

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di martedì 21/10/2025

Prima di subito al Terzo risultato utile, quello del **CHANGE OF VARIABLE**:
 se al Terzo E con un diffeomorfismo, come viene alterato l'integrale?

Ter. (CHANGE OF VARIABLE) Sia $\phi: B \rightarrow A$ un diffeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^n$
 e sia $E \subseteq A$ misurabile. Data $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, si ha che
 $f \in L^1(E) \iff (f \circ \phi) |\det J_\phi| \in L^1(\phi^{-1}(E))$

e vale

$$\int_E f(x) d\lambda_n(x) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\phi(t)) |\det J_\phi(t)| d\lambda_n(t)$$

Notiamo che in una variabile la formula funziona.

Sia $\phi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ diffeomorfismo. $\rightarrow$ ① $\phi' > 0$, $\phi(a) = c$, $\phi(b) = d$
 $\rightarrow$ ② $\phi' < 0$, $\phi(a) = d$, $\phi(b) = c$

Allora

$$\int_c^d f(x) dx = \int_{[a,b]} f(\phi(t)) \cdot (+\phi'(t)) dt = \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{\phi'(c)}^{\phi'(d)} f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

$$\int_c^d f(x) dx = \int_{[c,d]} f(\phi(t)) \cdot (-\phi'(t)) dt = - \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_b^a f(\phi(t)) \phi'(t) dt \quad \text{OK!}$$

a Vediamo ora i cambi di variabile più frequenti negli esercizi.

- **COORDINATE POLARI IN $\mathbb{R}^2$** : Sia $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$,

$B =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ (in cond. (ρ, θ)), e si pone

$(x, y) = \phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Vale $J_\phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$

da cui $|\det J_\phi| = \rho$: dunque se $E \subseteq A$ e $f(x, y) \in L^1(E)$,

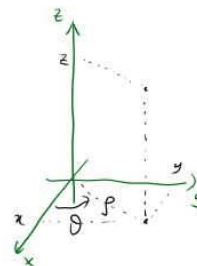
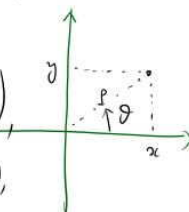
$$\text{vale } \int_E f(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\lambda_2(\rho, \theta)$$

- **COORDINATE CILINDRICHE IN $\mathbb{R}^3$** .

$A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \leq 0\}$, $B =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}$

in cond. (ρ, θ, z) ; $\phi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$.

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{da cui } |\det J_\phi| = \rho.$$

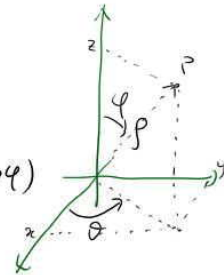


- GOMME SFERICHE IN $\mathbb{R}^3$

$$A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \leq 0\}, \quad B =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[$$

$$\text{in coord. } (\rho, \theta, \varphi); \quad \phi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi)$$

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{pmatrix} \quad |\det J_\phi| = \rho^2 \sin \varphi$$



- TRASFORMAZIONI AFFINI IN $\mathbb{R}^n$: in coordinate, ho $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\text{del tipo } \phi(\underline{t}) = A\underline{t} + \underline{b} \quad \text{ove } A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), \quad \underline{b} \in \mathbb{R}^n.$$

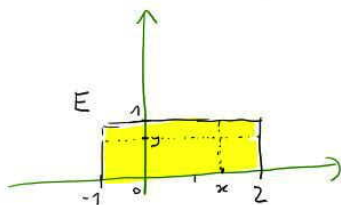
$$\text{In questo caso vale } J_\phi = A, \quad \text{perciò } |\det J_\phi| = |\det A|.$$

Ad esempio:

- **ISOMETRIE**: quelle con A ortogonale, ovvero $A^t = A^{-1}$, per cui $\det A = \pm 1$: ne segue $|\det J_\phi| = 1$ (volumi preservati!)
- **OMOTETIE**: quella di rapporto $\mu > 0$ dilata le lunghezze di un fattore μ , pertanto $A = \mu \cdot \mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu \end{pmatrix}$ e $\underline{b} = \underline{0}$ dunque $|\det J_\phi| = \mu^n$ (se le distanze vengono dilatate di un fattore μ , i volumi n -dim. sono dilatati di μ^n).

Passiamo ora ad alcuni esercizi

Ex. Dato poiché $f(x, y) = 3x^2y - 1$ è integrabile su $E = [-1, 2] \times [0, 1]$, e calcola $\int_E f(x, y) dx dy$.



$f \in L^1(E)$ poiché E compatto (misura finita) e f continua (misurabile e limitata).

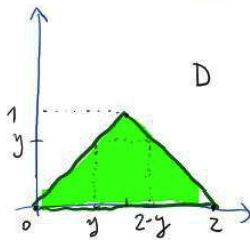
(1) Per x-primi: $\int_E (3x^2y - 1) dx dy = \int_{-1}^2 dx \int_0^1 (3x^2y - 1) dy$

$$= \int_{-1}^2 dx \left[\frac{3x^2y^2}{2} - y \right]_{y=0}^{y=1} = \int_{-1}^2 \left(\frac{3x^2}{2} - 1 \right) dx = \int_{-1}^2 \left(\frac{3x^2}{2} - 1 \right) dx$$

(2) Per y-primi: $\int_E (3x^2y - 1) dx dy = \int_0^1 dy \int_{-1}^2 (3x^2y - 1) dx = \int_0^1 dy \left[x^3y - x \right]_{x=-1}^{x=2}$

$$= \int_0^1 ((8y - 2) - (-1 - y)) dy = \int_0^1 (9y - 3) dy = 3 \left(\frac{3y^2}{2} - y \right) \Big|_{y=0}^{y=1} = 3 \left(\frac{3}{2} - 1 \right) = \frac{3}{2}$$

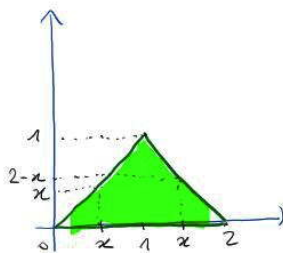
Ex. Calcolare $\int_D f(x,y) dx dy$, ove D è il triangolo di vertice $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$



Il metodo più semplice risulta per y -selezioni:

$$\begin{aligned} \int_D (3x^2y-1) dx dy &= \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (3x^2y-1) dx = \int_0^1 dy \left[x^3y - x \right]_{x=y}^{x=2-y} \\ &= \int_0^1 ((y(2-y)^3 - (2-y)) - (y^4 - y)) dy = \dots = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Con x -selezioni:



$$\begin{aligned} \int_D (3x^2y-1) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^x (3x^2y-1) dy + \int_1^2 dx \int_{2-x}^{2-x} (3x^2y-1) dy \\ &= \int_0^1 dx \left[\frac{3x^2y^2}{2} - y \right]_{y=0}^{y=x} + \int_1^2 dx \left[\frac{3x^2y^2}{2} - y \right]_{y=2-x}^{y=2-x} \\ &= \int_0^1 \left(\frac{3x^4}{2} - x \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{3x^2(2-x)^2}{2} - (2-x) \right) dx = \dots = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

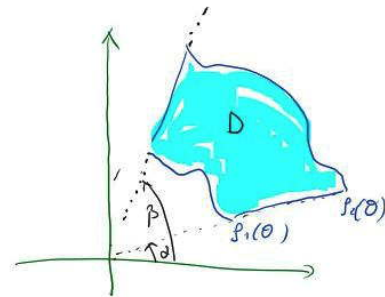
In generale, possiamo ora di voler calcolare
l'AREA di un SETTORE di PIANO D
DELIMITATO DA DUE CURVE POLARI

$$f_1(\theta) \leq f_2(\theta) \quad \text{on} \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

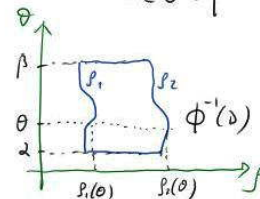
$$\text{Area}(D) = \int_D 1 dx dy = \int_{\phi^{-1}(D)} r dr d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} r dr = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{r^2}{2} \right)_{r=f_1(\theta)}^{r=f_2(\theta)} d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f_2^2 - f_1^2) d\theta$$

dunque $\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f_2(\theta)^2 - f_1(\theta)^2) d\theta$



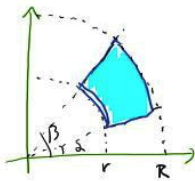
$$\phi^{-1}(D) = \{ (r, \theta) : f_1(\theta) \leq r \leq f_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta \}$$



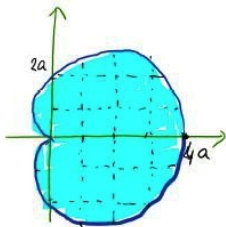
Ex. Area di un settore circolare.

$$p_1(\theta) \equiv r, \quad p_2(\theta) \equiv R \quad Area = \frac{1}{2} \int_a^b (R^2 - r^2) d\theta = \frac{R^2 - r^2}{2} (\beta - \alpha)$$

Ex. $\alpha=0, \beta=2\pi, r=0 \Rightarrow Area = \frac{R^2 - 0^2}{2} (2\pi - 0) = R^2 \pi$



Ex. Area della cardioida $\rho(\theta) = 2a(1 + \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a > 0$.

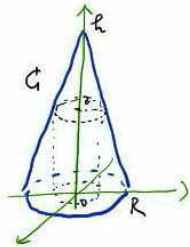


$$\alpha=0, \beta=2\pi, p_1 \equiv 0, p_2(\theta) = 2a(1 + \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} Area &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 4a^2(1 + \cos \theta)^2 d\theta = 2a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta \\ &= 2a^2 \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = 2a^2 \left(\theta + \frac{2\sin \theta}{2} + \frac{\theta + \sin \theta \cos \theta}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 2a^2 \left((2\pi + \frac{2\sin 2\pi}{2}) - (0) \right) = 6\pi a^2 \end{aligned}$$

Ex.

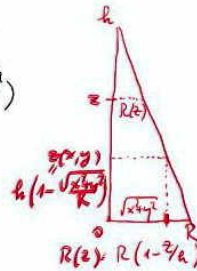
Volume del cono.



$$\text{Volume} = \int_C 1 \, dx \, dy \, dz$$

① $\int_0^h dz \int_{\text{area}} 1 \, dx \, dy$

② $\int_{\text{area}} dx \, dy \int_0^h 1 \, dz$

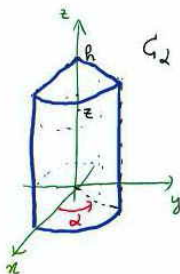


$$\begin{aligned} \text{①} \quad \int_0^h dz \int_{\text{area}} 1 \, dx \, dy &= \int_0^h R^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \pi \, dz \\ &= R^2 \pi \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz = R^2 \pi \left[\frac{1 - \frac{z}{h}}{3} \right]_{z=0}^{z=h} = -\frac{R^2 \pi}{3} \left((0) - (1) \right) = \frac{R^2 \pi h}{3} \end{aligned}$$

$$\text{②} \quad \int_{\text{area}} dx \, dy \int_0^h 1 \, dz = \int_{\text{area}} dx \, dy \left[z \right]_0^h = \int_{\text{area}} h \, dx \, dy$$

$$\begin{aligned} &= h \int_{[0,R] \times [-\pi,\pi]} \left(1 - \frac{p}{R}\right) p \, dp \, d\theta = h \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^R \left(1 - \frac{p}{R}\right) p \, dp \\ &= h \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left[\frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{3R} \right]_0^R = h \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{3} \right) d\theta = h \cdot \frac{R^2}{6} \cdot (\pi - (-\pi)) = \frac{R^2 \pi h}{3} \end{aligned}$$

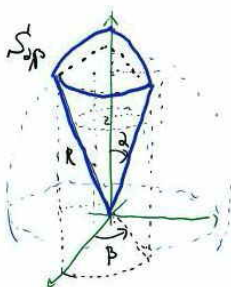
(21) Calcolare in più modi i volumi di sfera e cilindro.



$$\begin{aligned} \text{Vol}(C_1) &= \int_{C_1} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{[0,R] \times [0,2\pi] \times [0,h]} p \, dp \, d\theta \, dz = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R p \, dp \\ &= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{p^2}{2} \right]_0^R = \frac{R^2}{2} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{R^2}{2} \int_0^h 2\pi \, dz = \pi R^2 h \end{aligned}$$

cilindro (2=2\pi) o. R^2 \pi h

$$\text{Vol}(C_2) = \int_0^h dz \int_{\text{area}} 1 \, dx \, dy = \int_0^h \frac{R^2}{2} dz = \frac{R^2}{2} \int_0^h dz = \frac{R^2 h}{2}$$

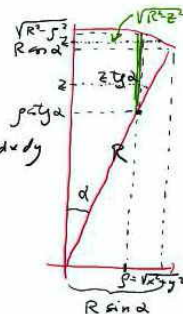


$$\text{Vol}(S_1) = \int_{S_1} 1 \, dx \, dy \, dz$$

$$\text{①} \quad \int_{\text{area}} dx \, dy \int_{\text{height}} 1 \, dz = \int_{\text{area}} \left(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - (-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \right) dx \, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left(\sqrt{R^2 - p^2} - p \cot \alpha \right) p \, dp$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left(p(R^2 - p^2)^{1/2} - p^2 \cot \alpha \right) dp$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\beta d\theta \left(-\frac{1}{3} (R^2 - r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{3} \sin \theta \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{3} \int_0^\beta d\theta \left((R^3 \cos^3 \theta + R^3 \sin^3 \theta \sin \theta) - (R^3) \right) \\
 &= \frac{R^3}{3} (1 - \cos^3 \theta - \sin^3 \theta \sin \theta) \Big|_0^\beta = \frac{R^3}{3} (1 - \cos \theta) \int_0^\beta d\theta = \frac{(1 - \cos \theta) \beta}{3} R^3 \\
 &\quad \left(\text{per } \alpha = \pi, \beta = 2\pi: \text{ SFERA } \frac{4\pi R^3}{3} \right)
 \end{aligned}$$

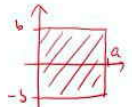
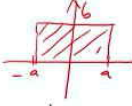
② z-FETTE $\text{Vol}(S_{\text{ap}}) = \int_{R \cos \alpha}^R \text{Area}(S_{\text{ap}}|_z) dz = \int_{R \cos \alpha}^R (z^2) dz + \int_{R \cos \alpha}^R (R^2 - z^2) dz$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\beta}{2} \int_{R \cos \alpha}^R z^2 dz + \frac{\beta}{2} \int_{R \cos \alpha}^R (R^2 - z^2) dz = \frac{\beta}{2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{R \cos \alpha}^R + \frac{\beta}{2} \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{R \cos \alpha}^R \\
 &= \frac{(1 - \cos \alpha) \beta}{3} R^3
 \end{aligned}$$

③ COND. SFERICHE (ρ, θ, φ) . In queste coordinate S_{ap} desc. un parallelepipedo $[0, R] \times [0, \beta] \times [0, \alpha]$.

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(S_{\text{ap}}) &= \int_{S_{\text{ap}}} 1 dx dy dz = \int_0^\beta d\theta \int_0^\alpha d\varphi \int_0^R \rho^2 \sin \varphi d\rho = \\
 &= \int_0^\beta d\theta \int_0^\alpha \sin \varphi d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = \int_0^\beta d\theta \int_0^\alpha \sin \varphi d\varphi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^R \\
 &= R^3 \int_0^\beta d\theta (-\cos \varphi) \Big|_0^\alpha = \frac{R^3}{3} (1 - \cos \alpha) (\theta) \Big|_0^\beta = \frac{(1 - \cos \alpha) \beta}{3} R^3.
 \end{aligned}$$

Mettiamo a posto due relazioni standard. Sia $f(x, y) = x^2 y$.

- Calcoliamo $\int_{[0, a] \times [-b, b]} x^2 y dx dy = 0$ 
 VALORE $f(x, -y) = -f(x, y)$
 DUNQUE GLI INTEGRALI SUPRA E SOTTO
 SI ELIDONO A VICENDA!
- Calcoliamo $\int_{[-a, a] \times [0, b]} x^2 y dx dy = 2 \int_{[0, a] \times [0, b]} x^2 y dx dy$ 
 VALORE $f(-x, y) = f(x, y)$
 DUNQUE L'INTEGRALE A SX
 E' UGUALE A QUELLO DI DX!
- Calcoliamo $\int_{[0, a] \times [0, b]} x^2 y dx dy = \int_0^b dy \int_0^a x^2 y dx = \int_0^b y dy \cdot \int_0^a x^2 dx = \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^b \cdot \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a$
 $= \frac{a^3 b}{6}$
 INTEGRAZIONE A VARIABILI SEPARATE, QUANDO
 $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ E IL DOMINIO E' DI TIPO RETTANGOLARE

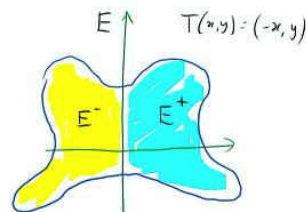
Ecco gli enunciati generali.

SIMMETRIE

Sia T un'isometria di $\mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ delle forme
(a meno di insiemi trascurabili) $E = E^+ \cup E^-$ ove
 E^+ e E^- son misurabili tali che $T(E^\pm) = E^\mp$

Data $f \in L^1(E)$, se $f \circ T = f \Rightarrow \int_E f d\lambda_n = 2 \int_{E^+} f d\lambda_n$

e invece $f \circ T = -f \Rightarrow \int_E f d\lambda_n = 0$.



Dim. Usando il cambio di variabile dato da T si ha che $\int_{E^-} f d\lambda_n = \pm \int_{E^+} f d\lambda_n$
 e usando dei casi: riordinando $\int_E f d\lambda_n = \int_{E^+} f d\lambda_n + \int_{E^-} f d\lambda_n$ si conclude. //

INTEGRAZIONE DI PRODOTTI A VARIABILI SEPARATE

Siano $E' \subseteq \mathbb{R}^{n'}$ e $E'' \subseteq \mathbb{R}^{n''}$ misurabili, e si abbiano funzioni misurabili

$g: E' \rightarrow \mathbb{R}$, $h: E'' \rightarrow \mathbb{R}$. Allora la funzione $f: E' \times E'' \rightarrow \mathbb{R}$

data da $f(x', x'') = g(x') h(x'')$ è integrabile su $E' \times E'' \iff$

$$g \text{ è i.s. su } E' \text{ e } h \text{ su } E'', \text{ e vale } \int_{E' \times E''} g(x') h(x'') d\lambda_n = \int_{E'} g(x') d\lambda_{n'} \cdot \int_{E''} h(x'') d\lambda_{n''}$$

Dim. Vediamo la sufficienza (che è interessante di più).

f è misurabile prod. prod. di misurabili, idem per $E' \times E''$ in $\mathbb{R}^n$.

Ora, poiché g e h sono integrabili su E' e E'' , lo sono anche $|g|$ e $|h|$.

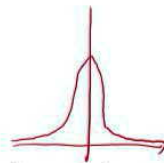
Vediamo allora Tonelli per f :

$$\int_{E''} d\lambda_{n''} \int_{E'} |f(x', x'')| d\lambda_{n'} = \int_{E''} d\lambda_{n''} \int_{E'} |g(x')| \cdot |h(x'')| d\lambda_{n'} =$$

$$\int_{E''} |h(x'')| d\lambda_{n''} \cdot \int_{E'} |g(x')| d\lambda_{n'}, \text{ che dà risultato finito.}$$

Allora f è integrabile (grazie a Tonelli), e si può dopo applicare Fubini:
 che ci dice questo afferma il Teorema. //

Ex. Calcolare l'integrale gaussiano $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$



$f(x) = e^{-x^2}$ è integrabile su $\mathbb{R}$ (alla Lebesgue) poiché (assolutamente) $\mathbb{R}$ -integrabile.
 Partiamo dal calcolo di $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$.

Per Tonelli + Fubini, essendo $e^{-x^2-y^2}$ positiva sul dominio d'integrazione $\mathbb{R}^2$, possiamo provare a calcolare un integrale iterato e vedere cosa succede:
 se risulta finito esso sarà anche il valore dell'integrale cercato;
 se invece risulta $+\infty$ allora vorrà dire che $e^{-x^2-y^2}$ non è integrabile su $\mathbb{R}^2$.

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy \stackrel{\text{polare}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right)_0^{+\infty} = 2\pi \left(1 - 0 \right) = 2\pi$$

D'altra parte $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2$

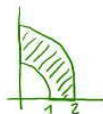
$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Ex Darsi le seguenti funzioni ben integrabili sul dominio specificato, e se si calcola l'integrale.

(a) e^{-xy^2} su $[0, 2] \times [0, +\infty[$. ($2 > 0$)

(b) $\frac{xy}{x^2+y^2}$ su $[-1, 1]^2$

(c) $\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ su $[-1, 1]^2$ oppure su



(a) $f(x, y) = e^{-xy^2}$, $E = [0, 2] \times [0, +\infty[$.

Procediamo ancora con Tonelli + Fubini ($f > 0$ su E).

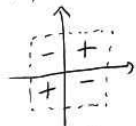
Proviamo per prima cosa integrando per x - sezioni (perché è più facile integrare gaussiane in y con parentesi ...)

$$\int_0^2 dx \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy \stackrel{\substack{v = y\sqrt{x} \\ y = \frac{1}{\sqrt{x}}v}}{=} \int_0^2 dx \int_0^{+\infty} e^{-v^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dv = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv = (2\sqrt{x})_0^2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \cdot 2 = 2\sqrt{\pi}$$

(b) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $E = [-1, 1] \times [-1, 1]$

$|f(x, y)| = \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$ dove f è limitata su E (anzi: interesse in $(0, 0)$)

Dunque, essendo E misurabile di misura finita μ , f è integrabile su E .



$f(-x, y) = -f(x, y)$, $f(x, -y) = -f(x, y)$

$\Rightarrow \int_E f(x, y) dx dy = 0$

Per conferma: calcoliamo $\int_{[0, 1]^2} f(x, y) dx dy$ (vieni > 0).

Fubini: $\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{xy}{x^2+y^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{y}{2} \ln(x^2+y^2) \right)_0^1 dy$

$= \int_0^1 \frac{y}{2} (\ln(1+y^2) - \ln(y^2)) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y \ln(1+\frac{1}{y^2}) dy$

$= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{y^2}{2} \ln(1+\frac{1}{y^2}) \right)_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} \cdot \frac{-2y^{-3}}{1+y^2} \right) dy \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \ln 2 - 0 \right) + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y}{y^2+1} dy \right)$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln 2 + \left(\frac{1}{2} \ln(y^2+1) \right)_0^1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 - 0 \right) = \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,34$

(c) $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ma diverge a $\pm\infty$ all'intorno di $(0,0)$ (infatti $f(x,x) = \frac{1}{4x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$).
 Dunque non è limitata. D'altra parte, per simmetria, se l'integrale converge esso dovrebbe essere 0 come prima.
 Nota inoltre che $f > 0$ nel 1° quadrante.
 Mi conviene dunque esaminare un integrale iterato di $|f|$ in $[0,1]^2$:
 se esso viene finito, per T+F saremo anche il valore dell'integrale di f (e l'integrale sarà nullo); se invece viene $+\infty$ vorrà dire che f non è integrabile su E .

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dx = \int_0^1 y \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \right)_0^1 dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 y \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{y^2} \right) dy$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{y(y^2+1)} dy \sim +\infty. \text{ Dunque } f \text{ non è integrabile.}$$

Invece sulle curve  C compatto ($\Rightarrow$ limitata)

f è continua, dunque integrabile.

$$\int_C \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 \frac{\rho \cos \theta \rho \sin \theta}{\rho^4} \cdot \rho d\rho = \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_1^2 \frac{1}{\rho} d\rho$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \sin 2\theta \right)_0^{\pi/2} \cdot (\ln \rho)_1^2 = \frac{1}{4} \ln 2 \sim 0,17$$

P.S. Prima si è visto che $\int_{[0,2] \times [0,+\infty[} e^{-xy^2} dx dy = \sqrt{\pi/2}$ (finito $\forall d$).

Per il calcolo, allora noto che la funzione integranda è positiva sul dominio, dunque possiamo calcolare un integrale iterato, se questo ci viene finito, allora lei è integrabile su quel valore (Tonelli + Fubini); se invece viene $+\infty$, allora no. Si era fatto il caso con: $\int_0^d dx \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy$, sfruttando le conoscenze delle integrali gaussiane.

Possiamo ora a invertire l'ordine di integrazione: il risultato deve essere lo stesso, ma non ci detto che stavolta si riesce ad arrivare.

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^d e^{-xy^2} dx = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{y^2} e^{-xy^2} \right)_0^d dy = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-dy^2}}{y^2} dy$$

$\sim \frac{dy^2}{y^2} = d$
 $\sim \frac{1}{y} \sim \frac{1}{y^2}$

Ciò che vorrà $\sqrt{\pi/2}$, ma con il caso mi devo fermare qui (primitiva non elementare).