

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

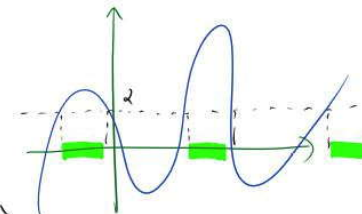
Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 17/10/2025

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ è detta **misurabile** se tutti gli insiemi "di tipo livello" $f^{-1}([a, +\infty]) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq a\}$ sono misurabili $\forall a$.

Che si può sorprendere, la classe delle funzioni misurabili è vastissima: praticamente ogni funzione con cui si ha normale a che fare lo è.

E somme, prodotti, ... di funzioni misurabili sono misurabili (vedi note).



Anche la definizione potrebbe essere tranquillamente modificata con $\geq$, $\leq$, ... al posto del $>$.

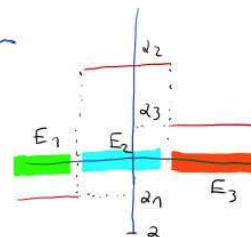
A questo punto possiamo iniziare a definire l'integrale di Lebesgue.

Una funzione $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ è detta **semplice** se assume solo un numero finito di valori. Ad esempio: se $E \subseteq \mathbb{R}^n$, χ_E è semplice.

Più in generale, una funzione semplice si scrive con $S = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{E_j}$.

Def. (a) Una funzione semplice $S = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{E_j}$ in cui gli α_j sono

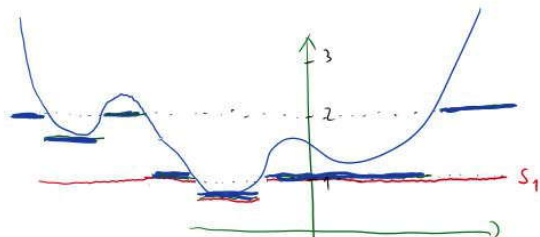
a due a due distinti e gli E_j a due a due disgiunti è misurabile $\Leftrightarrow$ tutti gli E_j sono misurabili.



(b) Per ogni funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ esiste una successione di funzioni semplici $S_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ che converge puntualmente a f .

Se f è misurabile, si possono scegliere le S_n misurabili;

se $f \geq 0$ la successione S_n si può scegliere monotona crescente.



Ecco l'idea per il caso $f \geq 0$
(vedi le defin. sulle disposte)

Dato una funzione misurabile $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$, l'INTEGRALE DI LEBESGUE di f su un insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è definito come segue:

- Se $f = s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{E_j}$ semplice in cui tutti gli E_j sono misurabili e che sia positive (ovvero tutti gli $\alpha_j \geq 0$), si pone

$$\int_E s(x) d\lambda_n := \sum_{j=1}^k \alpha_j \lambda_n(E_j \cap E)$$

(nelle somme si intende che $0 \cdot (+\infty) = 0$, e il risultato può essere $+\infty$).

- Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ misurabile e positive:

$$\int_E f(x) d\lambda_n := \sup \left\{ \int_E s(x) d\lambda_n : s \text{ semplice misurabile}; 0 \leq s \leq f \right\}.$$

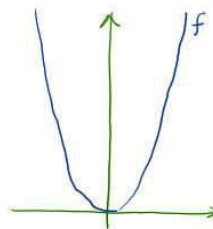
- In generale, se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ è una qualunque funzione misurabile, e almeno uno dei due integrali $\int_E f^+(x) d\lambda_n$ e $\int_E f^-(x) d\lambda_n$ è finito:

$$\int_E f(x) d\lambda_n := \int_E f^+(x) d\lambda_n - \int_E f^-(x) d\lambda_n \quad (\text{può essere } +\infty \text{ o } -\infty)$$

In particolare, l'integrale di f è INTEGRABILE (alla Lebesgue) su E

se e soltanto se $\int_E f^+(x) d\lambda_n$ e $\int_E f^-(x) d\lambda_n$ sono finiti (e scriviamo $f \in L^1(E)$)

Ex. • $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
 $f^+ = f$, $\int_{\mathbb{R}} f^+ = +\infty$; $f^- = 0$, $\int_{\mathbb{R}} f^- = 0$
 $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f^+ - \int_{\mathbb{R}} f^- = +\infty - 0 = +\infty$ ha senso,
 ma comunque $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

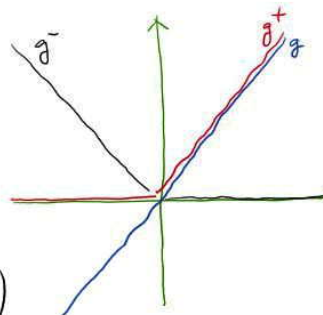


• $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$

$\int_{\mathbb{R}} g^+ = \int_{\mathbb{R}} g^- = +\infty \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} g$ non ha senso.

$\int_{[-\infty, 2]} g^+ = 2$, $\int_{[-\infty, 2]} g^- = +\infty \Rightarrow \int_{[-\infty, 2]} g = 2 - (+\infty) = -\infty$

$\int_{[1, 2]} g^+ = 2$, $\int_{[1, 2]} g^- = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{[1, 2]} g = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ($g \in L^1([1, 2])$)



L'integrale di Lebesgue gode di tutte le proprietà che un si aspetta (numerelle addittive sul dominio, linearità, ...).

In particolare evidenziamo le seguenti utili e importanti proprietà:

- f può essere modificata su un insieme trascurabile del dominio senza che l'integrabilità (e il valore dell'integrale) vengano toccati.
- $f \in L^1(E) \Leftrightarrow |f| \in L^1(E)$, e vale $|\int_E f(x) d\mu| \leq \int_E |f(x)| d\mu$
- Una funzione misurabile e limitata q.o. (es.: continua su compatto) è integrabile su ogni insieme E di misura finita.
- Vale $\int_E |f(x)| d\mu = 0 \Leftrightarrow f$ è nulla q.o. su E

Infine segnaliamo i rapporti con l'integrale di Riemann (che in generale soddisfa a teoremi simili a quelli di Lebesgue ma con ipotesi ben più onerose):

Propr

(a) (Integrale su insiemi compatti)

Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto elementare misurabile (es.: pluriintervalli compatti), e sia $f: K \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è Riemann-integrabile allora è anche Lebesgue-integrabile (cioè $f \in L^1(K)$), e i valori coincidono.

Viceversa:

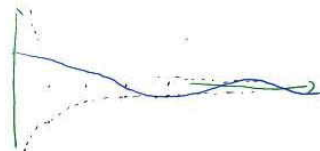
Se f è misurabile e limitata (dunque in part. Lebesgue-integrabile) allora f è Riemann-integrabile $\Leftrightarrow$ è continua q.o. in K .

(b) (Integrale di Riemann generalizzato e integrale di Lebesgue).

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ scalare Riemann-integrabile.

Allora f è L-int. su $I \Leftrightarrow f$ è assolutamente R-int. a s.g. su I (e i due concetti integrali coincidono)

(dunque in particolare $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è Riemann-integrabile a senso generalizzato su $\mathbb{R}$ ma non Lebesgue-integrabile)



(c) (Teorema Fond. del Calcol)

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è L-int., poni $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

vale $F' = f$ q.o.

Viceversa, se $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto di $[a, b]$,

e si pone $f := F'$. Se f è L-int. su $[a, b]$, allora

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Il prossimo passo sarà di presentare i risultati più utili per il calcolo degli integrali multipli (Fubini, Tonelli, cambio di variabili, ...), per poter iniziare a calcolare vari integrali.

Elenchiamo ora i risultati più importanti per il calcolo affettivo degli integrali multipli, dopo di che potremo iniziare a fare i conti.

In $\mathbb{R}^n$ consideriamo $x = (x_1, \dots, x_n) = (\underbrace{x_1, \dots, x_{n'}}_{x' \in \mathbb{R}^{n'}}, \underbrace{x_{n'+1}, \dots, x_n}_{x'' \in \mathbb{R}^{n''}})$
ove ovviamente $n = n' + n''$.

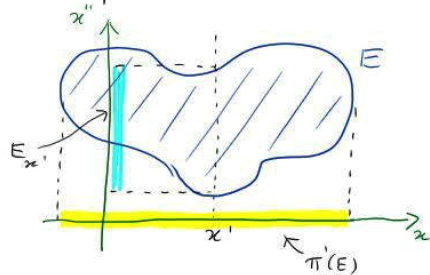
Proiezioni $\pi': \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$, $\pi'(x) = x'$; $\pi'': \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n''}$, $\pi''(x) = x''$

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$, e dato $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, per un dato $x' \in \mathbb{R}^{n'}$ poniamo

$$E_{x'} = \{x'' \in \mathbb{R}^{n''} : (x', x'') \in E\} \subseteq \mathbb{R}^{n''} \quad x' \text{ sezione di } E$$

$$f_{x'}: E_{x'} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{x'}(x'') = f(x', x'') \quad x' \text{ sezione di } f$$

(Definizione analoghe valgono a ruoli invertiti)



Teorema (Fubini). Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, e sia f integrabile su E ($f \in L^1(E)$)

Altre: $f_{x'}$ è integrabile su $E_{x'}$ per quasi ogni $x' \in \pi'(E)$;
 (definito p.p. $x' \in \pi'(E)$)
 inoltre, la funzione $x' \mapsto \int_{E_{x'}} f(x', x'') d\lambda_{n-1}(x'')$ è integrabile su $\pi'(E)$.

e vale

$$\int_E f d\lambda_n = \int_{\pi'(E)} \left(\int_{E_{x'}} f(x', x'') d\lambda_{n-1}(x'') \right) d\lambda_{n-1}(x')$$

Il Teorema di Fubini dice che, in ipotesi di integrabilità, l'integrale in $\mathbb{R}^n$ si può decomporre e piacere come "integrale iterato" (II° membro).

NOTAZIONE: $d\lambda_n = dx = dx_1 \dots dx_n =: dx' dx''$ IDEA: la misura in $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''}$ è il prodotto delle misure in $\mathbb{R}^{n'}$ e $\mathbb{R}^{n''}$

$$\int_{\pi'(E)} \left(\int_{E_{x'}} f(x', x'') dx'' \right) dx' =: \int_{\pi'(E)} dx' \int_{E_{x'}} f(x', x'') dx''$$

← si integra a partire da DESTRA: prima rispetto x'' , poi x' .

Si noti che nell'ipotesi di Fubini è richiesto già che f sia integrabile su E :
 ad esempio, si è visto che ciò accade se E ha misura finita e f è misurabile e limitata q.o. (es.: se E è misurabile e limitato, allora χ_E è integrabile, e se f è continua su E), il che spesso si verifica nelle applicazioni (tipo: calcoli di volumi, baricentri...)

Tuttavia ci sono casi di rilievo in cui ad esempio f è illimitata su E oppure E non è limitato, e sarebbe un criterio che ci dia una condizione sufficiente affinché f sia integrabile su E :

Teorema (TONELLI) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile.

Se un qualsiasi integrale iterato del modulo di f :

$$\int_{\pi'(E)} \left(\int_{E_{x'}} |f(x', x'')| d\lambda_{n-1}(x'') \right) d\lambda_{n-1}(x') \text{ esiste finito,}$$

allora f è integrabile su E

(e per il conto di $\int_E f d\lambda_n$ si può applicare Fubini)