



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 09/10/2025

Ex (ANALISI 3 2016/17, UTIMA APPELLO SCRITTO 12/9/2017)

Sia $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 - 2yz} + x - \frac{1}{2}y + z$.

Detta S la superficie di levels di g passante per il punto $A(0, 2, -1)$, mostrare che S è regolare all'intorno di A e determinare ivi una parametrizzazione locale e il piano tangente affine (quest'ultimo in due modi).

Posso per comodità $R := \sqrt{x^2 - 2yz}$ e ha $\nabla g = (\frac{x}{R} + 1, -\frac{z}{R} - 2, -\frac{y}{R} + 1)$
 $g(A) = -3$, $\nabla g(A) = (1, -3/2, 0) \neq (0, 0, 0) \Rightarrow g$ è immersiva in A

$\Rightarrow S = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = g(A) = -3\}$ è superficie regolare
 intorno di A . Per Dimi, essendo $\frac{\partial g}{\partial x}(A) = 1 \neq 0$ si può

esplicitare $x(y, z)$ all'intorno di $(y, z) = (2, -1)$ con

$$x(2, -1) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla x(2, -1) = \left(-\frac{3/2}{1}, -\frac{0}{1}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 0\right);$$

senza derivando $g(x(y, z), y, z) \equiv -3$ rispetto a y e z si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{2x\dot{x}_y - 2z}{2R} + \dot{x}_y - 2 &= 0 & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R^2} ((\dot{x}_y^2 + x\ddot{x}_{yy})R - \frac{1}{R}(x\dot{x}_y - z)^2) + \ddot{x}_{yy} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{2x\dot{x}_z - 2y}{2R} + \dot{x}_z + 1 &= 0 & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R^2} ((\dot{x}_z^2 + x\ddot{x}_{zz})R - \frac{1}{R}(x\dot{x}_z - y)^2) + \ddot{x}_{zz} \right) &= 0 \end{aligned}$$

da cui, calcolando in $(y, z) = (2, -1)$ si trova

$$\dot{x}_y(2, -1) = \frac{3}{2}, \quad \dot{x}_z(2, -1) = 0, \quad \ddot{x}_{yy}(2, -1) = -1, \quad \ddot{x}_{yz}(2, -1) = \frac{1}{4}, \quad \ddot{x}_{zz}(2, -1) = \frac{1}{2}.$$

Per cui

$$x(y, z) = 0 + \left(\frac{3}{2}, 0\right) \cdot (y-2, z+1) + \frac{1}{2} (y-2, z+1) \begin{pmatrix} -1 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y-2 \\ z+1 \end{pmatrix} + \dots$$

Quanto alle superfici di levels $g(x, y, z) = 2$ regolari...

Si ha $\nabla g = 0$ quando $x = -R$, $y = R$, $z = -2R$: ne ricaviamo che
 $y = -x$ e $z = 2x$, e sostituendo queste in $x = -R$ si ha $x = -\sqrt{5x^2}$
 che equivale al sistema tra $x \leq 0$ e $x^2 = 5x^2$, ovvero $x = 0$.

L'unico punto in cui $\nabla g = 0$ (ovvero in cui g NON è immersiva)

è $O(0,0,0)$ in cui $g(0)=0$. Ne deduciamo che tutte le superfici di livello di g sono regolari, tranne quella di livello 0 in O .

$$\nabla g(A) = (1, -3/2, 0)$$

$$\text{Piano } \pi: \nabla g(A) \cdot (x-x_A, y-y_A, z-z_A) = 0$$

$$(1, -3/2, 0) \cdot (x, y-2, z+1) = 0 \Rightarrow x = 3/2(y-2) (*)$$

$$\text{In forma grafica } \dots \nabla g(A) = (1, -3/2, 0) \leadsto x(y, z)$$

$$x = 0 + \left(-\frac{3/2}{1}, -\frac{0}{1}\right) \cdot (y-2, z+1) + \dots$$

$$x = 3/2(y-2) \text{ che è una piana } (*)$$

ESERCIZI

Verificare se gli insiemi indicati, definiti in vari modi (parametrici, grafici, vincoli) danno luogo a varietà. Calcolare poi lo spazio tangente affine nei punti indicati, possibilmente in più modi.

- (11) $\rho(\theta) = 2a(1 + \cos\theta)$, $P =$ punto con $\theta = -\frac{\pi}{3}$
 (questa curva piana in forma polare è detta CARDIOIDE, provare a disegnarla e a trovare una forma cartesiana)
- (12) Grafici in $\mathbb{R}^2$: $y = e^x - \sin x$ in P punto con $x=1$,
 $x = y - \log(y^2+1)$ in Q punto con $y=2$. (disegnare!)
- (13) $M = \{(x,y): e^x y + x + 2y = 3\}$, $P(0,1)$
- (14) Grafici in $\mathbb{R}^3$: $z = \frac{x^3 - 2x^2y + 3}{4}$, P punto con $(x,y) = (-1,3)$
 e $y = x^2 - 2(z-1)^2$, Q punto con $(x,z) = (-1,2)$.
- (15) $M_1 = \{(x,y,z): g(x,y,z) = 3xyz - z^3 = 4\}$, $P(-1,-2,2)$
 $M_2 = \{(x,y,z): h(x,y,z) = \log(xy+z) - x + y - z = -3\}$, $Q(2,0,1)$
 Determinare anche quali superfici di livello di g e di h danno luogo a superfici regolari di $\mathbb{R}^3$.
- (16) Curva parametrica in $\mathbb{R}^3$: $\gamma(t) = (t - \log(1+t), t^2 - 3t, 2t + \cos t)$
 nel punto $P(0,0,1) = \gamma(0)$
- (17) Grafici in $\mathbb{R}^3$: $(x(z), y(z)) = (z \cos z, z \sin z)$ (disegnare!)
 nel punto P con $z = \frac{\pi}{2}$.
- (18) $M_{\alpha,\beta} = \begin{cases} x+y+z = \alpha \\ xy+xz+yz = \beta \end{cases}$ Per quali (α,β) l'insieme $M_{\alpha,\beta}$ è una varietà regolare di $\mathbb{R}^3$? Di quale dimensione?
 Calcolare lo spazio tangente affine a $M := M_{5,0}$ in $P(1,2,2)$.
 Provare a disegnare M (sostituire $z = 5 - x - y$ nelle 2^e equaz...)

Svolgiamo alcuni di questi esercizi.

(14) Grafico in $\mathbb{R}^3$: $z = \frac{x^3 - 2x^2y + 3}{4}$, P punto $\hookrightarrow (x, y) = (-1, 3)$

In generale, se si ha un grafico $\underline{x}'' = \phi(\underline{x}')$, allora lo spazio $T_{\underline{x}_0}$ è definito

a $M = \{ \underline{x} = (\underline{x}', \underline{x}'') \in \mathbb{R}^n : \underline{x}'' = \phi(\underline{x}') \}$ in un suo punto

$\underline{x}_0 = (\underline{x}'_0, \underline{x}''_0) \hookrightarrow \underline{x}''_0 = \phi(\underline{x}'_0)$ si definisce

$\underline{x}'' = \underline{x}''_0 + J_{\phi}(\underline{x}'_0)(\underline{x}' - \underline{x}'_0)$.

Qui $\underline{x}'' = z$, $\underline{x}' = (x, y)$; $J_{\phi} = \nabla z = \left(\frac{3x^2}{4} - xy, -\frac{x^2}{2} \right)$

$\underline{x}'_0 = (-1, 3)$; $\underline{x}''_0 = z_0 = -1$; $J_{\phi}(\underline{x}'_0) = \nabla z(-1, 3) = \left(\frac{15}{4}, -\frac{1}{2} \right)$

Otteniamo dunque $z = -1 + \left(\frac{15}{4}, -\frac{1}{2} \right) \cdot (x+1, y-3)$ cioè

$z = -1 + \frac{15}{4}(x+1) - \frac{1}{2}(y-3)$, cioè $15x - 2y - 4z + 17 = 0$

(l'altra metà dell'Ex. 14: esercizio).

(15) $M_1 = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 3xyz - z^3 = 4\}$, $P(-1, -2, 2)$.

Determinare anche quali superfici di livello di g danno luogo a superfici regolari di $\mathbb{R}^3$

Verifichiamo dove g è sommersiva.

$\nabla g = (3yz, 3xz, 3xy - 3z^2) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ xy - z^2 = 0 \end{cases}$

$yz = 0 \wedge y = 0 \implies \begin{cases} xz = 0 \\ -z^2 = 0 \end{cases} \implies z = 0 \implies (u, 0, 0) \text{ ASSE } x$

$\wedge z = 0 \implies \begin{cases} 0 = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \implies (0, v, 0) \text{ ASSE } y \\ y = 0 \implies (u, 0, 0) \text{ ASSE } x \end{cases}$

A quali sup. di livello di g appartengono tali punti?

$g(u, 0, 0) = g(0, v, 0) = 0$: dopo tutte le sup. di livello

$g(x, y, z) = 4 \neq 0$ sono regolari, mentre invece le superfici

$g(x, y, z) = 0$ si sanno trovare nei punti degli assi x e y

$3xyz - z^3 = 0 \iff z(3xy - z^2) = 0$ UNIONE DEL PIANO ORIZZ. $z=0$ CON LA QUADRICA $3xy = z^2$

Tornando al nostro caso ($4 \neq 0$, $P(-1, -2, 2)$):

$$\nabla g(P) = (-12, -6, -6) = -6(2, 1, 1)$$

$$\text{St. tg. affini: } \nabla g(P) \cdot (x-x_P, y-y_P, z-z_P) = 0$$

$$-6(2, 1, 1) \cdot (x+1, y+z, z-z) = 0 \quad \text{cioè} \quad 2x+y+z=0$$

$$\text{Come funzione grafica: } \frac{\partial g}{\partial y}(P) = -6 \neq 0 \rightarrow \text{applico } y(x, z)$$

$$y = -2 + \left(-\frac{12}{-6}, -\frac{6}{-6}\right) \cdot (x-(-1), z-z) + \dots, \text{ ovvero}$$

$$-2 + (-2, -1) \cdot (x+1, z-z) + \dots$$

(16) Curva parametrizzata in $\mathbb{R}^3$: $\gamma(t) = (t - \log(1+t), t^2 - 3t, 2t + \cos t)$
nel punto $P(0, 0, 1) = \gamma(0)$

$$\gamma'(t) = \left(1 - \frac{1}{1+t}, 2t-3, 2-\sin t\right) \neq (0, 0, 0)$$

Dunque $\gamma:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^3$ è immersiva (per l'immersione di un intervallo si ha una curva regolare)

$$\gamma'(0) = \left(0, -3, 2\right); \text{ dunque la retta } \gamma \text{ affini alla curva in } P$$

$$\text{è } r = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-3\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x=0 \\ z=1-\frac{3}{2}y \end{cases}$$

Sembra, in forma grafica. Ad esempio, $\frac{dz}{dt}(t=0) = 2 \neq 0 \rightarrow$

$$\rightarrow t = t(z) = 0 + \frac{dt}{dz}(z=1) \cdot (z-1) + \dots = \frac{1}{2}(z-1) + o_1(z-1)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(z) - \log(1+t(z)) \\ t(z)^2 - 3t(z) \end{pmatrix} \quad \text{funzione grafica.}$$

$$\text{Retta } \gamma: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{dx}{dz}(1) \\ \frac{dy}{dz}(1) \end{pmatrix} \cdot (z-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2(z-1) \end{pmatrix} \quad \text{come prima}$$

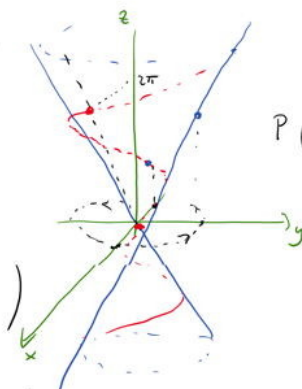
(17) Grafico in $\mathbb{R}^3$: $(x(z), y(z)) = (z \cos z, z \sin z)$ (disegnare!)
nel punto P con $z = \pi/2$.

$$\text{Notiamo che } x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{Cura A due FASCE}$$

Dunque il luogo delle curve è una
su quasi cono.

È di cui curva regolare (il grafico!)

$$\gamma(z) = (x(z), y(z), z) \rightarrow \gamma'(z) = \begin{pmatrix} \cos z - z \sin z \\ \sin z + z \cos z \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$P(0, \pi/2, \pi/2)$$

$$\gamma'(\pi/2) = \begin{pmatrix} -\pi/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{retto } \gamma: \begin{cases} x = 0 + \lambda(-\pi/2) \\ y = \pi/2 + \lambda \\ z = \pi/2 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda = z - \pi/2) \quad \begin{cases} x = -\pi/2(z - \pi/2) \\ y = z \end{cases}$$

Semi-axe grezzi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\pi/2 \\ 1 \end{pmatrix} (z - \pi/2) + \dots \quad \text{con } \begin{cases} x = -\pi/2(z - \pi/2) \\ y = \pi/2 + (z - \pi/2) \end{cases}$$

(18) $M_{\alpha, \beta} = \begin{cases} x+y+z = \alpha \\ xy+xz+yz = \beta \end{cases}$ Per quali (α, β) l'insieme $M_{\alpha, \beta}$ è un sotto-rete di $\mathbb{R}^3$? Di quale dimensione?

Calcolare lo spazio tangente affine a $M := M_{5,0}$ in $P(1,2,2)$.

Provare a disegnare M (sostituire $z = 5 - x - y$ nelle 2 eq e z...)

Curva in forma canonica (2 equazioni in 3 variabili $\Rightarrow \dim = 3 - 2 = 1$)

$$G = (g_1, g_2): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad G(x, y, z) = (x+y+z, xy+xz+yz)$$

$$J_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix} \quad \text{lung } \text{rk } J_G < 2 \Leftrightarrow x=y=z$$

ovvero nei punti del tipo (u, u, u) in cui G vale

$$(2, \beta) = G(u, u, u) = (3u, 3u^2) \quad \text{ovvero } \begin{cases} 2 = 3u \\ \beta = 3u^2 \end{cases} \quad \text{ovvero in cui } \beta = \frac{1}{3} 2^2$$

Dopo tutte le curve di livello di G sono regolate tranne quelle

del tipo $M_{2, \frac{4}{3}2^3}$ nel suo punto $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

Il punto $P(1,2,2)$ non è di quel tipo, dopo il replace.

Retto γ affine a $M = M_{5,0}$ in P è dato da $J_G(P) \cdot \begin{pmatrix} x-x_P \\ y-y_P \\ z-z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ovvero } \begin{cases} x+y+z = 5 \\ 4x+3y+3z = 16 \end{cases} \quad (*)$$

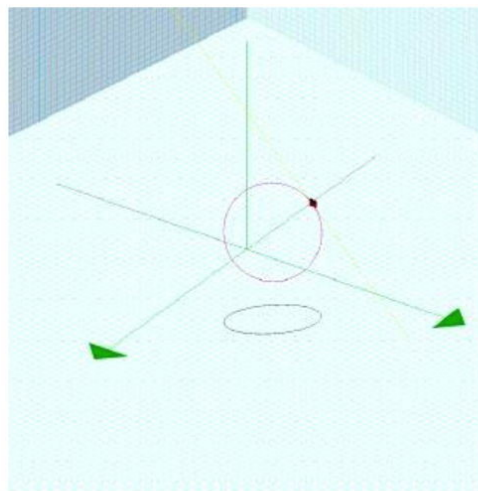
In forma grezza: $J_G(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ form $\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}$

ovvero $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(- \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) (z-2) + \dots$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (z-2) + \dots = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} (z-2) + \dots$$

da cui la retta g $\begin{cases} x=1 \\ y=4-z \end{cases}$ che è equivalente alla (*)
 $M = \begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+xz+yz=8 \end{cases} \quad z=5-x-y \xrightarrow{II^a} x^2+xy+y^2-5x-5y+8=0$
 è una conica, che è un'ellisse ($\Delta = 1-4 = -3 < 0$)

Ne segue che M è
 l'intersezione tra il cilindro
 verticale di base l'ellisse
 $x^2+xy+y^2-5x-5y+8=0$
 e il piano inclinato
 $x+y+z=8$.



ESTREMI VINCOLATI SULLE VARIETA'

M varietà di dim m in $\mathbb{R}^n$, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

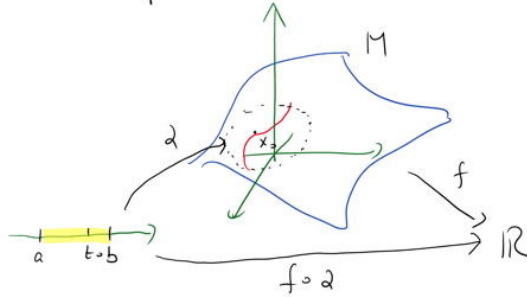
Supp. che f sia almeno di classe $\mathcal{C}^1$ (ovvero f è indotta su M da
 una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ definita su intorni aperti dei punti di M)
 Pensavo io in questo vedeva $f(x_1, \dots, x_n)$, ma la penso solo nei punti di M

Qui occupo di trovare gli eventuali estremanti di f su M

Devo prima di tutto trovare una nozione sensata di punti stazionari per f su M .

Per capire come fare, prendiamo un $x_0 \in M$ che sia ad esempio un max locale per f su M e vediamo se c'è qualche proprietà necessaria da quella fatto.

Prendiamo una qualsiasi curva $\alpha:]a, b[\rightarrow M$ che passi per $x_0 = \alpha(t_0)$



Se x_0 è pt di max locale per f su M , ovviamente anche t_0 lo sarà per $f \circ \alpha$ (sto restringendo alle immagini delle curve), e dunque $(f \circ \alpha)'(t_0) = 0$ (AN 1)

ma anche $0 = (f \circ \alpha)'(t_0) = df_{x_0}(\alpha'(t_0))$, quindi $\alpha'(t_0) \in \text{Ker } df_{x_0}$.

Verifichiamo che α è una qualsiasi curva per $x_0 \Rightarrow T_{x_0}M \subseteq \text{Ker } df_{x_0}$.

Def. Si dice che $x_0 \in M$ è stazionario per f su M se $T_{x_0}M \subseteq \text{Ker } df_{x_0}$.

Notiamo che se $m = n$ (cioè se M è un aperto di $\mathbb{R}^n$) allora $T_{x_0}M = \mathbb{R}^n$ e dunque siamo di cad che $\mathbb{R}^n \subseteq \text{Ker } df_{x_0}$, ovvero che $\text{Ker } df_{x_0} = \mathbb{R}^n$ ovvero che $df_{x_0} = 0$ (che è la ben nota definizione data in Analisi 2 per funzioni definite su aperti di $\mathbb{R}^n$).

Prop. | Gli estremanti locali per f su M sono stazionari per f su M .

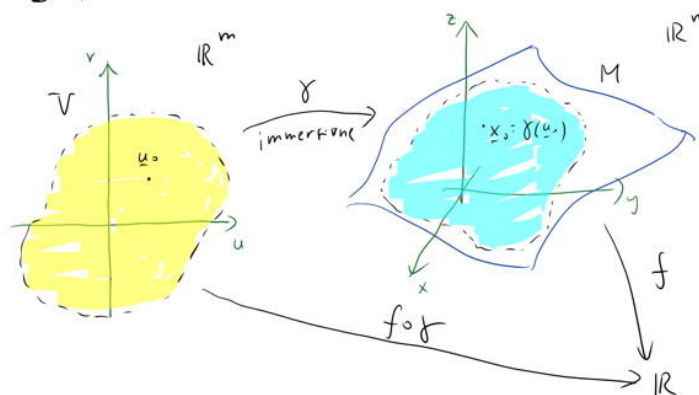
Dim. Non serve (la def. di stazionarietà è stata costruita ad arte per ciò sia vero!) //

A questo punto, i problemi sul tavolo sono sostanzialmente quelli di Analisi 2:

(1) Trovare i punti stazionari per f su M

(2) Determinarne la natura (pt di max? min? sella?)

Iniziamo a trattare il caso PARAMETRICO:



Come detto, in generale non si può sperare di esprimere tutta M con una sola parametrizzazione! Basterebbe infatti questa procedura per ognuno delle parametrizzazioni che compongono un atlante di M .

Prop. | Se $x_0 = \gamma(u_0)$. Allora x_0 è stazionario per f su M ($\Leftrightarrow$) u_0 è stazionario per $f \circ \gamma$.
 E in quest'ultima caso posso usare gli strumenti di ANAL. 1 E 2, PERCHÉ $f \circ \gamma$ È UNA FUNZIONE DEFINITA SULL'APERTO V DI $\mathbb{R}^m$
 Inoltre la natura di x_0 per f su M è la stessa di u_0 per $f \circ \gamma$ (ovvero x_0 è di max/min/sella per f su M se e solo se tale è u_0 per $f \circ \gamma$.)

Dim. | Si ha $d(f \circ \gamma)_{u_0} = df_{x_0} \circ d\gamma_{u_0}$, perciò u_0 staz. per $f \circ \gamma$ ($\Leftrightarrow$) $d(f \circ \gamma)_{u_0} = 0$ ($\Leftrightarrow$) $d(f \circ \gamma)_{u_0}(v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^m$
 $\Leftrightarrow df_{x_0}(d\gamma_{u_0}(v)) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow df_{x_0}(u) = 0 \quad \forall u \in T_{x_0}M$
 $\Leftrightarrow T_{x_0}M \subseteq \text{Ker } df_{x_0} \Leftrightarrow x_0$ staz. per f su M .
 Infine, l'affermazione sull'equivalenza delle nature è ovvia! //

Potendo il caso a parametri è il più facile: il problema su M viene traslato letteralmente in quello su V , che si affronta coi mezzi di An 1 e 2.

Ex. | Calcolare gli estremi locali (e globali?) di $f_1(x,y) = x+y$ e $f_2(x,y) = x$ su $M_1 = \{x = 1-y^3\}$ e $M_2 =$ tratto della curva-otto con $-\sqrt[3]{1/6} < t < \sqrt[3]{1/6}$.

