



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 03/10/2025

Ci proponiamo ora di generalizzare quanto ottenuto al Teorema della funzione inversa al caso di funzioni tra spazi di dimensione diverse.

Def. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenziabile in $\underline{x}_0 \in A$.

• Se $n \leq m$, f si dirà INNESSIVA in $\underline{x}_0$ se $df_{\underline{x}_0}$ è inj (ovvero $J_f(\underline{x}_0) = \begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$ ha rango max n)

• Se $m \leq n$, f si dirà SOPPRESSIVA in $\underline{x}_0$ se $df_{\underline{x}_0}$ è surj (ovvero $J_f(\underline{x}_0) = \begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$ ha rango max m)

f si dirà INNESSIONE / SOPPRESSIONE se è inj. / surj. $\forall \underline{x}_0 \in A$

$\mathbb{R} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^3$, $i(x) = (x, 0, 0)$ (più gen.: $\mathbb{R}^n \xrightarrow{i} \mathbb{R}^m$, $x \mapsto (x, 0)$)
INCLUSIONE (include $\mathbb{R}$ dentro $\mathbb{R}^3$ come l'asse x)

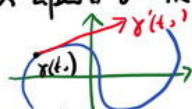
$J_i(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ovviamente iniettiva (come mappa lin. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$)

È l'esempio più semplice di immersione.

Più in generale, si abbia una CURVA PARAMETRICA

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ con I intervallo aperto di $\mathbb{R}$.

$$d\gamma_t = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_m(t) \end{pmatrix} = \gamma'(t),$$



dunque γ è immersiva in $t_0 \Leftrightarrow \gamma'(t_0) \neq 0$ (il vettore tangente non si annulla)

• $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto y$ (più gen.: $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^m$, $(x', x'') \mapsto x''$)
PROIEZIONE (proietta $\mathbb{R}^3$ sull'asse y)

$J_{\pi_2}(x, y, z) = (0 \ 1 \ 0)$ ovviamente surj (come funz. lin. $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$)

È l'esempio più semplice di sommersione.

Più in generale si abbia una FUNZIONE SCALARE

$g: A \rightarrow \mathbb{R}$ con A aperto di $\mathbb{R}^n$.

$$J_g(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \ \dots \ \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \right) \iff \nabla g(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

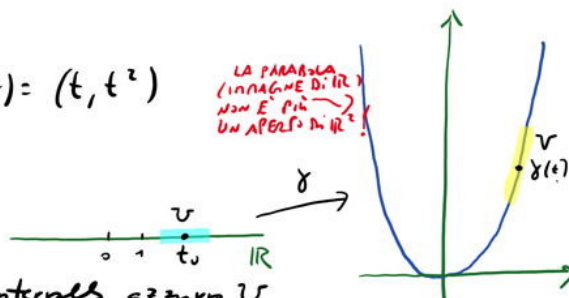
dunque g è sommersiva in $\underline{x}_0 \Leftrightarrow \nabla g(\underline{x}_0) \neq 0$.

Si vorrebbe che all' immersività / suriettività di f in x_0 corrispondesse un' iniettività / suriettività locale di f vicino x_0 :

ad esempio, "iniettività locale" vorrebbe dire che un intorno di x_0 viene mappato diffeomorficamente nella sua immagine. Ma questo è un po' delicato, perché se $n \neq m$ l'immagine può essere più un aperto del dominio, dunque cosa vuol dire "diffeomorfismo"? Noi finora conosciamo solo la nozione di diffeomorfismo tra aperti...

Es $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t, t^2)$

LA PARABOLA (IMMAGINE DI $\mathbb{R}$) NON È PIÙ UN APERTO DI $\mathbb{R}^2$!



Così vuol dire che l'intervallo attorno U è diffeomorfo alla sua immagine, il pezzo di parabola gialla - Dovremo parlarne meglio...

Esercizio

- (6) Dato dove $f(x, y, z) = (2xy + z, 3 - x^2, 1 + yz^2)$ è differenziale, e si suppone l'inversa locale in $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -2)$. Calcolare poi l'immagine dei tre assi coordinati e l'antimmagine di $(0, 0, 0)$.

Va precisato cosa si intende per "Diffeomorfismo" in generale.

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $E \subseteq \mathbb{R}^q$ due sottoinsiemi qualsiasi, $f: D \rightarrow E$ funzione.

• NOZIONE DI CLASSE $\mathcal{C}^k$ IN $x_0 \in D$

Se D è aperto di $\mathbb{R}^p$, già sappiamo.

Altrimenti, chiedo che esistano un intorno $U \subseteq \mathbb{R}^p$ di x_0 e una funzione $\tilde{h}: U \rightarrow \mathbb{R}^q$ t.c. $\tilde{h}$ sia di classe $\mathcal{C}^k$ e $\tilde{h}|_{U \cap D} = h|_{U \cap D}$ (ovvero: h è indotta da una funzione $\tilde{h}$ di classe $\mathcal{C}^k$ su un aperto di $\mathbb{R}^p$)

• NOZIONE DI DIFFEOMORFISMO $\mathcal{C}^k$

h è omeomorfismo, e h e h^{-1} sono di classe $\mathcal{C}^k$ (nel senso appena detto)

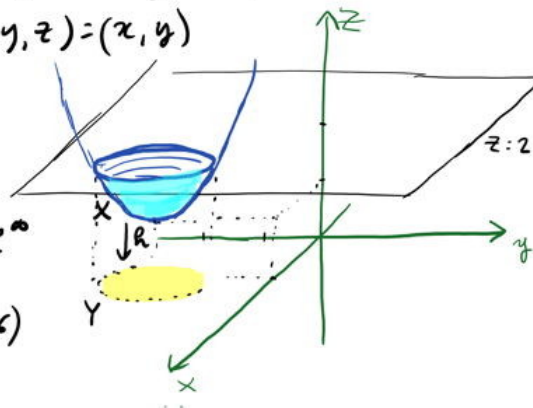
Ex. $X = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6, z < 2\}$

$h: X \rightarrow \mathbb{R}^2, h(x, y, z) = (x, y)$

E' un diffeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$

tra X e $Y = h(X)$:

- h è indotta da $\tilde{h}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\tilde{h}(x, y, z) = (x, y)$ che è $\mathcal{C}^\infty$
- h è biettiva
- $h^{-1}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6)$ è $\mathcal{C}^\infty$.



Possiamo ora enunciare il

Teo. (TEOREMA DELLE IMMERSIONI) $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ con A aperto di $\mathbb{R}^n$, $m \leq n$
 f immersiva in $x_0 \Leftrightarrow \exists$ intorno aperto $U \subseteq A$ di x_0 t.c.
 $f: U \rightarrow V = f(U)$ sia diffeomorfismo
 (cioè: f identifica U con la sua immagine)

Teo. (TEOREMA DELLE SOTTERSIONI) Stavolta sia $m \geq n$.
 f sottomersiva in $x_0 \Leftrightarrow$ "f si comporta localmente come proiezione"
 (enunciato più preciso sulle dispense).

Ex. CURVA OTTO $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin t, \sin 2t)$

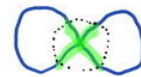
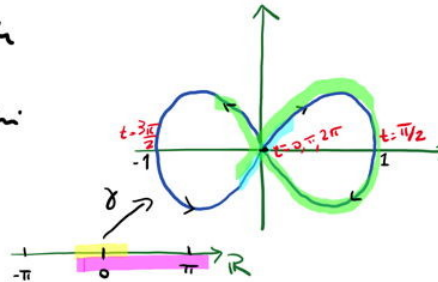
$$\gamma'(t) = (\cos t, \cos 2t) = (0, 0) \text{ impossibile}$$

$\Rightarrow \gamma$ è immersione.

Deve però valere il T. Immersioni:

Vero? S: l'intervallo globale (intorno di $t=0$) è differenziabile alle sue immagini azzurre.

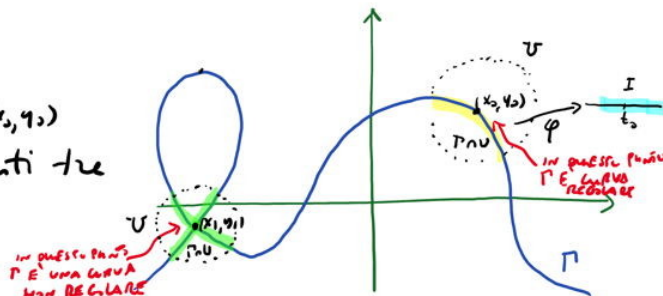
MA un intorno intorno del punto sulla curva non può essere differenziabile a un intervallo...



CURVE PIANE REGOLARI

$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ è CURVA PIANA REGOLARE IN (x_0, y_0)

se è soddisfatta una delle seguenti tre condizioni equivalenti.



(1) FORMA PARAMETRICA: vicino (x_0, y_0) , Γ è differenziabile a un intervallo.

$\exists$ intorno aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ di (x_0, y_0) , $\exists$ intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$

e un diffeomorfismo $\varphi: \Gamma \cap U \rightarrow I$ (CARTE LOCALE DI Γ VICINO (x_0, y_0))

L'inversa $\gamma = \varphi^{-1}: I \rightarrow \Gamma \cap U \subseteq \mathbb{R}^2$ è detta PARAMETRIZZAZIONE LOCALE

Ex. La curva otto è regolare in ogni suo punto tranne che nell'origine.

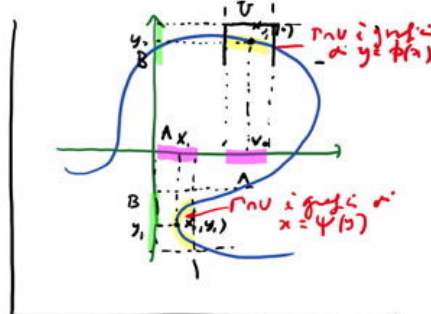
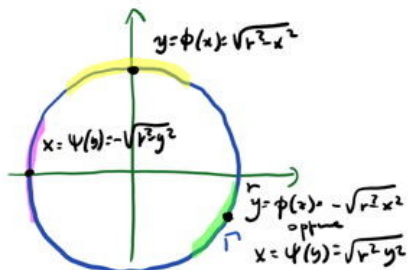
(2) FORMA GRAFICA: vicino (x_0, y_0) , Γ è grafico di una $y = \phi(x)$ (oppure $x = \psi(y)$)

$\exists$ intorno $A \subseteq \mathbb{R}$ di x_0 , $B \subseteq \mathbb{R}$ di y_0 e una $\phi: A \rightarrow B$ (opp. $\psi: B \rightarrow A$)

t.c. posto $U = A \times B$ si ha

$$\Gamma \cap U = \{(x, \phi(x)) : x \in A\} \quad (\text{oppure } \Gamma \cap U = \{(\psi(y), y) : y \in B\})$$

Ex. circonferenza: è curva regolare!

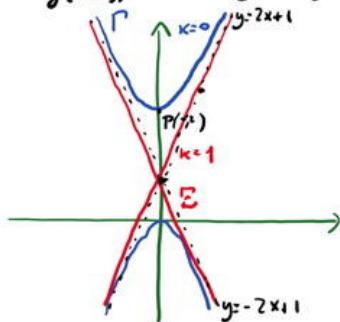


(3) FORMA CARTESIANA (o VINCOLARE): Γ è insieme di livello di una funzione reale

$\exists U$ intorno di (x_0, y_0) in $\mathbb{R}^2$ e $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ col gradiente mai nullo

t.c. $\Gamma \cap U = \{(x, y) \in U : g(x, y) = \alpha\}$ per un certo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ex. $g(x, y) = 4x^2 - y^2 + 2y$ $\Gamma = \{g(x, y) = 0\}$



$$\nabla g = (8x, 2 - 2y)$$

$$\nabla g = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 1)$$

Ma "fortunatamente" NON è un polo della curva!

Dunque Γ è regolare!

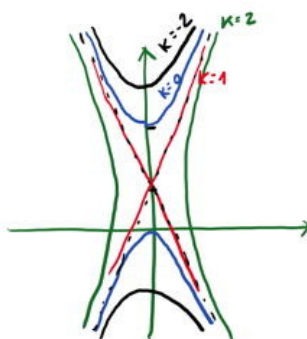
Ma ci sono altri insiemi di livello di g : $g(x, y) = k$ con $k \in \mathbb{R}$ (levels)

• $k=1$ $4x^2 - y^2 + 2y = 1$, $4x^2 = (y-1)^2$
 $2x = \pm(y-1)$ $y-1 = \pm 2x$ $y = \pm 2x + 1$

$\Xi = \{g(x, y) = 1\}$ è regolare insieme che nel suo punto $(0, 1)$.

• $k=-2$ $4x^2 - y^2 + 2y = -2$ $4x^2 - (y-1)^2 = -3$
 $\frac{(y-1)^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{x^2}{(\sqrt{3}/2)^2} = 1$ iperbole con polo più esterna di Γ

• $k=2$ $4x^2 - y^2 + 2y = 2$ $4x^2 - (y-1)^2 = 1$
 $\frac{x^2}{(1/2)^2} - \frac{(y-1)^2}{1^2} = 1$ iperbole con polo più interna di Γ



Come detto, le tre definizioni sono equivalenti.
Vediamo come si passa da una all'altra.

Ex. • $\gamma(t) = (2 \sin 2t, 3t)$ curva parametrica (forma (1))

$$\gamma'(t) = (4 \cos 2t, 3) \neq (0, 0) \quad \forall t \Rightarrow \text{è immersiva!}$$

(Dovr. garantire che le immagini tramite γ
di piccoli intervalli su curve regolari)

$$\begin{cases} x = 2 \sin 2t \\ y = 3t \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Per passare alla forma graf. (2)} \\ \text{bisogna "eliminare il parametro"} \\ \text{invertendo una delle due } x(t) \text{ o } y(t). \\ \text{(T. Funz. Inversa)} \end{array}$$

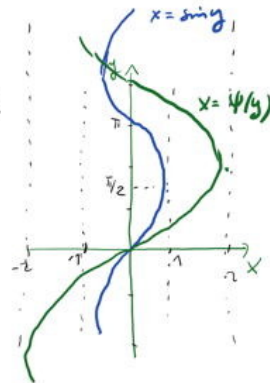
$$\begin{cases} t = y/3 \\ x = 2 \sin(2y/3) = \psi(y) \end{cases}$$

Per la forma canonica (3):

$$x = 2 \sin(2y/3) \Rightarrow x - 2 \sin(2y/3) = 0$$

$$\text{Notiamo che } \nabla g = (1, -\frac{2}{3} \cos(2y/3)) \neq (0, 0)$$

dopo g è immersiva (Affermazione ancora da dimostrare grafic.)



• $\rho(\theta) = K\theta$ SPIRALE DI ARCHIMEDE ($K > 0$)

$$\rightarrow \gamma(\theta) = (K\theta \cos \theta, K\theta \sin \theta)$$

$$\gamma'(\theta) = (K(\cos \theta - \theta \sin \theta), K(\sin \theta + \theta \cos \theta)) \neq (0, 0) \quad \forall \theta \Rightarrow \text{immersiva}$$

VERIFICA (valida per ogni curva polare $\rho(\theta)$)

$$\gamma(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$$

$$\Rightarrow \gamma'(\theta) = (\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta, \rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho' \end{pmatrix}$$

$$\text{Poi} \quad \gamma'(\theta) = (0, 0) \Rightarrow \rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0$$

Liav. in forma parametrica (1).

$$\begin{cases} x = K\theta \cos \theta \\ y = K\theta \sin \theta \end{cases} \quad \text{Es. } \theta_0 = \pi/3$$

$$\gamma'(\pi/3) = K \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \right)$$

Poich' $\gamma'(\pi/3) \neq 0$ posso invertire $y(\theta)$

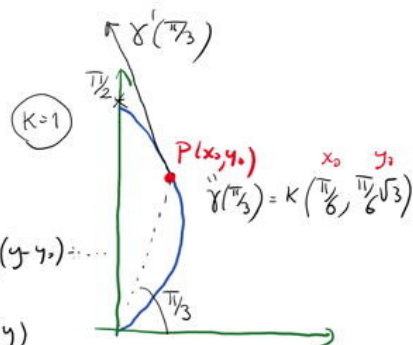
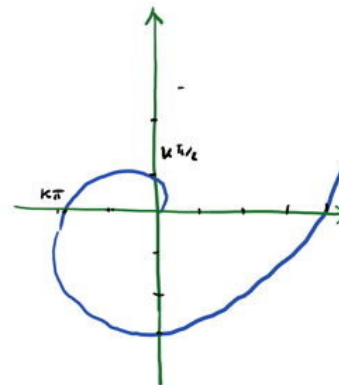
scrivendo $\theta(y)$ vicino a $\theta \sim \pi/3$:

$$\theta(y) = \theta(y_0) + \theta'(y_0)(y - y_0) + \theta''(y_0)(y - y_0)^2 + \dots = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3} + \frac{\pi}{2}}(y - y_0) + \dots$$

$$\text{Sostituendo } x = K\theta \cos \theta = K \cdot \theta(y) \cdot \cos \theta(y) = \psi(y)$$

(forma graf. (2))

$$\text{Forma canonica: } g(x, y) = x - \psi(y) = 0$$



• $g(x,y) = 4x^2 - y^2 + 2y = 0 \quad P(0,2)$

$\nabla g = (8x, 2-2y) \quad \nabla g(P) = (0, -2)$

P è l'unico punto grafico (2) $\nabla g(P)$
allora a P deve appartenere una delle due
variabili di $g(x,y) = 0$, e lo farei nel Dimi.

$\nabla g(P) = (0, -2) \rightarrow y = \phi(x)$

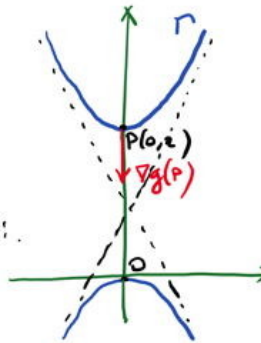
con $\phi(0) = 2, \phi'(0) = -\frac{0}{-2} = 0, \dots$

$4x^2 - y^2 + 2y = 0$ con $y(x) \xrightarrow{x=0} 8x - 2yy' + 2y' = 0 \xrightarrow{x=0} 0 - 4y'(0) + 2y'(0) = 0 \Rightarrow y'(0) = 0$
 $\xrightarrow{x=0} 8 - 2(y')^2 - 2yy'' + 2y'' = 0 \xrightarrow{x=0} 8 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot y''(0) + 2y''(0) = 0 \Rightarrow y''(0) = 4$

Dunque $y = \phi(x) = 2 + 0 \cdot (x-0) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (x-0)^2 + o_0(x^3) \Rightarrow y'(0) = 4$
 $= 2 + 2x^2 + o(x^2)$

Tra l'altro qui posso calcolare ϕ in forma chiusa: $g=0 \Rightarrow y^2 - 2y - 4x^2 = 0$
 $\Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{1+4x^2} = \phi(x)$ (funce grafici)

Funce parametrica: $y = \phi(x) \Rightarrow \gamma(x) = (x, \phi(x)) = (x, 1 + \sqrt{1+4x^2})$
(quando si ha un grafico si lo si può anche usare parametricamente!)



ESERCIZI

(7) Quali curve di livello di $g(x,y) = x^3 - 3x^2y + y^2$ sono
curve piatte regolari? Descrivete le tre forme possibili
per le curve di livello di g passanti per il punto $P(-1,2)$.

[Si ricordi che le curve di LIVELLO di g sono gli insiemi

$\Gamma_\alpha = \{(x,y) : g(x,y) = \alpha\}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

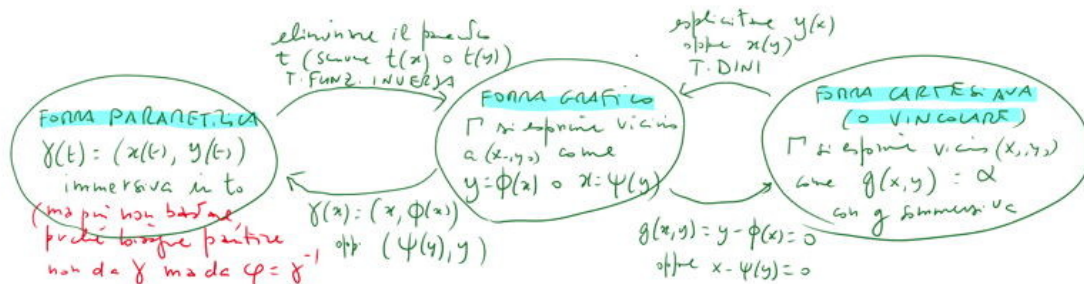
chiaramente costituiscono una partizione del piano $\mathbb{R}^2$,
ovvero sono a due a due disgiunti e ricoprono tutto il piano.]

(8) Stessa domanda per $g(x,y) = e^{xy} + x + 2y$ e $P(0,1)$.

(9) Esprimere le curve -otto nelle tre forme, dicendo in quali
punti esse sono regolari.

(10) Stessa domanda per i grafici di $y = \phi(x) = e^x - \sin x$
e di $x = \psi(y) = y - 2 \log(y^2 + 1)$.

Ricapitoliamo il quadro per le CURVE PIANE REGOLARI Γ
 (varietà di dimensione $m=1$ in $\mathbb{R}^n$ con $n=2$, cioè nel piano).
 Ci sono tre possibili definizioni in un punto $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$ di Γ :



Facciamo alcuni degli esercizi proposti.

- (7) Quali curve di livello di $g(x, y) = x^3 - 3x^2y + y^2$ sono curve piane regolari? Discutete le tre forme possibili (parametriche, grafici, cartesiane) per le curve di livello passate per punto $P(-1, 2)$.

[N.B.: le curve di livello di g sono gli insiemi, al variare di $a \in \mathbb{R}$,

$\Gamma_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = a\}$
 che insieme costituiscono una partizione del piano $\mathbb{R}^2$
 (sono a due a due disgiunte e ricoprono tutto il piano).]

$$\nabla g = (3x^2 - 6xy, -3x^2 + 2y) \quad \nabla g = (0, 0) \quad \begin{cases} 3x^2 - 6xy = 0 \\ -3x^2 + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{2}x^2 \\ x(x - 3x^2) = 0 \end{cases}$$

$$x(x - 3x^2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad O(0, 0) \\ x = 1/3 \Rightarrow y = 1/6 \quad A(1/3, 1/6) \end{cases}$$

I punti di $\mathbb{R}^2$ in cui g NON è immersa sono $\begin{cases} O(0, 0) & g(0) = 0 \Rightarrow O \in \Gamma_0 \\ A(1/3, 1/6) & g(A) = \frac{1}{108} \Rightarrow A \in \Gamma_{1/108} \end{cases}$
 Dunque tutte le curve di livello Γ_a sono regolari tranne (al più) Γ_0 in O e $\Gamma_{1/108}$ in A .

$P(-1, 2) \quad g(P) = -3 \Rightarrow P \in \Gamma_{-3} =: \Gamma$

Forma cartesiana di Γ : $x^3 - 3x^2y + y^2 = -3$

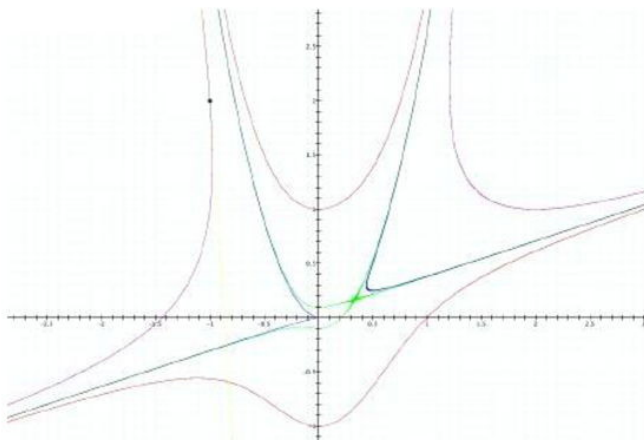
$\nabla g(P) = (15, 1) \xrightarrow{\text{Dini}} \begin{cases} y = \phi(x) = 2 + (-\frac{15}{1}) (x - (-1)) + o_1(x - (-1)) = 2 - 15(x + 1) + \dots \\ x = \psi(y) = -1 + (-\frac{1}{15})(y - 2) + o_2(y - 2) = -1 - \frac{1}{15}(y - 2) + \dots \end{cases}$

Due punti forme grafici!

Se si vuole si può calcolare $y = \phi(x)$ in forma chiusa: $y^2 - 3x^2y + x^3 + 3 = 0$
 $\Rightarrow y = \frac{3x^2 \pm \sqrt{9x^4 - 4x^3 - 12}}{2} = \phi(x)$.

Dalle forme grafici non subito le forme parametriche

- $y = \phi(x)$ con $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo aperto, $-1 \in I \Rightarrow$
 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(x) = (x, \phi(x))$
- $x = \psi(y)$ con $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}$, J intervallo aperto, $2 \in J \Rightarrow$
 $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(y) = (\psi(y), y)$.



Ecco alcune curve di
 livelli di q disegnate
 dall'elaboratore:

- Viola ($q = -3$), per P
- Verde ($q = \frac{1}{108}$), per A
- Blu ($q = 0$), per O
- Rossa ($q = 1$)

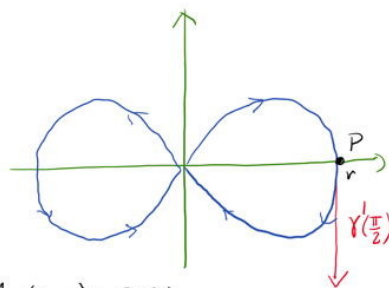
(9) Esplicitare la curva-otto nelle tre forme, dicendo
 in quali punti essa è regolare.

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (r \sin t, r \sin 2t)$$

Scrittura in forma parametrica.

Per la forma grafica? Es. in $t = \pi/2$

$$P = \gamma(\pi/2) = (r, 0) \quad \gamma'(t) = (r \cos t, r \sin 2t)$$



$$\gamma'(\pi/2) = (0, -r) \leadsto \text{da } y(t) = r \sin 2t = \frac{r}{2} \sin 2t$$

per scegliere invertire tornando $t = t(y) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{-r}(y-0) + 0.5$

$t(y) = \frac{\pi}{2} - \frac{y}{r} + 0.5$. In realtà anche qui si può trovare una

$$\text{forma chiusa: } y = \frac{r}{2} \sin 2t \Rightarrow \sin 2t = \frac{2y}{r} \Rightarrow 2t = \begin{cases} \arcsin \frac{2y}{r} + 2k\pi \\ \pi - \arcsin \frac{2y}{r} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\sin t = \begin{cases} \frac{1}{2} \arcsin \frac{2y}{r} + k\pi \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2y}{r} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{Ma io voglio che } t(0) = \frac{\pi}{2}$$

Insomma quella che va bene è la 2a con $k=0$: $t(y) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2y}{r}$

Poi, in $x(t) = r \sin t$ mettiamo $t = t(y)$ e troviamo graficamente $x = r \sin t(y)$

$$x = r \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2y}{r} \right) = r \cos \left(-\frac{1}{2} \arcsin \frac{2y}{r} \right) = r \cos \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{2y}{r} \right) \dots$$

Facciamo calcolare: $x - r \sin t(y) = 0$

In realtà per determinare una forma canonica migliore:

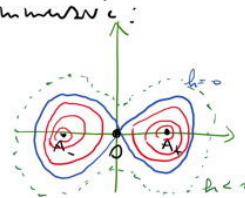
$$\begin{cases} x = r \sin t \\ y = r \sin t \cos t \end{cases} \quad \begin{cases} \sin t = x/r \\ y^2 = r \sin^2 t (1 - \sin^2 t) = \cancel{r} \cdot \frac{x^2}{r} (1 - \frac{x^2}{r^2}) \end{cases}$$

$\mathcal{L}(x,y) = x^2(r^2 - x^2) - r^2 y^2 = 0$ Esaminiamo due livelli di $\mathcal{L}$ in $(0,0)$:

$$\nabla \mathcal{L} = (2x(r^2 - x^2) + x^2(-2x), -2r^2 y) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow y=0, \quad 2x(r^2 - x^2) = 0 \quad \begin{cases} x=0 \Rightarrow O(0,0) \\ x=\pm \frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow A_{\pm}(\pm \frac{r}{\sqrt{2}}, 0) \end{cases}$$

Nei punti $A_{\pm}$ si ha $\mathcal{L}(A_{\pm}) = \frac{r^4}{4}$



RIASSUNZIONE DEGLI ALTRI ESERCIZI:
ASSEGNATI NELLE SCORSE LEZIONI

(1) Da $2e^{x+y} + xy^2 + \cos y - 3 = 0$ esplicitare se possibile $y(x)$ oppure $x(y)$ all'intorno della soluzione $(0,0)$, determinando lo sviluppo di Taylor al II° ordine.

$$f(x,y) = 2e^{x+y} + xy^2 + \cos y - 3 = 0$$

$$\nabla f = (2e^{x+y} + y^2, 2e^{x+y} + 2xy - \sin y)$$

$$\nabla f(0,0) = (2, 2) \rightarrow y(x) \text{ oppure } x(y).$$

Per $y(x)$: $f(x, y(x)) \equiv 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} 2(1+y')e^{xy} + y^2 + 2xyy' - y' \sin y = 0$

$\Rightarrow_{x=0, y(0)=0} 2(1+y'(0)) = 0 \Rightarrow y'(0) = -1$.

Da nuovo $\frac{d}{dx}$: $2y''e^{xy} + 2(1+y')^2 e^{xy} + 2yy' + 2yy' + 2x(y')^2 +$
 $+ 2xyy'' - y' \sin y - (y')^2 \cos y = 0 \xrightarrow{(x=0, y(0)=0, y'(0)=-1)}$

$2y''(0) - 1 = 0 \Rightarrow y''(0) = \frac{1}{2}$.

Potendo $y(x) = 0 + (-1)x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 + o_2(x^2) = -x + \frac{1}{4} x^2 + o_2(x^2)$

Per $x(y)$: conti simili derivando $f(x(y), y) \equiv 0$ risp. y , con $x(0) = 0$.

(2) L'equazione $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3 + x + y^2 - 2 = 0$ definisce tre funzioni implicite $y_j(x)$ ($j=1, 2, 3$) all'intorno di $x_0 = 1$: calcolarne gli sviluppi, e incavarne un abbozzo della curva $f(x, y) = 0$ nella striscia verticale $x \sim x_0$.

$f(1, y) = 1 - 2y + y^3 + 1 + y^2 - 2 = y^3 + y^2 - 2y = 0$ per $y = 0, 1, -2$,
 dunque $A_1(1, 0)$, $A_2(1, 1)$ e $A_3(1, -2)$ sono tre soluzioni;

inoltre $\nabla f = (2x - 2y + 1, -2x + 3y^2 + 2y)$ e dunque

$\nabla f(A_1) = (3, -2)$, $\nabla f(A_2) = (1, 3)$ e $\nabla f(A_3) = (7, 6)$

dunque sono effettivamente definite tre funzioni $y_j(x)$ ($j=1, 2, 3$)

con $y_1(x) = 0 + (-\frac{3}{2})(x-1) + o_1(x-1) = -\frac{3}{2}(x-1) + o_1(x-1)$

$y_2(x) = 1 + (-\frac{1}{3})(x-1) + o_1(x-1) = 1 - \frac{1}{3}(x-1) + o_1(x-1)$

$y_3(x) = -2 + (-\frac{7}{6})(x-1) + o_1(x-1) = -2 - \frac{7}{6}(x-1) + o_1(x-1)$

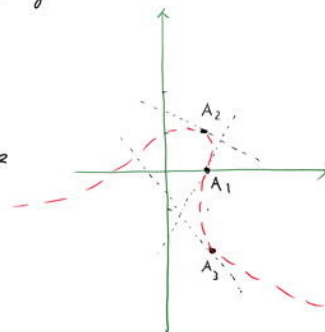
Gli sviluppi scritti sono le rette tangenti alla

curva nei tre punti A_1, A_2, A_3 ,

dunque l'abbozzo richiesto è

semplificando dati da questa porzione

della rete tangenti (il disegno della curva, in tratteggio colorato, è schizzato sulle basi dell'elaborazione grafica).



(3) Da $\sin(\pi yz) - \pi^2 y - z + 1 = 0$ due casi più espliciti all'intorno di $(-1, 0, 1)$, e calcolarne gli sviluppi.

$f(x, y, z) = \sin(\pi yz) - \pi^2 y - z + 1 = 0$; $f(-1, 0, 1) = 0$

$\nabla f = (yz \cos(\pi yz) - 2\pi y, \pi z \cos(\pi yz) - \pi^2, \pi y \cos(\pi yz) - 1)$

$$\nabla f(-1, 0, 1) = (0, -2, -1) \leadsto y(x, z) \text{ oppure } z(x, y).$$

$$\text{Ad esempio: } y(x, z) : f(x, y(x, z), z) \equiv 0$$

$$\partial_x (yz + x y_x z) \Leftrightarrow (xyz) - 2xy - x^2 y_x = 0 \xrightarrow{(x,z)=(-1,1)} -j_x(-1,1) - j_x(-1,1) = 0$$

$$\Rightarrow j_x(-1,1) = 0$$

$$\partial_z (xy + x y_z z) \Leftrightarrow (xyz) - 1 = 0 \Rightarrow -j_z(-1,1) - 1 = 0 \Rightarrow j_z(-1,1) = -1$$

da cui $y(x, z) = 0 + (0, -1) \cdot (x - (-1), z - 1) + \dots = -(z-1) + \dots$

$$\text{Analogamente, derivando nuovamente rispetto a } x \text{ o a } z \text{ si ottiene } H_y(-1, 1) = \begin{pmatrix} j_{xx}(-1, 1) & j_{xz}(-1, 1) \\ j_{xz}(-1, 1) & j_{zz}(-1, 1) \end{pmatrix},$$

e si sviluppa al $\mathbb{I}^2$ ordine sarebbe

$$y(x, z) = -(z-1) + \frac{1}{2} \cdot (x+1, z-1) \cdot H_y(-1, 1) \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ z-1 \end{pmatrix} + \dots$$

- (4) Dire dove $f(x, y, z) = (2xy + z, 3 - x^2, 1 + yz^2)$ è differenziabile, e sviluppare l'inversa in $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -2)$. Calcolare poi l'immagine dei tre assi coordinati e l'antimmagine di $(0, 0, 0)$.

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 1 \\ -2x & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 2yz \end{pmatrix} \quad \det = 2x(4xyz - z^2) - 2xz(4xy - z)$$

$\det J_f = 0$ nei punti in cui $x=0$ (piano (y, z)), o in cui $z=0$ (piano (x, y)) o sulle superficie-gusce $z = 4xy$.

Il punto $P(1, 0, -2)$ non sta su nessuno di questi luoghi, dunque f è differenziabile in P . Si calcola

$$J_f(P) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_f(P)^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Si ha $Q := f(P) = (-2, 2, 1)$: dunque l'inversa locale g sarà definita in un intorno di Q e, dette (u, v, w) le variabili del codominio, si avrà

$$g(u, v, w) = g(Q) + J_g(Q) \cdot \begin{pmatrix} u - u_Q \\ v - v_Q \\ w - w_Q \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+2 \\ v-2 \\ w-1 \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(v-2) + \dots \\ 1/4(w-1) + \dots \\ -2 + (u-2) - \frac{1}{2}(w-1) + \dots \end{pmatrix}$$

(5) Dal sistema in (x, y, u, v, w)

$$\begin{cases} x(u+v) + yw = 3 \\ x(u^2+v^2) + yw^2 = 5 \\ x(u^3+v^3) + yw^3 = 9 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{esplicitare } (u, v, w) \text{ in} \\ \text{funz. di } (x, y) \text{ attorno} \\ (1, 1, 0, 1, 2) \text{ e calcolare} \\ \text{lo sviluppo al I ordine.} \end{array}$$

$$F = (f_1, f_2, f_3): \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$F(x, y, u, v, w) = (x(u+v) + yw - 3, x(u^2+v^2) + yw^2 - 5, x(u^3+v^3) + yw^3 - 9)$$

$$J_F = \begin{pmatrix} u+v & w & x & x & y \\ u^2+v^2 & w^2 & 2ux & 2vx & 2wy \\ u^3+v^3 & w^3 & 3u^2x & 3v^2x & 3w^2y \end{pmatrix}$$

$$J_F(1, 1, 0, 1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 3 & 12 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{det} = 12 \neq 0 \\ J_{F,(u,v,w)} \\ \text{det} = 12 \neq 0 \end{array}$$

$$\leadsto (u(x, y), v(x, y), w(x, y))$$

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + J_{F,(u,v,w)}^{-1} \cdot J_{F,(x,y)} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12-9 & 2 \\ 0 & 12-4 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \dots$$

(6) Dal sistema in tre variabili (x, y, z) :

$$\begin{cases} x^4 y z - 3y^3 + 2xz^3 = 3 \\ x^2 - 2y^2 + z^3 - 5z + 4xy + 4 = 0 \end{cases}$$

esplicitare in tutti i modi possibili due delle variabili rispetto alla terza attorno alle soluzioni $(0, -1, 2)$ e calcolare gli sviluppi al I ordine in due modi.

Geometricamente, come si fa facendo?

$$F = (f_1, f_2): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^4 y z - 3y^3 + 2xz^3 \\ x^2 - 2y^2 + z^3 - 5z + 4xy + 4 \end{pmatrix}$$

$$J_F = \begin{pmatrix} 4x^3 y z + 2z^3 & x^4 z - 9y^2 & x^4 y + 6xz^2 \\ 2x + 4y & -4y + 4x & 3z^2 - 5 \end{pmatrix}$$

$$J_F(0, -1, 2) = \begin{pmatrix} 16 & -9 & 0 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Tutti i minori sono non nulli: si può esplicitare qualsiasi coppia di variabili rispetto alla restante, (che fungerà da parametro per una curva reg. in $\mathbb{R}^3$).

Ad es, esplicitiamo $(x(z), y(z))$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(- \begin{pmatrix} 16 & 9 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} (z-2) + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} (z-2) + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 16 & 7 \end{pmatrix} (z-2) + \dots = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4}(z-2) + \dots \\ -4(z-2) + \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Geometricamente il sistema di luogo a una curva in $\mathbb{R}^3$ in forma cartesiana (le equazioni rappresentano i vincoli), ed esplicitare $(x(z), y(z))$ vicino al punto $(0, -1, 2)$ della curva significa fornire un'espressione locale della curva come grafico (per l'appunto, delle funzioni $(x(z), y(z))$).