

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

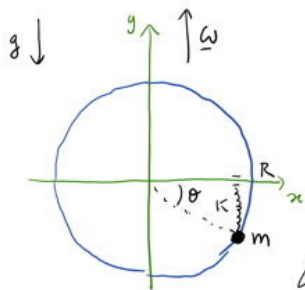
Corrado Marastoni

Lezione di martedì 14/10/2025

SISTEMA DINAMICO CON VINCOLI FISSI E LIGATI E FORZE CONSERVATIVE

Nel caso, di interesse fisico, di un sistema dinamico con vincoli fissi (non variabili nel tempo) e lisci (ovvero vincoli capaci di reazioni solo perpendicolari, il che esclude ad esempio i fenomeni dissipativi come l'attrito) e soggetto a forze conservative, detta $E(x, y, z)$ l'energia potenziale di tali sollecitazioni $\underline{F}$ (dunque $\underline{F} = -\nabla E$), i punti stazionari di $E(x, y, z)$ sulla varietà data dai vincoli sono le configurazioni di equilibrio del sistema, quelle in cui dunque le forze sono perpendicolari ai vincoli (e dunque possono essere controbilanciate dalle reazioni vincolari, dando luogo a una forza attiva nulla). A loro volta, poi, gli equilibri si dividono in stabili (se si tratta di punti di minimo locale stretto di E) e instabili (tutti gli altri).

Ex. Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi senza attrito su una guida circolare di raggio R posta in un piano verticale. La massa è soggetta alle forze di gravità e a una forza elastica di costante $K > 0$ esercitata da una molla di lunghezza a riposo nulla il cui perno si muove sull'asse orizzontale della guida parallelamente alla massa. Inoltre la guida ruota attorno al suo asse verticale con velocità angolare costante ω . Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, studiandone la stabilità.



Sistema dinamico a un grado di libertà:
vincoli fissi e liberi.

$$\text{Vincoli: } g(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

$$E(x, y) = mgy + \frac{1}{2}ky^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

Condizioni di equilibrio: pt. staz. di E nel vincolo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rk} \left(\frac{\nabla E}{\nabla g} \right) < 2 \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \det \begin{pmatrix} -m\omega^2x & mg+ky \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = 0 \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x((m\omega^2+k)y+mg) = 0 \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{array} \right.$$

$$I^s = \left\{ \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y = \pm R \quad (\text{equilibri ovvi}) \\ y = -\frac{mg}{m\omega^2+k} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{R^2(m\omega^2+k)^2 - m^2g^2}}{m\omega^2+k} \end{array} \right. \quad \leftarrow \text{equilibri che esistono solo se } m\omega^2+k > \frac{mg}{R} \text{ in cui quest'ultimo è molto maggiore di 1.}$$

Dopo la Teoria gli ovvi equilibri $N(0, R)$ e $S(0, -R)$

poi due altri eventuali equilibri $A_{\pm} \left(\pm \frac{\sqrt{R^2(m\omega^2+k)^2 - m^2g^2}}{m\omega^2+k}, -\frac{mg}{m\omega^2+k} \right)$

Parametrizzo il vincolo: $\chi(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta)$

$$F(\theta) := E(\chi(\theta)) = R \left(mg \sin \theta + \frac{1}{2}kR \sin^2 \theta - \frac{1}{2}m\omega^2 R \cos^2 \theta \right) \quad (AN1)$$

$$F'(\theta) = R \cos \theta (mg + R(m\omega^2+k) \sin \theta) = 0 \quad \text{dunque}$$

$$F'(\theta) = \begin{cases} \cos \theta = 0 & \text{cioè } \theta = \pm \pi/2 \quad (N \text{ e } S) \\ \sin \theta = -\frac{mg}{R(m\omega^2+k)} & \text{cioè } \theta = \begin{cases} \theta_0 = -\arcsin\left(\frac{mg}{R(m\omega^2+k)}\right) \\ \pi - \theta_0 \end{cases} \quad (A_+ \text{ e } A_-) \end{cases}$$

$$F''(\theta) = -R(R(m\omega^2+k) \cos 2\theta - mg \sin \theta) \quad \text{facciamo}$$

$$F''(\pi/2) = -R(mg + R(m\omega^2+k)) < 0, \quad \text{max} \Rightarrow N \text{ è (forzatamente) instabile}$$

$$F''(-\pi/2) = R(mg - R(m\omega^2+k)) > 0 \Leftrightarrow m\omega^2+k < \frac{mg}{R} \quad \text{Se è stato più grande } A_{\pm} \text{ non esistono.}$$

$$F''(\theta_0) = F''(\pi - \theta_0) = \frac{R^2(m\omega^2+k)^2 - m^2g^2}{m\omega^2+k} > 0 \Leftrightarrow m\omega^2+k > \frac{mg}{R} \quad (\text{quando } A_{\pm} \text{ esistono}).$$

I due equilibri A_+ e A_- , quando esistono, sono stabili.

Altro esercizio su max-min vincolato nel caso cardociano:

Ex) Verificare che $\Gamma = \begin{cases} 2xy + z^2 = 3 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ è una curva regolare di $\mathbb{R}^3$,

e trovare le estremistiche locali in alto e in basso.

Verificare poi che Γ è compatta, capendo un'altra faccia,

e trovare i punti più in alto e più in basso.

$$G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad G(x, y, z) = (2xy + z^2 - 3, x - y + z + 1)$$

$$\Gamma = \{(x, y, z): G = (0, 0)\} \quad \text{E' curva regolare?}$$

$$J_G = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 2z \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rk } J_G < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x \end{cases} \quad \text{pti: } (2, -2, -2)$$

$$G(2, -2, -2) = (-2^2 - 3, 2 + 1) \neq (0, 0) \quad \forall 2 \in \mathbb{R}.$$

Ovvero nessun pts. del tipo $(2, -2, -2)$ sta in $\Gamma \Rightarrow \Gamma$ regolare!

"Trova le estremi: scali in alto e in basso" e poi tradurre in

"Determinare punti di max/min scali per $f(x, y, z) = z$ su Γ "

$$\text{Lagrange: } \begin{cases} \text{rk} \left(\begin{smallmatrix} \nabla f \\ \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{smallmatrix} \right) < 3 \\ G = (0, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2y & 2x & 2z \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ 2xy + z^2 = 3 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2xy + z^2 = 3 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ z = -2x - 1 \\ x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} A(\sqrt{2}-1, -\sqrt{2}+1, -2\sqrt{2}+1) \\ B(-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1, 2\sqrt{2}+1) \end{matrix}$$

Vediamo ad es. le nature di A. $\det = -2\sqrt{2} \neq 0$

$$J_G(A) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}+2 & 2\sqrt{2}-2 & -4\sqrt{2}+2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Dici: } \begin{cases} y(x) & z(x) \\ y(\sqrt{2}-1) = -\sqrt{2}-1 \\ z(\sqrt{2}-1) = -2\sqrt{2}+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy + z^2 = 3 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{d/dx} \begin{cases} 2y + 2xy' + 2zz' = 0 \\ 1 - y' + z' = 0 \end{cases} \xrightarrow{d/dx} \begin{cases} 2y' + 2y'' + 2xy'' + 2(z')^2 + 2zz'' = 0 \\ -y'' + z'' = 0 \end{cases}$$

Calcolo
per $x = \sqrt{2}-1$

$$\text{da (*)} \quad \text{ricavo } y'(\sqrt{2}-1) = 1, \quad z'(\sqrt{2}-1) = 0$$

$$\text{da (**)} \quad \text{ricavo } y''(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}, \quad z''(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}$$

$$\text{Pertanto } \begin{aligned} y(x) &= -\sqrt{2}+1 + 1(x - (\sqrt{2}-1)) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} (x - (\sqrt{2}-1))^2 + \dots \\ z(x) &= -2\sqrt{2}+1 + 0(x - (\sqrt{2}-1)) + \frac{1}{2} \sqrt{2} (x - (\sqrt{2}-1))^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Definiamo } F(x) := f(x, y(x), z(x)) = z(x) \quad \text{minimo}$$

$$F'(x) = z'(x) \quad (\text{quindi } F'(\sqrt{2}-1) = z'(\sqrt{2}-1) = 0 \text{ come previsto})$$

$$F''(x) = z''(x) \quad (\text{quindi } F''(\sqrt{2}-1) = z''(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2} > 0 \Rightarrow)$$

$x = \sqrt{2}-1$ e' pts di min sc. (auto) per $F \Leftrightarrow A$ e' pts di qnta scali minime
stretta per Γ

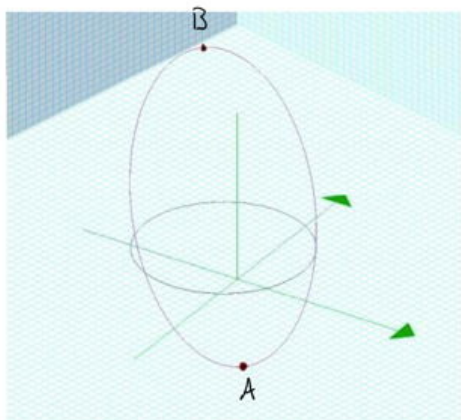
$$\text{Compattezza di } \Gamma = \begin{cases} 2xy + z^2 = 3 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = -x + y - 1 \quad \text{piu' (inchiostro)} \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 4 \end{cases}$$

Le proiezioni di Γ sul piano orizzontale
e' la circonferenza di centro $(-1, 1)$ e raggio 2

$$\Rightarrow -3 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 3 \Rightarrow -3 \leq z = -x + y - 1 \leq 5 \Rightarrow \Gamma \text{ e' limitata}$$

Inoltre Γ e' chiusa (definita da un sistema di equazioni continue)

$\Rightarrow \Gamma$ e' compatta (Γ e' un'ellisse...) $\Rightarrow$ Per Weierstrass fonda' assume



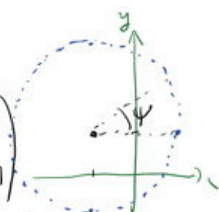
max/min assoluti su Γ , ovvero Γ avrà punti di quota max e punti di quota min.

L'errore è possibile svolgere anche parametrizzando Γ .

$$\Gamma = \begin{cases} z = -x + y - 1 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 4 \end{cases}$$

Dunque Γ è parametrizzata da

$$\gamma(\psi) = \begin{pmatrix} -1 + 2\cos\psi \\ 1 + 2\sin\psi \\ -(1 + 2\cos\psi) + (1 + 2\sin\psi) - 1 \end{pmatrix}$$



$$\gamma(\psi) = (-1 + 2\cos\psi, 1 + 2\sin\psi, -1 + 2\cos\psi + 2\sin\psi)$$

$$\text{Dunque } F(\psi) = f(\gamma(\psi)) = z(\gamma(\psi)) = -1 + 2\cos\psi + 2\sin\psi \dots$$

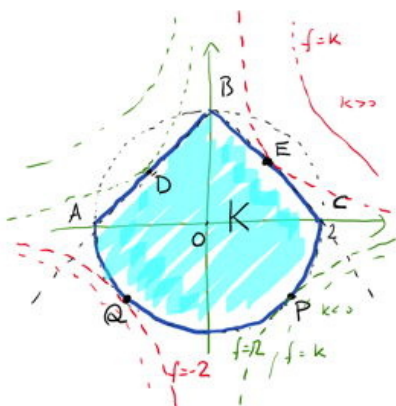
Un esempio importante è quello di

DETERMINARE GLI ESTREMI ASSOLUTI DI UNA FUNZIONE z SU UN SOTTOINSIEME COMPATTO DI $\mathbb{R}^n$. (gli estremi assoluti esistono per Weierstrass)

- La tattica è: detti $f(x_1, \dots, x_n)$ la funzione e $K \subseteq \mathbb{R}^n$ il compatto,
1. Esprimere K come unione disgiunta di una famiglia finita $K_1, \dots, K_r$ di sottoinsiemi ciascuno dei quali sia una varietà di $\mathbb{R}^n$;
 2. Determinare, su i metodi appropriati (parametrico o cartesiano) i punti stazionari di f su ciascun K_j ($j=1, \dots, r$);
 3. I punti di K in cui vengono trovati il max/min assoluto di f si trovano senz'altro tra i punti individuati nei passaggi precedenti; (ad esempio: se $x_0 \in K$ è punto di max assoluto per f su K , sia $x_0 \in K_{j_0}$ per un certo $j_0 \in \{1, \dots, r\}$. Allora di certo x_0 sarà di max assoluto per f anche su K_{j_0} , ma altre sarà anche stazionaria per f su K_{j_0}).
 4. Basta allora calcolare i valori di f in ciascuno di questi punti individuati, e vedere quale di questi valori è il max e il min. (sottolinea che, trovati i punti stazionari, su ciascuna componente-varietà di K , basta calcolare f in essi: il fatto che è superfluo determinare la natura di tali punti per f nelle componenti in cui stanno).

Ex

Dimostrare che $K = \{(x,y) : y \leq 2-|x|, x^2+y^2 \leq 4\}$ è un compatto del piano $\mathbb{R}^2$, e determinare gli estremi assoluti di $f(x,y) = xy$ su di esso.



L'insieme K è chiuso (definito da equazioni e disuguaglianze larghe continue) e limitato (contenuto nella palla di raggio 2), dunque compatto. Per il calcolo degli estremi su K di $f(x,y) = xy$ (che esistono per Weierstrass) decomponiamo K nelle seguenti unione disgiunta di varietà:

$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup \{A, B, C\}$$

K_1 aperto di $\mathbb{R}^2$ (var. dim. 2) K_2 curva (var. dim. 1) K_3 idem K_4 idem K_5 punti isolati (var. dim. 0)

- K_1 è un aperto di $\mathbb{R}^2$, dunque per trovare i pti staz. di $f(x,y) = xy$ basterà applicare i metodi di Analisi II.

$$\nabla f = (y, x) = (0,0) \Leftrightarrow O(0,0)$$

In realtà $H_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è indefinito (det < 0) $\Rightarrow O$ è una sella! Di cui dopo non si può dire né di minimo né di massimo assoluto...

- K_2 curva regolare (varietà dim. 1)

Param. $\gamma(x) = (x, 2+x)$ con $-2 < x < 0$.

$$F(x) := f(\gamma(x)) = x(2+x) \quad F'(x) = 2+2x = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Dunque troviamo il punto $D(-1, 1)$

- K_3 idem. $\gamma(x) = (x, 2-x)$ con $0 < x < 2$.

$$F(x) := f(\gamma(x)) = x(2-x) \quad F'(x) = 2-2x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \leadsto \text{punto } E(1, 1)$$

- K_4 idem (arco di circonferenza).

Per cambiare variabile usiamo la legge: $K_4 = \{(x,y) : x^2+y^2=4, y \leq 0\}$

Legge: $\begin{cases} \text{rk} \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix} < 2 \text{ (det=0)} \\ x^2+y^2=4, y \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2-x^2=0 \\ x^2+y^2=4 \\ y \leq 0 \end{cases} \quad y = \pm x \quad \begin{matrix} P(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \\ Q(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \end{matrix}$

Insomma, parametrizzando: $\gamma(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta)$ con $-\pi < \theta < 0$

$$F(\theta) := f(\gamma(\theta)) = 4\sin\theta\cos\theta = 2\sin 2\theta \quad F'(\theta) = 4\cos 2\theta = 0 \quad \text{per } 2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

cioè $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ con $k = -2, 0$ oppure $\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leadsto P = \gamma(\frac{\pi}{4}) \\ -\frac{\pi}{4} \leadsto Q = \gamma(-\frac{\pi}{4}) \end{cases}$

- $K_5 = \{A, B, C\}$: varietà dim. 0 (punti isolati); sono sufficienti a diffinire

Però gli estremi assoluti di $f(x,y) = xy$ in K saranno assunti per forza tra i punti A, B, C, O, D, E, P, Q .

vale $f(A) = f(B) = f(C) = f(O) = 0$, $f(D) = -1$, $f(E) = 1$, $f(P) = -2$, $f(Q) = 2$:
 dunque il max. abs. è 2 (al punto Q), e il min. abs. è -2 (al punto P),
 coerentemente con quanto prevedibile dall'esame grafico.

I seguenti due esercizi verranno svolti in aula nelle prossime lezioni.

Ex.

Calcolare gli estremi assoluti di $f(x, y, z) = x\sqrt{3} - y + 2z$
 sul settore M di superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$,
 raggio R e con $y \leq 0$ e $z \geq 0$.

(Si tratta del quarto di superficie sferica dell'esercizio già visto,
 con l'aggiunta dei punti di bordo: oltre che limitato, ora M
 è anche chiuso (definito dall'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con le
 disuguaglianze $y \leq 0$ e $z \geq 0$), dunque compatta.)

Ex.

Dimostrare che $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x\}$ è un
 compatto di $\mathbb{R}^3$, e calcolare gli estremi assoluti di $f(x, y, z) =$
 $= x^2 + 2y^2 + z^2 - z$ su K .