



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

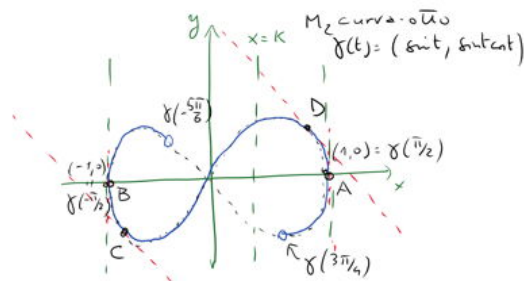
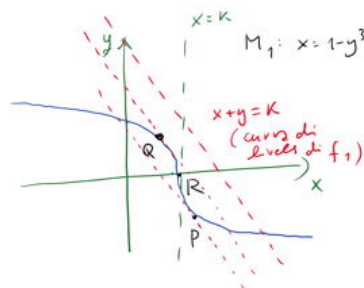
ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 10/10/2025

- Ex. Calcolare gli estremi locali (e globali?) di
 $f_1(x,y) = x+y$ e $f_2(x,y) = x$ su $M_1 = \{x = 1-y^3\}$
 e $M_2 = \text{tratto della curva-otto con } -5\pi/6 < t < 3\pi/4$.



- $f_1(x,y) = x+y$ su M_1 $\gamma_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\gamma(y) = (1-y^3, y)$

$$F(y) := (f_1 \circ \gamma)(y) = 1-y^3+y \quad F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ è funzione di An 1!}$$

$$F'(y) = -3y^2+1 = 0 \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad F'(y) > 0 \text{ per } |y| < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- Pertanto $P(1+\frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \in M_1$ è di min. locale per f_1
 e $Q(1-\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \in M_1$ è di max. locale per f_1 .

	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
F'	-	+	-
F	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
	min	MAX	

Visualizzando le curve di livello di f_1 nel piano (le rette $x+y=K$ che salendo/scendendo fanno aumentare/diminuire il valore di f_1) il risultato appare geometricamente chiaro.

- $f_2(x,y) = x$ su M_2 $\gamma:]-5\pi/6, 3\pi/4[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin t, \sin 2t)$

$$F(t) := f_2(\gamma(t)) = \sin t \quad F'(t) = \cos t = 0 \quad t = \pm \pi/2$$

$$F'(t) > 0 \Leftrightarrow \cos t > 0 \Leftrightarrow |t| < \pi/2$$

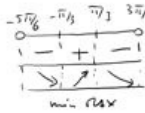
	$-5\pi/6$	$-\pi/2$	$\pi/2$	$3\pi/4$	
F'	-	+	-	-	
F	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	
		min	MAX		

Pertanto i punti $A(1,0) = \gamma_2(\pi/2)$ e $B(-1,0) = \gamma_2(-\pi/2)$ sono rispettivamente di max/min locale (in realtà globale)

per f_2 su M_2 : anche in questo caso, la visualizzazione delle curve di livello di f_2 nel piano (le rette verticali $x=K$, verdi) rendono geometricamente chiaro il risultato, che mette in evidenza il punto più a destra (A) o più a sinistra (B) della porzione M_2 di curva-otto.

- $f_2(x,y) = x$ su M_1 , $F(y) := (f_2 \circ \gamma_1)(y) = 1-y^3$. $F'(y) = -3y^2 = 0$
 $\Leftrightarrow y = 0$; $F'(y) < 0$ per $y \neq 0$. $F' \begin{array}{|c|} \hline - \\ \hline \end{array}$, Dunque il punto
 $R(1,0) = \gamma_1(0)$ di M_1 è fless.

- $f_1(x,y) = x+y$ su M_2 . $F(t) := (f_2 \circ \gamma_2)(t) = \cos t + \sin t \cos t$
 $F'(t) = \cos t + \cos^2 t - \sin^2 t = \cos t(1 + \cos t) - (1 + \cos t)(1 - \cos t)$
 $= (1 + \cos t)(2\cos t - 1)$. $F'(t) = 0 \iff \cos t = -1$ (NO nel dominio)
 $\cos t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$
 $F'(t) > 0 \iff (1 + \cos t)(2\cos t - 1) > 0 \iff \cos t > \frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3}$
 Dunque $\gamma(-\frac{\pi}{3}) = C(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$ è pts di min locale
 e $\gamma(\frac{\pi}{3}) = D(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ di max locale (in realtà è globale)
 per f_1 su M_2 , come la visualizzazione grafica mostra chiaramente.



OSSERVAZIONE (IMPORTANTE). Si sarà osservato che nelle curve M_1 e M_2 si è evitato di inserire dei "punti di bordo" (M_1 è una cubica illimitata, e M_2 è privata degli estremi $\gamma(-\frac{\pi}{6})$ e $\gamma(\frac{\pi}{6})$): in effetti, una curva su un "punto di bordo" (definiremo meglio tra qualche lezione quest' concetto) non è più una varietà (un intervallo semi-chiuso non è differente a un intervallo aperto).

SE ESISTESSE DIFFERENZA: $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$, DETTO
 $P = \varphi(b)$ (PUNTO INTERNO DI $a \rightarrow d$) E SAREMME DIFFERENZA
 INDOVINO $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$, IMPOSSIBILE: 1 $\rightarrow$ 2!

Poiché dunque M_1 e M_2 non sono compatte di $\mathbb{R}^2$, non hanno conti di f_1 e f_2 (continue) ammettono estremi assoluti su esse (in realtà li ammettono su M_2 , come visto...).

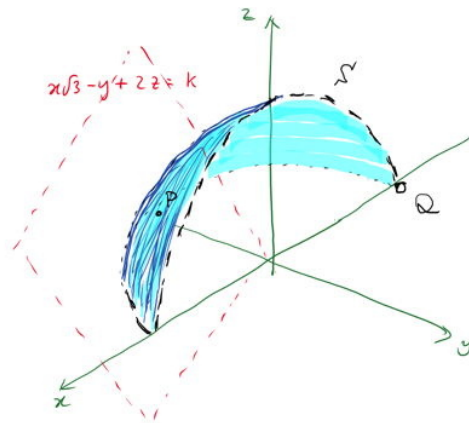
Considerazioni simili valgono anche per il prossimo esercizio (in dim. superiore), in cui si intende che la superficie S è priva di punti di bordo (i due semicirchi sui piani $z=0$ e $y=0$).

Tuttavia prossimamente ci occuperemo di cercare gli estremi assoluti di funzioni di classe C^1 su insiemi **compatti** di $\mathbb{R}^n$.

(che esistono per Weierstrass), e allora le strategie saranno:

1. decomporre tali insiemi in pezzi ciascun dei quali sia una varietà;
2. Cercare punti stazionari della funzione su ciascuno di essi;
3. Vedere in quali di essi la funzione assume i suoi estremi.

Ex. Determinare gli estremi locali delle funzioni $f(x,y,z) = x\sqrt{3} - y + 2z$ sul quarto di superficie sferica S di centro l'origine, raggio R e tale che $y \leq 0$ e $z \geq 0$.



Parametrizziamo S usando le coordinate sferiche (θ, φ) di $\mathbb{R}^3$ (il raggio ρ è bloccato sul valore R).

S è descritta per $(\theta, \varphi) \in]-\pi, 0[\times]0, \pi/2[$

$$\gamma:]-\pi, 0[\times]0, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi)$$

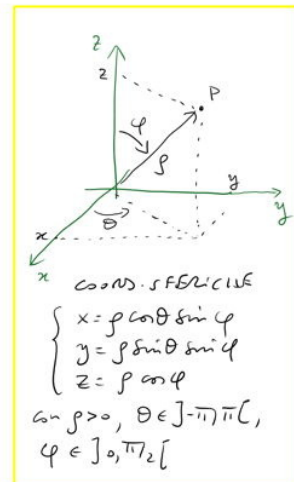
$$\begin{aligned} F(\theta, \varphi) &:= (f \circ \gamma)(\theta, \varphi) = f(x(\theta, \varphi), y(\theta, \varphi), z(\theta, \varphi)) \\ &= R(\sqrt{3} \cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \sin \varphi + 2 \cos \varphi) \\ &= R((\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta) \sin \varphi + 2 \cos \varphi) \end{aligned}$$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \theta} \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} -(\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta) \sin \varphi \\ (\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta) \cos \varphi - 2 \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta) \sin \varphi = 0 \\ (\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta) \cos \varphi - 2 \sin \varphi = 0 \end{cases} \begin{cases} \theta = -\pi/6 \\ \varphi = \pi/6 \end{cases}$$

$$H_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial \varphi} & \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} -(\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta) \sin \varphi & -(\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta) \cos \varphi \\ -(\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta) \sin \varphi & -(\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta) \cos \varphi - 2 \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$H_F(-\pi/6, \pi/6) = R \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ è def. negativa } \Leftrightarrow (\theta_0, \varphi_0) = (-\pi/6, \pi/6) \text{ è punto di max. l.c. strett. per } F$$

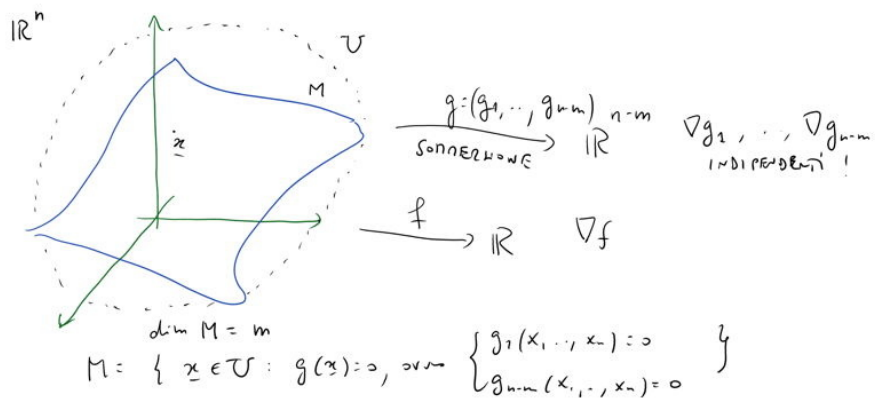


Primo il punto $\gamma(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}) = P(\frac{\sqrt{3}}{4}R, -\frac{\sqrt{2}}{4}R, \frac{\sqrt{2}}{4}R)$
 è di max locale stretto per f su S . In realtà è anche di
 un punto di max assoluto, che lo riceve anche dalle superfici di
 livello di f , ovvero i piani paralleli $x\sqrt{3} - y + 2z = k$ segnati in rosso
 nelle figure in alto, e che corrispondono a valori crescenti di f
 quando più avanti incontriamo l'asse x : il punto P è proprio
 il punto di tangenza tra S e uno di questi piani, e gli altri
 punti di S incontrano piani più indietro di quello tangente.

ESERCIZI

- (19) Studiare gli estremi di $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$
 sul grafico $y = \sqrt{x+1}$ e sul tratto di spirale
 d'Archimede $\rho(\theta) = \theta$ con $0 < \theta < 2\pi$.
 Qual è il significato geometrico dei risultati?
- (20) Quali sono i punti del grafico $y = x^2 - 2(z-1)^2$
 più vicini all'origine?

Troveremo ora il caso (b) degli estremi di una funzione $\mathcal{C}^1$
 su una varietà (almeno $\mathcal{C}^2$) di dim m . IN FORMA CARTESIANA.



Vogliamo esprimere le stazionarietà di f su M in un certo punto $x \in M$ in termini dei gradienti $\nabla f(x), \nabla g_1(x), \dots, \nabla g_{n-m}(x)$.

Teor. (Moltiplicatori di Lagrange)

$x \in M$ è stazionario per f su $M \Leftrightarrow$

$\nabla f(x)$ è generato dagli $n-m$ gradienti $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_{n-m}(x)$,

ovvero $\Leftrightarrow$ esistono $n-m$ numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m} \in \mathbb{R}$ t.c.

la $(2n-m)$ -upla $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-m})$ soddisfa:

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \dots + \lambda_{n-m} \nabla g_{n-m}(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \lambda_{n-m} \frac{\partial g_{n-m}}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) + \dots + \lambda_{n-m} \frac{\partial g_{n-m}}{\partial x_n}(x) \\ g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_{n-m}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (2n-m) \\ \text{incognite} \\ \text{in } 2n-m \\ \text{equazioni!} \end{matrix}$$

Defin. x è staz. per f su $M \Leftrightarrow T_x M \subseteq \ker df_x = \{v \in \mathbb{R}^n : \nabla f(x) \cdot v = 0\}$

$$\Leftrightarrow \nabla f(x) \perp T_x M \Leftrightarrow \nabla f(x) \in (T_x M)^\perp = \langle \nabla g_1(x), \dots, \nabla g_{n-m}(x) \rangle //$$

Delle $2n-m$ incognite $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-m})$ ci interessano veramente solo le n coordinate $x_1, \dots, x_n$: come evitare di dover calcolare anche le $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m}$? Ragioniamo.

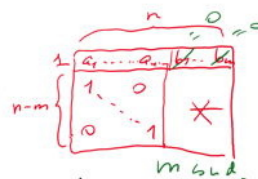
$$A = \begin{bmatrix} \nabla f(x) \\ \nabla g_1(x) \\ \vdots \\ \nabla g_{n-m}(x) \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow n \\ \uparrow A: n-m+1 \\ \downarrow \end{matrix}$$

è come chiedere che $\text{rk } A < n-m+1$ (anche se già so che $\text{rk } A \geq n-m$ per i gradienti delle g linearmente indipendenti), dopo chiedere che $\text{rk } A = n-m$.

$\Leftrightarrow$ tutti i minori di ordine max $n-m+1$ abbiano $\det = 0$.

(in realtà, delle molte equazioni che spunterebbero ve ne sono solo m indipendenti: può bastare già sapere che $\text{rk } A \geq n-m$...)

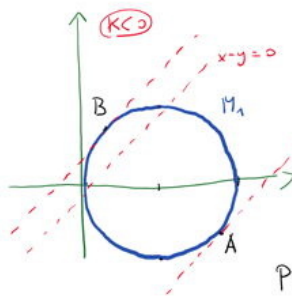
Col metodo dei moltiplicatori di Lagrange non si determina i punti stazionari di f su M . Per capire invece le loro nature dovrà ricorrere a una parametr. locale di f nei vari punti (ad Dini...) e usare il ragionamento visto per il caso parametrico.



Facciamo qualche esercizio.

Ex. Estremi locali di $f_1(x,y) = x-y$, $f_2(x,y) = y$, $f_3(x,y) = 3x^2 - 2y$
 su $M_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 2x\}$, e su $M_2 = \{(x,y) : x^3 - 3x^2y + y^3 = 1\}$.

Vediamo ad es. f_1 su M_1 $g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 2x = 0$



$x-y=k$
 $k < 0$
 $k > 0$

Le prime condizioni di Lagrange e' che $\text{rk} \left(\frac{\nabla f}{\nabla g} \right) < 2$
 ovvero che $\det = 0$ (e' matrice 2×2).

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2x-2 & 2y \end{pmatrix} = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1-x \\ x^2 + (1-x)^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$2x^2 - 4x + 1 = 0 \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad y = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pti crit. per f_1 su M_1 : $A(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $B(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

Analizziamo i punti dai conti le nature di A e B, ad esempio di B
 (anche si abbassa già capito che e' un pnt. di min. assoluto!)

$$\nabla g_1(B) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \xrightarrow{\text{Dini}} x(y) = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + (-\frac{\sqrt{2}}{2})(y - \frac{\sqrt{2}}{2}) + \dots = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + 1(y - \frac{\sqrt{2}}{2}) + \dots$$

Ci serve anche $x''(\frac{\sqrt{2}}{2})$:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \xrightarrow{d/dy} 2xy' + 2y - 2x' = 0 \xrightarrow{y=\frac{\sqrt{2}}{2}} 2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})x' + \sqrt{2} - 2x' = 0 \Rightarrow x'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1$$

$$\xrightarrow{d/dy} 2(x')^2 + 2xx'' + 2 - 2x'' = 0 \xrightarrow{y=\frac{\sqrt{2}}{2}} 2 + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})x'' + 1 - x'' = 0$$

$$\Rightarrow x''(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Dunque } x(y) = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + 1 \cdot (y - \frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} (y - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \dots$$

Osservo $x(y)$ per capire le nature di B:

$$F_1(y) := f_1(x(y), y) = x(y) - y \quad (\text{funzione di 1 var})$$

$$F_1'(y) = x'(y) - 1 \xrightarrow{y=\frac{\sqrt{2}}{2}} F_1'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = x'(\frac{\sqrt{2}}{2}) - 1 = 0 \quad (\text{già lo sapevo!})$$

$$F_1''(y) = x''(y) \xrightarrow{y=\frac{\sqrt{2}}{2}} F_1''(\frac{\sqrt{2}}{2}) = x''(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2} > 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e' di min. lc. stess. per } F_1$$

$\Rightarrow B$ e' di min. lc. stess. per f_1 su M_1 (e' un pnt. di min. assoluto!)

In realtà si poteva premettere M_1 globalmente:

$$\gamma_1(\psi) = (1, 0) + 1 \cdot (\cos \psi, \sin \psi) = (1 + \cos \psi, \sin \psi) \quad \gamma_1:]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$$

Rifare l'esercizio su γ_1 : bisogna studiare

$$F_1(\psi) = f_1(\gamma_1(\psi)) = (1 + \cos \psi) - \sin \psi \quad (\text{Anche si})$$

Fare gli altri esercizi analoghi per f_2, f_3, M_2 .

E_x Estremi locali di $f(x, y, z) = x + 2z$ sulle surf. $3xyz - z^3 = 1$ (M)

$g(x, y, z) = 3xyz - z^3 - 1 = 0$ (dunque già sapere che la surf. M è regolare)

$$\nabla g = (3yz, 3xz, 3(xy - z^2)) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ xy - z^2 = 0 \end{cases}$$

$$yz = 0 \wedge y = 0 \begin{cases} xz = 0 \Rightarrow z = 0 & (4, 0, 0) \\ 0 = 0 \wedge x = 0 & (0, 0, 0) \\ 0 = 0 \wedge y = 0 & (0, 0, 0) \end{cases}$$

Dunque g non è estrema nei punti degli assi x e y .

In essi $g(4, 0, 0) = -1$, $g(0, 0, 0) = -1$

Perciò $M = \{g = 0\}$, nessun di questi punti sc. in $M \Rightarrow$ è regolare.

$$\begin{cases} \text{rk} \left(\frac{\partial f}{\partial g} \right) < 2 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3yz & 3xz & 3(xy - z^2) \end{pmatrix} < 2 \\ 3xyz - z^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3xz = 0 \\ 3(xy - z^2) - 6yz = 0 \\ -6xz = 0 \end{cases} \begin{cases} xz = 0 \\ xy - z^2 - 2yz = 0 \\ 3xyz - z^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

← DIFERENZE GIÀ DALLA PRECEDENTE

$$\wedge x = 0 \quad \begin{cases} -z^2 - 2yz = 0 \\ -z^3 - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = -1 \\ y = 1/2 \end{cases} \quad A(0, 1/2, -1)$$

$$\wedge z = 0 \quad \begin{cases} xy = 0 \\ -1 = 0 \end{cases} \quad \text{nessuna soluzione!}$$

Perciò A è l'unica pt. stazionario per f su M .

Per capire la natura serve una parametr. locale di M vicino A .

$$\nabla g(A) = (-3/2, 0, -3) \xrightarrow{\text{Dini}} z(x, y) = -1 + \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1/2 \end{pmatrix} + \dots$$

cioè $z(x, y) = -1 - \frac{1}{2}x + \dots$ Ma servono anche le derivate seconde di z ...

$$3xyz - z^3 = 1 \xrightarrow{\partial_x} 3yz + 3xy\dot{z}_x - 3z^2\dot{z}_x = 0 \xrightarrow{\partial_y} \dots \quad \text{e poi calcoli per } (x, y, z) = (0, 1/2)$$

$$\xrightarrow{\partial_y} 3xz + 3xy\dot{z}_y - 3z^2\dot{z}_y = 0 \xrightarrow{\partial_x} \dots$$

$$\text{Dopo altri: } \ddot{z}_{xx}(0, 1/2) = \ddot{z}_{yy}(0, 1/2) = 0, \quad \ddot{z}_{xy}(0, 1/2) = -1$$

$$\text{Dunque } H_2(0, 1/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

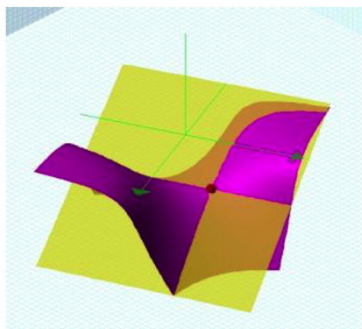
Chiamo $F(x, y) := f(x, y, z(x, y)) = x + 2z(x, y)$

$$\nabla F = (1 + 2\dot{z}_x, 2\dot{z}_y) \Rightarrow \nabla F(0, 1/2) = (0, 0) \quad (\text{già sappiamo!})$$

$$H_F = \begin{pmatrix} 2\ddot{z}_{xx} & 2\ddot{z}_{xy} \\ 2\ddot{z}_{xy} & 2\ddot{z}_{yy} \end{pmatrix} = 2H_2 \Rightarrow H_F(0, 1/2) = 2H_2(0, 1/2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

indefinita (det < 0)

Dunque $(0, 1/2)$ è sella per $F \Leftrightarrow A$ è una sella per f su M .



Disegno dell'elebrazione grafica:

- M è in porpora
- A è in giallo
- la superficie di livello di f per A è gialla

È chiaro che A è un sella:
al suo intorno vi sono punti di M
in cui f vale più che in A
e altri in cui vale meno.

Altro esercizio su max-min vincolati nel caso cartesiano:

(Verrà svolto posteriormente; vi suggerisco di affrontarlo in anticipo.)

Ex) Verificare che $\Gamma = \begin{cases} 2xy + z^2 = 3 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ è una curva regolare di $\mathbb{R}^3$,

e trovare le estremità locali in alto e in basso.

Verificare poi che Γ è compatta, capendo com'è fatta,
e trovare i punti più in alto e più in basso.