio le ultime m variabili (x'') rispetto alle prime $n-m$ (x')

Quando questo è possibile all'interno di una certa soluzione $\underline{x}_0 = (x'_0, x''_0)$ di $f = 0$?

Teorema (Dini per i SISTEMI)

A apert. di $\mathbb{R}^n$, $F = (f_1, \dots, f_m): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua.
e di classe C^1 rispetto $\underline{x}'' = (x_{n-m+1}, \dots, x_n)$

Sia $\underline{x}_0 = (\underline{x}', \underline{x}'') \in A$ t.c. $F(\underline{x}_0) = \underline{0}$ (cioè $f_1(\underline{x}_0) = 0, \dots, f_m(\underline{x}_0) = 0$)

Assumiamo che $\det J_{F, \underline{x}''}(\underline{x}_0) \neq 0$

$$J_F = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \nabla f_1 & \nabla f_m & \\ \hline \hline \hline \nabla f_m & & \\ \hline \hline \hline \end{array} \begin{array}{l} m \\ m-m \\ m \\ m \end{array}$$

Allora $\exists$ intorno $U \subseteq \mathbb{R}^{m-m}$ di $\underline{x}'$

$\exists$ intorno $V \subseteq \mathbb{R}^m$ di $\underline{x}''$ e un'unica $\varphi: U \rightarrow V$ continua t.c.

per $(\underline{x}', \underline{x}'') \in U \times V$ si abbia che

$$F(\underline{x}', \underline{x}'') = \underline{0} \quad (\text{cioè } \begin{cases} f_1(\underline{x}', \underline{x}'') = 0 \\ \vdots \\ f_m(\underline{x}', \underline{x}'') = 0 \end{cases}) \Leftrightarrow \underline{x}'' = \varphi(\underline{x}')$$

Inoltre se F è $\mathcal{C}^k$ ($\mathcal{C}^\infty$) tale è anche φ .

Calcoliamo le matrici jacobine $J_\varphi(\underline{x}')$

$$F(\underline{x}', \varphi(\underline{x}')) = \underline{0} \quad \text{all'intorno di } \underline{x}' = \underline{x}' \quad \xrightarrow{\text{differenziamo in } \underline{x}'}$$

$$J_{F, \underline{x}'}(\underline{x}', \varphi(\underline{x}')) \cdot J_{\varphi, \underline{x}'}(\underline{x}') + J_{F, \underline{x}''}(\underline{x}', \varphi(\underline{x}')) \cdot J_\varphi(\underline{x}') = \underline{0}$$

$$\Rightarrow J_{F, \underline{x}''} \cdot J_\varphi = -J_{F, \underline{x}'} \quad \Rightarrow \quad J_\varphi(\underline{x}') = -(J_{F, \underline{x}''}(\underline{x}', \varphi(\underline{x}')))^{-1} \cdot J_{F, \underline{x}'}(\underline{x}', \varphi(\underline{x}'))$$

Es.

Dal sistema
$$\begin{cases} 2x^2 - y + z^3 - 2t^2 + 11 = 0 \\ x^3y + 5zt + 13 = 0 \end{cases} \quad \text{in } (x, y, z, t)$$

esprimiamo due variabili a scelta rispetto alle altre due attorno alle soluzioni $(x_0, y_0, z_0, t_0) = (-1, 3, -2, 1)$ e calcoliamo in due modi le derivate al I° ordine.

$$F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad F(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z, t) \\ f_2(x, y, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 - y + z^3 - 2t^2 + 11 \\ x^3y + 5zt + 13 \end{pmatrix}$$

$$F(-1, 3, -2, 1) = (0, 0)$$

$$J_F = \begin{pmatrix} 4x & -1 & 3z^2 & -4t \\ 3x^2y & x^3 & 5t & 5z \end{pmatrix} \quad J_F(-1, 3, -2, 1) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 12 & -4 \\ 9 & -1 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

In questo caso tutti i minori 2×2 di $J_F(-1, 3, -2, 1)$ sono non degeneri dunque si può esprimere qualsiasi coppia di variabili rispetto alle altre due.

Esempio $\begin{cases} x(y, t), z(y, t) \\ x(3, 1) = -1, z(3, 1) = -2 \end{cases} \quad \underline{x}' = (y, t) \quad \underline{x}'' = (x, z)$

$$J_{F, (x, z)}(-1, 3, -2, 1) = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \quad \det = -128 \neq 0$$

$$J_{(x, z)}(3, 1) = - \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= - \left(-\frac{1}{128} \right) \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/128 & 25/32 \\ 13/128 & 17/32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_y(3, 1) & \dot{x}_t(3, 1) \\ \dot{z}_y(3, 1) & \dot{z}_t(3, 1) \end{pmatrix}$$

Per cui $\begin{pmatrix} x(y,t) \\ z(y,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/28 & 25/32 \\ 13/28 & 19/32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y-3 \\ t-1 \end{pmatrix} + o(\dots)$

Alternativamente, partendo dal sistema in z (con $x(y,t)$, $z(y,t)$):

$$\begin{cases} 2x^2y + z^3 - 2t^2 + 11 = 0 \\ x^3y + 5zt + 13 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\partial_y} \begin{cases} 4xz - 1 + 3z^2\dot{z}_y = 0 \\ 3x^2\dot{x}_y + x^3 + 5t\dot{z}_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y,t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4\dot{x}_y(3,1) - 1 + 12\dot{z}_y(3,1) = 0 \\ 9\dot{x}_y(3,1) - 1 + 5\dot{z}_y(3,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_y(3,1) = 7/128 \\ \dot{z}_y(3,1) = 13/128 \end{cases}$$

Idem per ∂_t .

ESERCIZI

(3) Da $\sin(xyz) - x^2y - z + 1 = 0$ dire cosa si può esplicitare all'intorno di $(-1, 0, 1)$ e calcolare gli sviluppi.

(4) Dal sistema in (x, y, u, v, w)

$$\begin{cases} x(u+v) + yw = 3 \\ x(u^2+v^2) + yw^2 = 5 \\ x(u^3+v^3) + yw^3 = 9 \end{cases}$$

esplicitare (u, v, w) in funzione di (x, y) attorno alla soluzione $(1, 1, 0, 1, 2)$ e calcolare lo sviluppo al I° ordine.

(5) Dal sistema in (x, y, z)

$$\begin{cases} x^4yz - 3y^3 + 2xz^3 = 3 \\ x^2 - 2y^2 + z^3 - 5z + 4xy + 4 = 0 \end{cases}$$

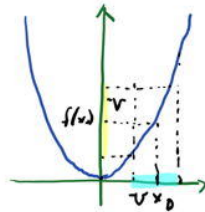
esplicitare in tutti i modi possibili due delle variabili rispetto alla Terza attorno alla soluzione $(0, -1, 2)$ e calcolare gli sviluppi al I° ordine in due modi. Geneticamente, cosa si sta facendo?

DIFFEOMORFISMO LOCALE

Partiamo dal caso di una variabile.

$$f(x) = x^2$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



f non è calco diffeomorfismo
(non è né inj né surj!)
ma lo è all'intorno di ogni $x_0 \neq 0$.
La condizione decisiva è $f'(x_0) \neq 0$

Def. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aplo, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$.
Si dice che f è **DIFFEOMORFISMO LOCALE** IN x_0 di classe $\mathcal{C}^k$
se f lo è all'intorno di x_0 , ovvero se
 $\exists$ intorno U di x_0 t.c. $f|_U: U \rightarrow V = f(U)$
sia diffeomorfismo $\mathcal{C}^k$.

Nel caso di 1 variabile si è capito che la condizione è che
la derivata in x_0 non è annullata. Funzione con anche in generale:

Teorema (FUNZIONE INVERSA)

f diffe locale in $x_0 \Leftrightarrow \det J_f(x_0) \neq 0$.

Dim. $\Rightarrow$ $\exists$ intorno U di $x_0 \in A$ t.c. $U \xrightarrow{f} V = f(U)$ $g \circ f = id_U$
e differenziamo in x_0 otteniamo

$$J_{g \circ f}(x_0) = J_{id_U}(x_0) \quad \text{ovvero} \quad J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0) = I_n$$

Ne segue che $J_f(x_0)$ è invertibile.

$$\Leftrightarrow f: A \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Problema: si possono invertire queste equazioni
esprimendo $x_1, \dots, x_n$ in funzione di $y_1, \dots, y_n$?

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) := y_1 - f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) := y_n - f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Possiamo esprimere le $x_1, \dots, x_n$ in funz. delle $y_1, \dots, y_n$?

Dati: $J_{g,x}(x_0, f(x_0))$ è invertibile, ma

$$J_{g,x}(x_0, f(x_0)) = -J_f(x_0). \quad \text{Ma ciò è vero per ipotesi.} //$$

Esercizio

Calcolare il dominio di $f(x,y) = (\log(xy+1), 2x^2-y^2)$,
 dire in quali punti f è differenziabile e
 sviluppare l'inversa locale di f attorno a $(x_0, y_0) = (2, 1)$
 al 1° ordine. Calcolare infine tale inversa in forma finita.

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad A \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ aperto}$$

$$A = \{(x,y): xy+1 > 0\}$$

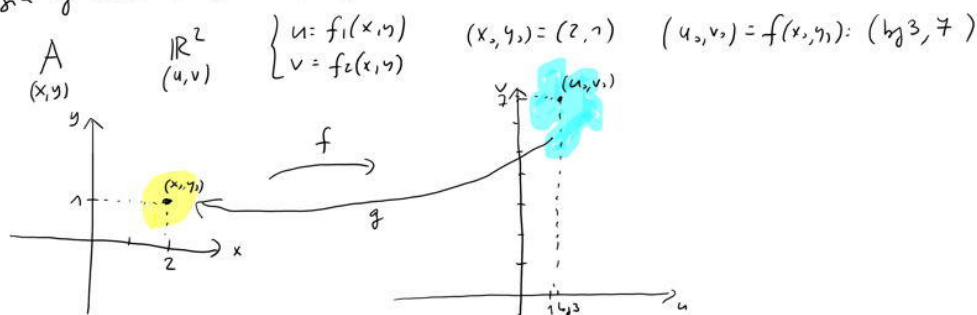
$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{y}{xy+1} & \frac{x}{xy+1} \\ 4x & -2y \end{pmatrix} \quad \det J_f = -\frac{4x^2+2y^2}{xy+1}$$

$$\det J_f \neq 0 \Leftrightarrow (x,y) \neq (0,0)$$

Dunque f è differenziabile $\forall (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$

(in particolare f di certo non è differenziabile in $(0,0)$,
 ma è potuto vedere subito notando che f non è inj poiché $f(-x,-y) = f(x,y)$).

Sia g l'inversa locale di f all'intorno di $(x_0, y_0) = (2, 1)$



$$\begin{aligned} g(u,v) &= g(u_0, v_0) + J_g(u_0, v_0) \begin{pmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + J_f(2,1)^{-1} \begin{pmatrix} u-2 \\ v-1 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u-2 \\ v-1 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & 1/9 \\ 4/3 & -1/18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u-2 \\ v-1 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 2 + 1/3(u-2) + 1/9(v-1) + \dots \\ 1 + 4/3(u-2) - 1/18(v-1) + \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & -2/3 \\ -8 & 1/3 \end{pmatrix}$

Calcoliamo infine l'espressione finita dell'inversa locale

$$\begin{cases} u = \log(xy+1) \\ v = 2x^2 - y^2 \end{cases} \quad \text{all'intorno di } (x_0, y_0) = (2, 1)$$

$$\begin{cases} xy+1 = e^u \\ v = 2x^2 - y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{e^u - 1}{x} \quad \left(\begin{smallmatrix} x=2 \\ y=1 \end{smallmatrix} \right) \\ v = 2x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$2x^2 - \left(\frac{e^u - 1}{x} \right)^2 = v$$

$$2x^4 - vx^2 - (e^u - 1)^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{v \pm \sqrt{v^2 + 8(e^{u_1})^2}}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{v^2 + 8(e^{u_1})^2} + v}{2} = x(u, v)$$

LA funzione
 COL NOME È SPURIA
 (DAREBBE $x^2 < 0$)

$x \sim 2$
 ($x > 0$)

$$y^2 = 2x^2 - v \Rightarrow y = \pm \sqrt{2x^2 - v} = \dots = \frac{\sqrt{v^2 + 8(e^{u_1})^2} - v}{\sqrt{2}} = y(u, v)$$

$y \sim 1$
 ($y > 0$)

Dunque l'universo delle curve è $g(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$
 (ne avremmo già trovato lo sviluppo di Taylor in $(u, v) = (\ln 3, 7)$)