



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

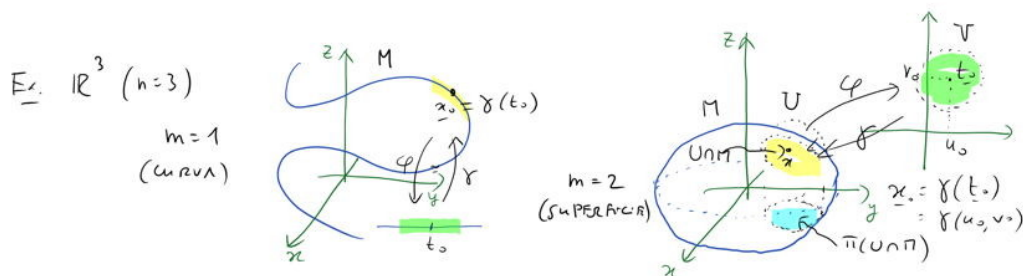
Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di martedì 07/010/2025

Occupiamoci ora delle definizioni generali di varietà differenziali.

VARIEtà DIFF. LE DI DIM. m IN $\mathbb{R}^n$ DI CLASSE $\mathcal{C}^k$



Anche qui sono possibili tre posizioni, sic $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in M$.

1. FORMA PARAMETRICA: M è localmente $\mathcal{C}^k$ -diffeomorfa a un aperto di $\mathbb{R}^m$

$\exists$ intorno aperto U di x_0 in $\mathbb{R}^n$, un aperto V in $\mathbb{R}^m$ e un $\mathcal{C}^k$ -diffeomorfismo $\varphi: U \cap M \xrightarrow{\sim} V$.

φ : curva locale (in x_0) $\gamma = \varphi^{-1}: V \rightarrow U \cap M \subseteq \mathbb{R}^n$ PARAMETRIZZ. locale di M in x_0 .

2. FORMA GRAFICO: M è localmente grafico di una funzione $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$

$\exists$ intorno aperto U di x_0 in $\mathbb{R}^n$, $\exists$ m variabili $x' = (x'_1, \dots, x'_m)$ tali che, scritte le variabili rimanenti come $x'' = (x''_1, \dots, x''_{n-m})$ (sono $n-m$) e denotate con $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la proiezione $\pi(x) = \pi(x', x'') = x'$, si ha $U \cap M = \{x \in U: x'' = \phi(x')\}$ per un'opportuna funzione $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_{n-m}): \pi(U) \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ di classe $\mathcal{C}^k$.

3. FORMA CARTESIANA: M è insieme di livelli di una $\mathcal{C}^k$ immersione $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$

$\exists$ intorno aperto U di x_0 in $\mathbb{R}^n$ e una funzione $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ immersione $\mathcal{C}^k$ t.c. $U \cap M = \{x \in U: g(x) = a\}$ per un certo $a \in \mathbb{R}^{n-m}$, con: se $g = (g_1, \dots, g_{n-m})$, $a = (a_1, \dots, a_{n-m})$:

$$U \cap M = \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 \\ \vdots \\ g_{n-m}(x_1, \dots, x_n) = a_{n-m} \end{cases}$$

Alcuni casi particolari:

- $m = 0$: insiemi discreti di punti isolati in $\mathbb{R}^n$.
- $m = 1$: CURVE REGOLARI
- $m = n-1$: IPERSUPERFICI
- $m = n$: APERTI in $\mathbb{R}^n$ (che hanno "volume n -dim.")

Ter. | Per un sottoinsieme M di $\mathbb{R}^n$, le tre descrizioni precedenti sono equivalenti.

Dim. Mostriamo che (2) equivale sia a (1) che a (3).

- Suff. di M soddisfa (1):

$\gamma: V \xrightarrow{\sim} U \subseteq \mathbb{R}^n$ parametr. su V aperto di $\mathbb{R}^m$ t.c. $\gamma(V) = U \cap M$
 Sia $t_0 \in V$ t.c. $\gamma(t_0) = x_0$. $\gamma = (\gamma', \gamma'')$

$$J_\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_1}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial \gamma_1}{\partial t_m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \gamma_m}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial \gamma_m}{\partial t_m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \gamma_n}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial \gamma_n}{\partial t_m}(t) \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ m \\ \downarrow \end{matrix}$
 $\xleftarrow{m}$

per ipotesi (immersione)

ha rango m massimo.

dunque ha un minore con $\det \neq 0$.

Sia per semplicità quella in alto:

per il T. Funz. Inversa,

$$\underline{x}' = \gamma'(t) \leadsto t = (\gamma')^{-1}(\underline{x}')$$

(ove $\underline{x}' = (x_1, \dots, x_m)$)

e per ciò $\underline{x}'' = \gamma''(t) = \gamma''((\gamma')^{-1}(\underline{x}')) = \phi(\underline{x}')$ o $\phi = \gamma'' \circ (\gamma')^{-1}$

Viaverso, M soddisfa (2): $M = \{(\underline{x}', \underline{x}'') : \underline{x}'' = \phi(\underline{x}')\}$

con $\underline{x}' = (x_1, \dots, x_m)$, $\underline{x}'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ (per esempio!)

Altre definisce $\gamma(\underline{x}') = (\underline{x}', \phi(\underline{x}'))$:

$$J_\gamma(\underline{x}') = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{n-m}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_{n-m}}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ \text{ } \\ \downarrow \end{matrix}$
 $\nwarrow_m$

è immersiva! (ha rango m).

- Suff. di M soddisfa (3):

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 \\ \vdots \\ g_{n-m}(x_1, \dots, x_n) = a_{n-m} \end{cases}$$

$G = (g_1, \dots, g_{n-m}): U \xrightarrow{\subseteq \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^{n-m}$ $G(\underline{x}_0) = \underline{a} = (a_1, \dots, a_{n-m})$

$$J_G(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{n-m}}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_{n-m}}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

immersiva (rango $n-m$).
Supp. che l'ultimo
minore sia non nullo

$\Rightarrow$ per il Dini, dal sistema posso esplicitare le variabili $x'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ in funzione delle prime m , ovvero $x' = (x_1, \dots, x_m)$, dunque la forma grafica.

Viceversa, $x'' = \phi(x') \leadsto G(x) = x'' - \phi(x') = 0$. $\square$

Ex. $\gamma(u,v) = (u^2, 4u+v^3, 3uv)$ $\gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ immersiva

$J_\gamma = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 4 & 3v^2 \\ 3v & 3u \end{pmatrix}$ Non è immersiva quasi ovunque $\text{rk } J_\gamma < 2$

$$\begin{cases} 6uv^2 = 0 \\ 6u^2 = 0 \\ 12u - 9v^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases} \text{ dopo la } \gamma(u,v) = (0,0)$$

Dopo (+ immersi) se $(u,v) \neq (0,0)$, un intorno $V \subseteq \mathbb{R}^2$ di (u,v) viene mappato diffeomorficamente nelle sue immagini $\gamma(V) \subseteq \mathbb{R}^3$.

Verifichiamo se γ sia almeno iniettiva, per vedere eventuali autointersezioni in $\mathbb{R}^3$.

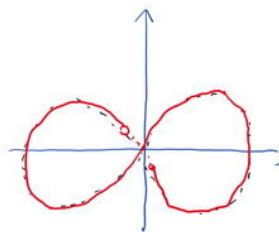
DII. L'eventuale iniettività di γ non mette guai al riparo da eventuali implemanti di $\gamma(\mathbb{R}^2)$

Ad esempio, per le curve-otto:

$\gamma_1:]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (r \cos t, r \sin t)$

oppure, considerando le forme parametriche con $\tau = t/t_2$

$\gamma_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(\tau) = \left(\frac{2\tau}{1+\tau^2} r, \frac{2\tau(1-\tau^2)}{(1+\tau^2)^2} r \right)$



Procediamo con lo studio delle iniettività di $\gamma(u,v)$:

$\gamma(u_1, v_1) = \gamma(u_2, v_2) \stackrel{?}{\Rightarrow} \begin{cases} u_1 = u_2 \\ v_1 = v_2 \end{cases}$

$\begin{cases} u_1^2 = u_2^2 \\ 4u_1 + v_1^3 = 4u_2 + v_2^3 \\ 3u_1 v_1 = 3u_2 v_2 \end{cases} \quad u_1^2 = u_2^2 \begin{cases} u_1 = u_2 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} v_1 = v_2 \text{ (OK)} \\ u_1 = -u_2 \Rightarrow \begin{cases} 8u_1 = v_2^3 - v_1^3 \\ u_1(v_1 + v_2) = 0 \end{cases} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} v_2 = -v_1 \\ v_1 = -\sqrt[3]{4u_1} \end{cases}$

Perciò γ non è iniettiva nei punti del tipo $(u,v) = (2, -\sqrt[3]{4})$

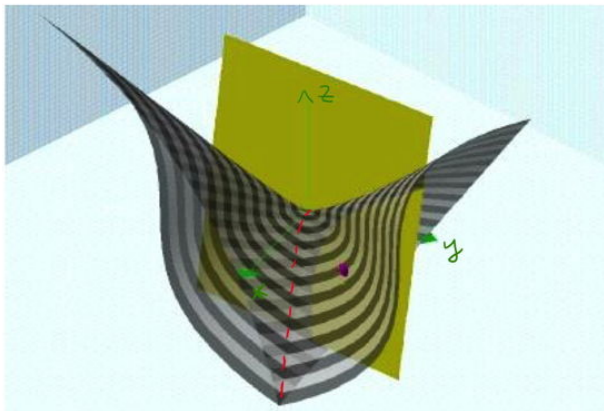
(infatti $\gamma(\pm(2, -\sqrt[3]{4})) = (2^2, 0, -3 \cdot 2 \sqrt[3]{4})$)

E qual è l'immagine di tali valori del parametro?

$$\begin{cases} x = 2^2 \\ y = 0 \\ z = -3 \cdot 2 \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

$$\text{cioè } \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 0 \\ z = -3 \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

(punti di auto-intersezione
della sf. piana)
(TRASFORMATI IN R³ IN
UNA FUNZIONE)



Consideriamo ad esempio

$$\text{il punto } P(1, 3, -3) = \gamma(1, -1)$$

(punto tangente in figura)

$$J_{\gamma}(1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \det = 6 \neq 0$$

$\Rightarrow$ per scalari invertibili

$$\begin{cases} x = u^2 \\ y = 4u + v^3 \end{cases} \leadsto \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} u(1, 3) = 1 \\ v(1, 3) = -1 \end{cases} \quad J_{(u,v)}(1, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$p_{u,v} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} 1 + 1/2(x-1) + \dots \\ -1 - 2/3(x-1) + 1/3(y-3) + \dots \end{pmatrix}$$

$$\text{da cui } z = 3uv = 3u(x, y) \cdot v(x, y) = \phi(x, y) \quad (\text{funzione})$$

Qui vogliamo far fare il conto la funzione

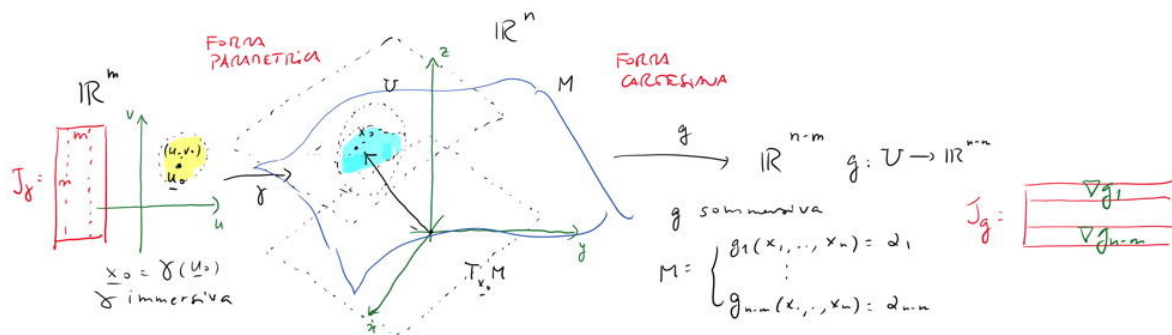
$$\begin{cases} x = u^2 \\ y = 4u + v^3 \end{cases} \quad \begin{cases} u = \sqrt{x} \\ y = 4\sqrt{x} + v^3 \end{cases} \quad \begin{cases} u = \sqrt{x} \\ v = -\sqrt[3]{4\sqrt{x} - y} \end{cases} \quad \text{e dunque}$$

$$z = -3\sqrt{x} \sqrt[3]{4\sqrt{x} - y} = \phi(x, y) \quad (\text{con } x \geq 0)$$

SPAZIO TANGENTE A UNA VARIETÀ IN UN SUO PUNTO

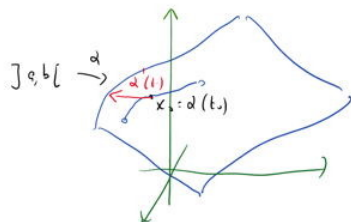
Descriveremo lo spazio tangente (lineare, passante per l'origine; per

quella affine batte' trattare per il punto in questione) nelle due possibili presentazioni parametriche o cartesiane.
 La presentazione come grafico, essendo intermedia tra le due, viene trattata come caso particolare.



Definiamo lo Spazio Tangente a M in x_0 :

$$T_{x_0} M = \left\{ d'(t_0) : d :]a, b[\rightarrow M \text{ curva derivabile in } d(t_0) = x_0 \right\}$$



La famiglia dei vettori tangenti in x_0 alle curve in M passanti per x_0 .

Prop.

$$T_{x_0} M = \text{Ker } dg_{x_0} = \left\{ u \in \mathbb{R}^n : dg_{x_0}(u) = 0 \right\}$$

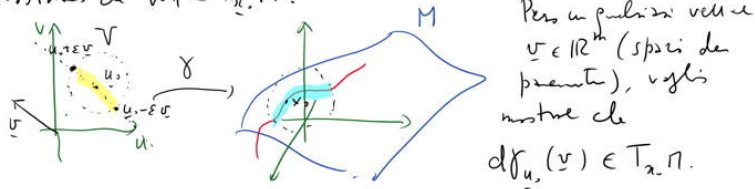
$$= \text{Im } d\gamma_{u_0} = \left\{ d\gamma_{u_0}(v) : v \in \mathbb{R}^m \right\}$$

In particolare $T_{x_0} M$ è un $\mathbb{R}$ -sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dim. m , esprimibile, a seconda dei casi:

- o come sottospazio ortogonale agli $n-m$ gradienti $\nabla g_j(x_0)$ con $j = 1, \dots, n-m$ (indipendenti tra loro poiché g è sommatoria)
- o come sottospazio generato dagli m vettori Tangenti $\frac{\partial \gamma}{\partial u_1}(u_0), \dots, \frac{\partial \gamma}{\partial u_m}(u_0)$ (indipendenti tra loro poiché γ è immersiva)

Dim. Possiamo $W_1 = \text{Im } d\gamma_{u_0}$ e $W_2 = \text{Ker } dg_{x_0}$.
 Mi basterà mostrare che $W_1 \subset T_{x_0} M \subset W_2$: infatti per ipotesi dim $W_1 = \dim W_2 = m$, dal che discenderà l'uguaglianza.

- Mostriamo che $T_{x_0} M \subset T_{x_0} \mathbb{R}^n$.



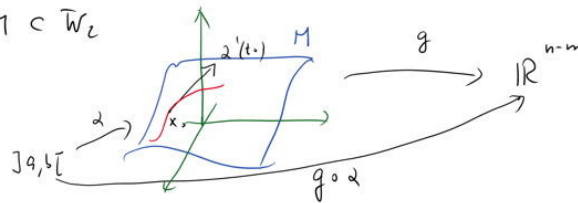
$$\text{Sic } \varepsilon > 0 \text{ t.c. } \{u_0 + t\underline{v} : -\varepsilon < t < \varepsilon\} \subseteq V$$

Considera la curva parametrizzata $\alpha:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$
 data da $\alpha(t) = \gamma(u_0 + t\underline{v})$ (quella disegnata in rosso).

$$\text{Notiamo che } \alpha(0) = x_0; \text{ inoltre } \alpha'(t) = d\gamma_{u_0+t\underline{v}}(\underline{v})$$

da cui $\alpha'(0) = d\gamma_{u_0}(\underline{v})$. Dunque $d\gamma_{u_0}(\underline{v})$ è del tipo di quelli di $T_{x_0} M$.

- $T_{x_0} M \subset T_{x_0} \mathbb{R}^n$



$$\text{Ten: } \alpha'(t_0) \in \text{Ker } dg_{x_0}, \text{ ovvero } dg_{x_0}(\alpha'(t_0)) = \underline{0}_{n-m}.$$

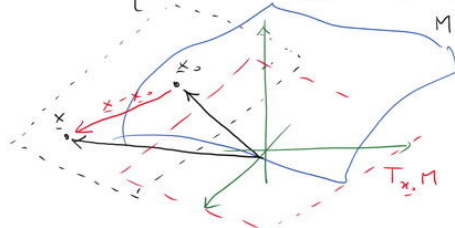
$$g \circ \alpha:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^{n-m} \text{ è costante } (g \circ \alpha)(t) = (a_1, \dots, a_{n-m})$$

$$\text{dunque } (g \circ \alpha)' = 0 : \text{ ma } (g \circ \alpha)'_{t_0} = dg_{\alpha(t_0)}(\alpha'(t_0)) = dg_{x_0}(\alpha'(t_0)) //$$

Per descrivere lo spazio tangente affine (quello fisicamente tangente alla varietà M in x_0) bisogna traslare il tutto ed ottenere x_0 :

$$x_0 + T_{x_0} M = \{x_0 + d\gamma_{u_0}(\underline{v}) : \underline{v} \in \mathbb{R}^m\} = \{x_0 + \lambda_1 \frac{\partial \gamma}{\partial u_1}(u_0) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \gamma}{\partial u_m}(u_0)\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n : dg_{x_0}(x - x_0) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} \nabla g_1(x_0) \cdot (x - x_0) = 0 \\ \vdots \\ \nabla g_{n-m}(x_0) \cdot (x - x_0) = 0 \end{cases}\}$$



$\underline{u} = x - x_0$ è nello spazio tangente lineare $T_{x_0} M$

Per la forma grafica, che è a metà tra le due:

Def. Se $\Pi = \{ \underline{x} = (\underline{x}', \underline{x}'') : \underline{x}'' = \phi(\underline{x}') \}$ $\underline{x}' = (x_1, \dots, x_m)$
 $\underline{x}'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$

Alora lo spazio tangente affine in $\underline{x}_0 = (\underline{x}'_0, \underline{x}''_0)$ è

$$\underline{x}'' = \underline{x}''_0 + J_\phi(\underline{x}'_0)(\underline{x}' - \underline{x}'_0)$$

In una variabile (curva)
 $y = \phi(x) \leadsto y = y_0 + \phi'(x_0)(x - x_0)$

Donc. In due modi:

1. come parametrizzazione: $\gamma(\underline{x}') = (\underline{x}', \phi(\underline{x}'))$ $\gamma(\underline{x}'_0) = \underline{x}_0$

$$d\gamma_{\underline{x}'_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J_\phi(\underline{x}'_0) \end{pmatrix} \quad \text{per la } \mathbb{R}^m \text{ parte}$$

$$\begin{aligned} x_0 + T_{x_0} \Pi &= \{ \underline{x}_0 + d\gamma_{\underline{x}'_0}(u) : u \in \mathbb{R}^m \} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \underline{x}' \\ \underline{x}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}'_0 \\ \underline{x}''_0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \begin{pmatrix} e_j \\ \frac{\partial \phi}{\partial x'_j}(\underline{x}'_0) \end{pmatrix} : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}^m \right\} \end{aligned}$$

Dalle prime m equazioni ricaviamo che $\lambda_j = x_j - x_{0j}$ ($j=1, \dots, m$)
che viene nelle ultime $n-m$ danno

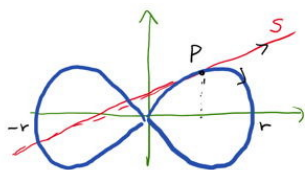
$$\underline{x}'' = \phi(\underline{x}'_0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi}{\partial x'_j}(\underline{x}'_0)(x_j - x_{0j}) = \underline{x}''_0 + J_\phi(\underline{x}'_0) \cdot (\underline{x}' - \underline{x}'_0)$$

2. come funzione calcolata: esercizio ($g(\underline{x}) = \underline{x}'' - \phi(\underline{x}')$, dunque

$$J_g(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} -J_\phi & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{per la } \mathbb{R}^{n-m} \text{ parte} //$$

Ora qualche esercizio, in cui calcoleremo lo spazio tangente affine nelle varie forme in cui si presenta una varietà.

Ex. CIRCA OTTO



Param. $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$

Cat. $x^2 + y^2 = r^2$

Indichiamo $P = \gamma(\pi/2) = (0, r)$

Forma parametrica $\gamma'(t) = (r \cos t, r \sin 2t)$ $\gamma'(\frac{\pi}{6}) = r(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

$S = P + \text{Im } d\gamma_{\pi/6} = \{(\frac{r}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{4}) + \lambda(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{r(\frac{1}{2} + \lambda\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\lambda)\}$

$\begin{cases} x = r(\frac{1}{2} + \lambda\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ y = r(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\lambda) \end{cases} \xrightarrow{\text{2a eq}} y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{r}{4\sqrt{3}} \quad (*)$

Forma canonica $h(x,y) = x^2(r^2 - x^2) - r^2y^2 = 0$

$\nabla h = (2x(r^2 - x^2), -2r^2y)$ $\nabla h(P) = (r\frac{3}{2}, -\frac{r^3\sqrt{3}}{2})$

$S: \nabla h(P) \cdot (x - \frac{r}{2}, y - \frac{r\sqrt{3}}{4}) = 0$

$\cancel{P}(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (x - \frac{r}{2}, y - \frac{r\sqrt{3}}{4}) = 0 \quad \frac{1}{2}(x - \frac{r}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y - \frac{r\sqrt{3}}{4}) = 0$
(che fa ritorno a (*))

Ex. $g(x,y) = x^3 - 3x^2y + y^2$, $M = \{(x,y) : g(x,y) = -3\}$, $P(-1,2)$

(puil dirigo si vedano le note trascritte)

$\nabla g = (3x^2 - 6xy, -3x^2 + 2y)$ $\nabla g(P) = (15, 1)$

retta tg. affini: $\nabla g(P) \cdot (x - x_P, y - y_P) = 0$

$(15, 1) \cdot (x + 1, y - 2) = 0 \quad 15x + 15 + y - 2 = 0 \quad y = -15x - 13$

vediamo in forma grafica: $\nabla g(P) = (15, 1) \xrightarrow{\text{Diri}} \text{spetto } x(y)$

$x = -1 + (-\frac{1}{15})(y - 2) + O_2(y - 2)$ ovvero

$x = -\frac{13}{15} - \frac{1}{15}y + O_2(y - 2)$

retta tg. a M.

Ex. Superficie parametrica $\gamma(u,v) = (u^2, 4u + v^3, 3uv)$; $P(1,3,-3) = \gamma(1,-1)$

(vedi disegno precedente; P e' il punto pancia)

$d\gamma = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 4 & 3v^2 \\ 3v & 3u \end{pmatrix}$ $d\gamma_{(1,-1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

2u/2u 3v/3v

Il piano tangente alle variet  in P (in giallo nel disegno):

$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ ovvero

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 + (\lambda + 3\mu) \\ z = -3 - 3\lambda + 3\mu \end{cases} \xrightarrow{\text{Eliminazione}} 7x - 2y + 2z + 5 = 0 \quad (*)$$

(eq. (2) eliminata dal primo eq.)

Passiamo in forme grafici. $d\gamma_{(1,-1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\det = 6 \neq 0} \begin{cases} x(u,v) \\ y(u,v) \end{cases} \xrightarrow{\text{loc}} \begin{cases} u(x,y) \\ v(x,y) \end{cases}$

da cui $z = 3u(x,y) \cdot v(x,y) = \phi(x,y)$ (forme grafici).

Problema, se $\gamma = (\overset{x}{\gamma_1}, \overset{y}{\gamma_2}, \overset{z}{\gamma_3})$, allora $\phi = \gamma_3 \circ (\gamma_1, \gamma_2)^{-1}$

$\leadsto$ prendiamo gli jacobiani, ed evaluati $(x_0, y_0) = (1, 3)$, $(u_0, v_0) = (1, -1)$:

$$\begin{aligned} J_\phi(1,3) &= J_{\gamma_3}(1,-1) \circ J_{(\gamma_1, \gamma_2)}^{-1}(1,3) = J_{\gamma_3}(1,-1) \cdot \left(J_{(\gamma_1, \gamma_2)}(1,-1) \right)^{-1} : \\ &= (-3, 3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = (-3 \ 3) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (-7/2, 1) \end{aligned}$$

Portando $z = \phi(x,y) = \underbrace{-3}_{\phi(1,3)} + \underbrace{(-7/2, 1)}_{\nabla \phi(1,3)} \cdot \underbrace{(x-1, y-3)}_{(x-x_0, y-y_0)} + \dots$

$$z = -3 - 7/2(x-1) + 1(y-3) + \dots$$

Primo T.G. già visto prima (*)

N.B. Questo calcolo della jacobiana di ϕ a partire dalla jacobiana delle parametrizzazioni γ è stato in termini generali nelle dispense (Proposizioni 6.2.2.(i))