

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

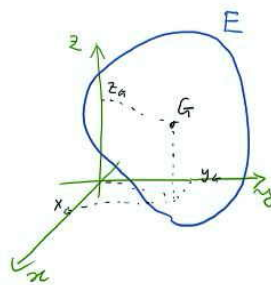
Lezione di giovedì 23/10/2025

BARICENTRO

$E \subseteq \mathbb{R}^3$ misurabile e limitato, rappresenta un corpo.

$\mu: E \rightarrow [0, +\infty[$ densità di massa (kg/m^3)

massa totale di E : $m = \int_E \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ (kg)



Baricentro di E : $(x_G, y_G, z_G) = \left(\frac{1}{m} \int_E \mu x \, dx \, dy \, dz, \frac{1}{m} \int_E \mu y \, dx \, dy \, dz, \frac{1}{m} \int_E \mu z \, dx \, dy \, dz \right)$

Caso omogeneo ($\mu = \text{cost.}$): $m = \mu \cdot \text{Vol}(E)$, per cui (dens. forza: m)

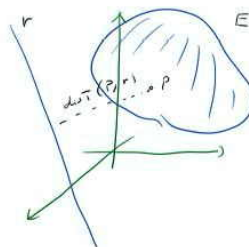
Baricentro geometrico di E : $(x_G, y_G, z_G) = \left(\frac{1}{\text{Vol}(E)} \int_E x \, dx \, dy \, dz, \frac{1}{\text{Vol}(E)} \int_E y \, dx \, dy \, dz, \frac{1}{\text{Vol}(E)} \int_E z \, dx \, dy \, dz \right)$

MOMENTO D'INERZIA

Sia r retta aff. di $\mathbb{R}^n$.

$I_r = \int_E \mu \cdot \text{dist}^2(x, y, z; r) \, dx \, dy \, dz$ ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)

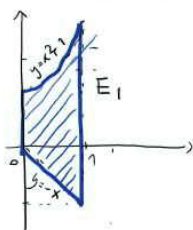
Caso omogeneo: $\frac{m}{\text{Vol}(E)} \int_E \text{dist}^2(x, y, z; r) \, dx \, dy \, dz$.



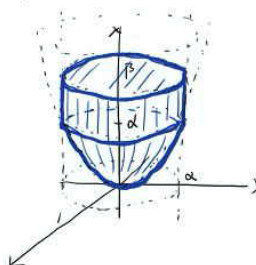
Ex. Calcolare area/volume, baricentro e mom. d'inertia dei corpi

$E_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x^2 + 1\}$

$E_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \min\{a^2, z^2\}, 0 \leq z \leq \beta\}$ (ove $0 < a < \beta$)



(E_1 è una specie di ala)



$x^2 + y^2 \leq \min\{a^2, z^2\}$
 superficie
 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2 & (\text{proiezione } z \geq \frac{1}{a}(x^2 + y^2)) \\ x^2 + y^2 \leq z^2 & (z \leq a) \end{cases}$
 (E_2 è una sorta di pallottola)

Area(E_1) = $\int_0^1 dx \int_{-x}^{x^2+1} dy = \int_0^1 (x^2 + 1 - (-x)) \, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x + \frac{x^2}{2} \right)_0^1 = \frac{11}{6}$

$x_G = \frac{1}{m} \int \int x \, dx \, dy = \frac{6}{11} \int_0^1 x \, dx \int_{-x}^{x^2+1} dy = \frac{6}{11} \int_0^1 x (x^2 + 1 - (-x)) \, dx = \frac{6}{11} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)_0^1 = \frac{13}{22}$

$$x_G = \frac{1}{M/6} \int_{E_1} x dx dy = \frac{6}{11} \int_0^1 x dx \int_{-x}^{x^2+1} dy = \frac{6}{11} \int_0^1 x (x^2+1 - (-x)) dx = \frac{6}{11} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{13}{22}$$

$$y_G = \frac{1}{M/6} \int_{E_1} y dx dy = \frac{6}{11} \int_0^1 dx \int_{-x}^{x^2+1} y dy = \frac{6}{11} \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-x}^{x^2+1} dx = \frac{3}{11} \int_0^1 ((x^2+1)^2 - (-x)^2) dx$$

$$= \frac{3}{11} \left[\frac{x^5}{5} + x^3 + x \right]_0^1 = \frac{23}{55}$$

Momento d'inerzia di E_1 risp. a xy (densità superficiale μ costante)

$$I_y = \mu \int_{E_1} x^2 dx dy = \mu \int_0^1 x^2 dx \int_{-x}^{x^2+1} dy = \mu \int_0^1 x^2 (x^2+1+x) dx = \dots = \frac{47}{60} \mu$$

Risf. alla x:

$$I_x = \mu \int_{E_1} y^2 dx dy = \mu \int_0^1 dx \int_{-x}^{x^2+1} y^2 dy = \mu \int_0^1 \frac{1}{3} ((x^2+1)^3 - (-x)^3) dx = \frac{619}{920} \mu$$

Per gli altri momenti d'inerzia rispetto a rette parallele agli assi:

per usare il Teorema di Huygens-Steiner: ad es. rispetto alle rette $r = \{x$
 dista x_G le parallele passanti per il baricentro ($x = x_G = \frac{13}{22}$) si avrà:

$$I_r = I_{r_G} + m(x_G - a)^2 = (I_y - m x_G^2) + m(x_G - a)^2 = I_y + m(a^2 - 2ax_G)$$

• Volume di E_2 : $\int_{E_2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \rho d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^B dz \int_0^a \rho d\rho = \pi a^2 (\beta - \frac{1}{2})$

Per simmetrie materiali si ha $x_G = y_G = 0$, e

$$z_G = \frac{1}{\pi a^2 (\beta - \frac{1}{2})} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \rho d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^B dz \int_0^a \rho d\rho \right) = \frac{3\beta^2 - a^2}{3(2\beta - a)} \quad (\text{se } \beta = a: z_G = \frac{2}{3} a)$$

Momento d'inerzia rispetto all'asse z (baricentrico):

$$I_z = \mu \int_{E_2} (x^2 + y^2) dx dy dz = \mu \left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \rho^2 d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^B dz \int_0^a \rho^2 d\rho \right) = \frac{\pi \mu a^4}{6} (3\beta - 2a)$$

(dimensione $\frac{kg}{m^3} \cdot m^4 \cdot m = kg \cdot m^2$)

Esercizi

- (22) Disegnare e calcolare volume e baricentro di
 $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$
Dire poi se la funzione $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$ è integrabile su D ,
e, nel caso, calcolare il valore dell'integrale.
- (23) Disegnare e calcolare (se possibile in più modi) i volumi di
 $E_1 = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq x \leq a, 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - y^2}\}$
 $E_2 = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq a^2, z^2 + x^2 \leq a^2\}$ (ove $a > 0$).

Si vedano inoltre gli esercizi del foglio n° 1, pubblicati nella pagina web.

VOLUME DEI SOLIDI DI ROTAZIONE

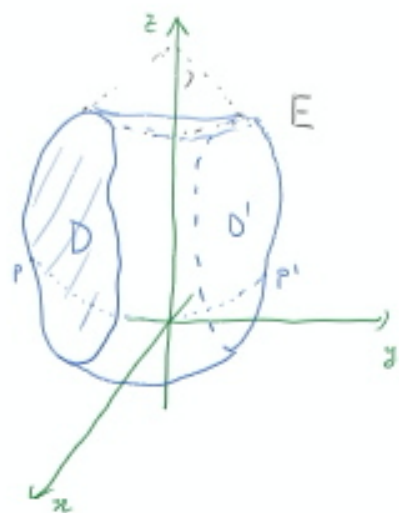
Prop. (TEOREMA DI GULDIN PER I VOLUMI DI ROTAZIONE)

Sia D un insieme piano misurabile e limitato contenuto nel semipiano (x, z) con $x > 0$.

Sia E il solido ottenuto facendo ruotare D di un angolo 2α attorno all'asse z . Allora

$$\text{Vol}(E) = 2 \int_D x \, dx \, dz = 2 \cdot x_G \cdot \text{Area}(D)$$

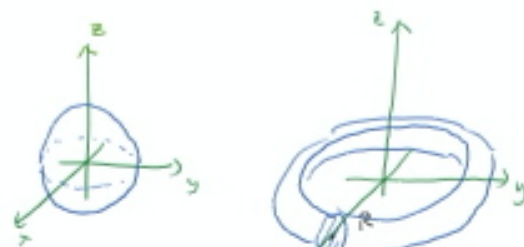
(ove x_G è la x del baricentro di D)



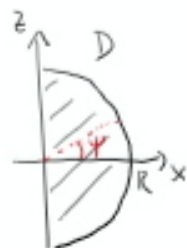
Dim. In coordinate cilindriche (ρ, θ, z) , si ha $E = \{(\rho, \theta, z) : (\rho, z) \in D, 0 \leq \theta \leq 2\alpha\}$

dunque $\text{Vol}(E) = \int_0^{2\alpha} d\theta \int_D \rho \, d\rho \, dz = 2 \int_D \rho \, d\rho \, dz$, come si voleva. //

Ex. Volume della sfera e del toro.



• Sfera

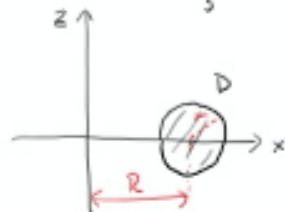


$$\begin{aligned} \text{Volume} &= 2\pi \int_D x \, dx \, dz = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int_0^R \sin\psi \cdot \rho \, d\rho \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\psi \, d\psi \int_0^R \rho^2 \, d\rho = \left(\sin\psi \right)_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot \left(\frac{\rho^3}{3} \right)_0^R = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} R^3 \end{aligned}$$

Se G è il baricentro di D , per simmetria si trova $z_G = 0$, e per Guldin

$$2\pi \cdot x_G \cdot \text{Area } D = \frac{4\pi}{3} R^3 \quad \text{con} \quad \text{Area } D = \frac{1}{2} \pi R^2 \Rightarrow x_G = \frac{4}{3\pi} R$$

• Toro

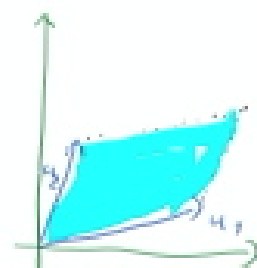


$$\text{Volume} = 2\pi \cdot x_G \cdot \text{Area } D = 2\pi \cdot R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2$$

Occorrerà ora, in preparazione alla spiegazione ormai vicina del calcolo del volume K -dimensionale di una varietà di dim K in $\mathbb{R}^n$, di un piccolo problema di geometria elementare:

DATI K VETTORI $u_0, \dots, u_K$ IN $\mathbb{R}^n$, QUAL È IL VOLUME K -DIM. DEL PARALLELPIPEDO DA ESSI GENERATO, OVVERO

$$P = \left\{ \underline{x} = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_K u_K : 0 \leq \lambda_j \leq 1 \right\}$$



Proposizione Data una matrice quadrata $A \in M_{K \times K}(\mathbb{R})$, la misura K -dim. del parallelepipedo generato in $\mathbb{R}^K$ dai K vettori colonna di A è data da $|\det A|$.

Più in generale: data una matrice rettangolare $A \in M_{n \times K}(\mathbb{R})$ con $K \leq n$, la misura K -dim. del parallelepipedo generato in $\mathbb{R}^n$ dai K vettori colonne di A è $\sqrt{\det(A^t \cdot A)}$, ove A^t è la matrice trasposta.

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} A^t & A \\ \hline \end{matrix}$$

Dim Iniziamo dal caso quadrato (K vettori in $\mathbb{R}^K$).

Se $u_1, \dots, u_K \in \mathbb{R}^K$ sono dipendenti, allora Volume = 0, e il risultato è vero. Se invece sono indipendenti, possiamo considerare il cambio di variabile $T: \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K$, ovvero l'identità la cui matrice è A , nelle basi $u_1, \dots, u_K$ in partenza e $e_1, \dots, e_K$ in arrivo. È dato (le cui colonne sono giustamente le immagini dei vettori di partenza rispetto a quelli di base in arrivo), e per

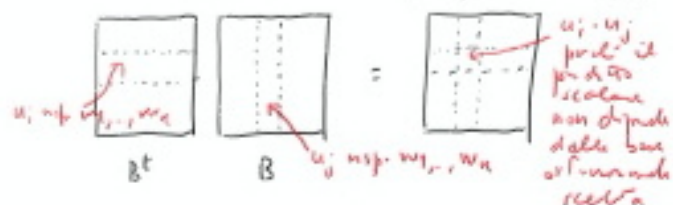
$$\text{Vol}(P) = \int_P dx_1 \dots dx_n = \int_{[0,1]^n} |\det A| dy_1 \dots dy_n = |\det A| \int_{[0,1]^n} dy_1 \dots dy_n = |\det A|$$

Nel caso generale, siano $w_1, \dots, w_k$ un sistema ortogonale di k vettori di $\mathbb{R}^n$ t.c. $\langle u_1, \dots, u_k \rangle \subseteq \langle w_1, \dots, w_k \rangle$.

Altre, se B è la matrice di $M_{k \times k}(\mathbb{R})$ le cui colonne riportano le coordinate degli u_j rispetto ai w_ℓ (ovvero $B_{ij} = u_i \cdot w_j$) allora per quasi detto punto si ha $\text{Vol}(P) = |\det B| = \sqrt{|\det(B^t B)|}$.

$$\text{Per } (B^t B)_{ij} = u_i \cdot u_j = (A^t A)_{ij}$$

$$\text{dunque } B^t B = A^t A. //$$



La matrice $A^t A$ è detta MATRICE DI GRAM dei $u_1, \dots, u_k$ e ha elementi $(A^t A)_{ij} = u_i \cdot u_j$.

Il suo determinante $\det(A^t A)$ è detto GRAMIANO di $u_1, \dots, u_k$.

Per il calcolo del gramiano è utile la seguente

Prop. (IDENTITÀ DI CAUCHY-BINET)

Il gramiano $\det(A^t A)$ è uguale alla somma dei quadrati dei determinanti di tutti i minori di A di ordine k .

Es. $u_1 = (2, 0, 1)$, $u_2 = (-3, 1, -2)$ in $\mathbb{R}^3$.

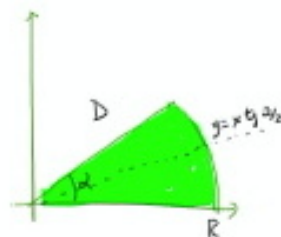


$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Gramian } \det(A^t A) = (2)^2 + (-4+3)^2 + (-1)^2 = 6$$

Il parallelogramma ha area $\sqrt{6}$.

Qualche semplice problema su aree, baricentri, momenti d'inerzia...

Ex.



$$\text{Area} : \int_D 1 \, dx \, dy = \int_0^{\theta_0} d\theta \int_0^R \rho \, d\rho = \frac{1}{2} R^2 \theta_0$$

Baricentro.

$$\int_D x \, dx \, dy = \int_0^{\theta_0} d\theta \int_0^R \rho \cos \theta \cdot \rho \, d\rho = \int_0^{\theta_0} \cos \theta \, d\theta \int_0^R \rho^2 \, d\rho = \frac{\sin^3 \theta_0}{3} R^3$$

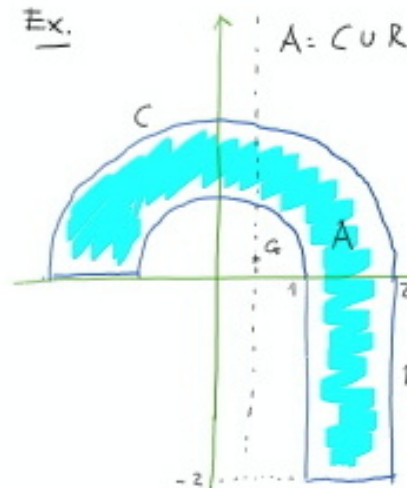
$$\Rightarrow x_G = \frac{1}{\text{Area}(D)} \int_D x \, dx \, dy = \frac{2}{\theta_0 R^2} \cdot \frac{\sin^3 \theta_0}{3} R^3 = \frac{2 \sin^3 \theta_0}{3 \theta_0} R$$

Nota che $\lim_{\theta_0 \rightarrow 0} x_G = \frac{2}{3} R$ ($> R/2$, che è naturale a tendenza...)

$$\int_D y \, dx \, dy = \int_0^{\theta_0} d\theta \int_0^R \rho \sin \theta \cdot \rho \, d\rho = \frac{2(1 - \cos 2\theta_0)}{3 \theta_0} R$$

Nota che $y_G/x_G = \frac{1 - \cos 2\theta_0}{\sin^3 \theta_0} \left(\begin{matrix} t = \sin \theta_0 \\ \sin 2\theta_0 = 2t\sqrt{1-t^2} \\ \cos 2\theta_0 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right) = \frac{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{2t^3} = t \quad (\text{ok})$

Ex.



Trova il baricentro di A.

$$\text{Area } A = \frac{1}{2} (2^2 \pi - 1^2 \pi) + 1 \cdot 2 = \frac{3\pi + 4}{2}$$

$$\int_A x \, dx \, dy = \int_C x \, dx \, dy + \int_R x \, dx \, dy = \int_0^{\pi} d\theta \int_1^2 \rho \cos \theta \, d\rho + \int_1^2 dx \int_{-2}^0 dy \, x$$

$$= \int_0^{\pi} \cos \theta \, d\theta \int_1^2 \rho^2 \, d\rho + \int_1^2 x \, dx \int_{-2}^0 dy = \left(\frac{\rho^3}{3} \right)_1^2 \cdot (-\sin \theta)_0^{\pi} = 3$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \int_A x \, dx \, dy = \frac{6}{3\pi + 4} \sim \frac{6}{13} \sim 0,45$$

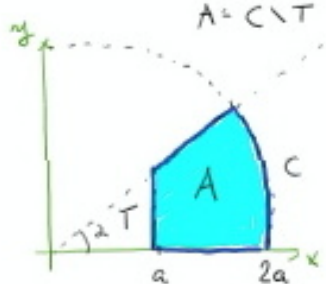
In generale:

$$x_{G(A)} = \frac{\text{Area}(C) \cdot x_{G(C)} + \text{Area}(R) \cdot x_{G(R)}}{\text{Area}(A)}$$

(media pesata delle due coordinate x dei baricentri di C e R)

Fare il conto analogo anche per y_G .

$A = C \setminus T$



$$\begin{aligned}
 \text{Area}(A) &= \text{Area}(C) - \text{Area}(T) = \frac{\pi}{2} (2a)^2 - \frac{1}{2} a \cdot a \tan 2 = \frac{4a^2 - a^2 \tan 2}{2} \\
 \int_A x \, dx \, dy &= \int_C x \, dx \, dy - \int_T x \, dx \, dy = \int_0^2 d\theta \int_0^{2a} \rho \cos \theta \cdot \rho \, d\rho - \int_0^a dx \int_0^{\tan^{-1}(x/a)} x \, dy \\
 &= \int_0^2 \cos \theta \, d\theta \int_0^{2a} \rho^2 \, d\rho - \int_0^a x \, dx \int_0^{\tan^{-1}(x/a)} dy = \frac{8}{3} a^3 \sin 2 - \int_0^a x^2 \tan^{-1}(x/a) \, dx \\
 &= \frac{8 \sin 2 - \tan 2}{3} a^3 \Rightarrow x_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \int_A x \, dx \, dy = \dots
 \end{aligned}$$

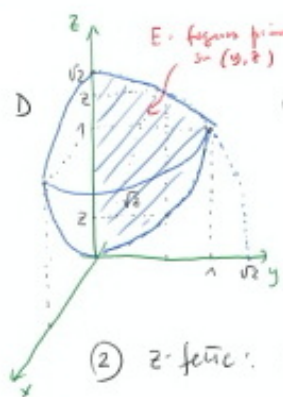
Fare il conto anche per y_G (ragionando sempre per differenza tra C e T)

Momenti d'inerzia di A rispetto a u e y . Se μ densità superficiale (kg/m^2).

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_A \mu \cdot x^2 \, dx \, dy = \mu \int_A x^2 \, dx \, dy = \mu \left(\int_C x^2 \, dx \, dy - \int_T x^2 \, dx \, dy \right) = \\
 &= \mu \left(\int_0^2 d\theta \int_0^{2a} \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho \, d\rho - \int_0^a dx \int_0^{\tan^{-1}(x/a)} x^2 \, dy \right) \\
 &= \mu \left(\int_0^2 \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^{2a} \rho^3 \, d\rho - \int_0^a x^3 \tan^{-1}(x/a) \, dx \right) = \dots
 \end{aligned}$$

Ora la risoluzione dettagliata di un degli esercizi assegnati...

- (22) Disegnare e calcolare volume e baricentro di
- $$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$$
- Dire poi se la funzione $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$ è integrabile su D , e, nel caso, calcolare il valore dell'integrale.



Volume: vediamo in tre modi

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ Guldin: } Vol(D) &= \frac{\pi}{2} \int_E y \, dy \, dz = \frac{\pi}{2} \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} y \, dz \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 y (\sqrt{2-y^2} - y^2) \, dy = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{3} (2-y^2)^{3/2} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{7}{12} \right) = \frac{(8\sqrt{2}-7)\pi}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{ z-fetta: } Vol(D) &= \int_0^1 dz \int_{D\sqrt{z}} dx \, dy + \int_1^{\sqrt{2}} dz \int_{D\sqrt{2-z^2}} dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{z}}{4} \right)^2 \pi \, dz + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2-z^2}}{4} \right)^2 \pi \, dz = \frac{\pi}{4} \left(\int_0^1 z \, dz + \int_1^{\sqrt{2}} (2-z^2) \, dz \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\left(\frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \left(2z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{2} + \left(2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - \left(2 - \frac{1}{3} \right) \right) \right) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{3} \right) \quad (\text{come prima}) \end{aligned}$$

$\textcircled{3}$ Coordinate sferiche:  sul paraboloide: $z = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \rho \cos \varphi = \rho^2 \sin^2 \varphi \Leftrightarrow \rho = \cos \varphi / \sin^2 \varphi$

$$\begin{aligned} Vol(D) &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}}^{\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \varphi \left(\frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_{\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}}^{\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}} d\varphi \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left((-\cos \varphi) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{3} \cancel{\sin \varphi} \cdot \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^6 \varphi} d\varphi \right) \\ &= \frac{\pi}{6} \left(\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot 2\sqrt{2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos \varphi \cdot \frac{1 - \cos^2 \varphi}{\sin^5 \varphi} d\varphi \right) \\ &= \frac{\pi}{6} \left(2(\sqrt{2}-1) + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1-t^2}{t^5} dt \right) = \frac{\pi}{6} \left(2(\sqrt{2}-1) + \left(-\frac{1}{4t^4} + \frac{1}{2t^2} \right) \Big|_{\sqrt{2}/2}^1 \right) \\ &= \frac{\pi}{6} \left(2(\sqrt{2}-1) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) - \left(-1 + 1 \right) \right) = \frac{\pi}{6} \left(2\sqrt{2} - \frac{7}{4} \right) \quad (\text{come prima}). \end{aligned}$$

• Baricentro: per simmetria materiale avrà $x_G = y_G$, da cui basta calcolare $x_G \in z_G$. Procediamo ad esempio per z-fetta:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{Vol(D)} \int_D x \, dx \, dy \, dz = \frac{24}{(8\sqrt{2}-7)\pi} \left(\int_0^1 dz \int_{D\sqrt{z}} x \, dx \, dy + \int_1^{\sqrt{2}} dz \int_{D\sqrt{2-z^2}} x \, dx \, dy \right) \\ &= \frac{24}{(8\sqrt{2}-7)\pi} \left(\int_0^1 dz \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} \rho \cos \theta \, \rho \, d\rho + \int_1^{\sqrt{2}} dz \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{2-z^2}} \rho \cos \theta \, \rho \, d\rho \right) \\ &= \frac{3 \cdot 24}{(8\sqrt{2}-7)\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \int_0^1 \left(\frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{z}} dz + \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{2-z^2}} dz \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{(8\sqrt{2}-7)\pi} \left(\int_0^1 z^{3/2} dz + \int_1^{\sqrt{2}} (2-z^2)^{3/2} dz \right)$$

$$= \frac{8}{(8\sqrt{2}-7)\pi} \left(\left[\frac{2}{5/2} \right]_0^1 + \left(\frac{1}{4} \sin t \cos^3 t + \frac{3}{8} (t + \sin t \cos t) \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \right)$$

$$= \frac{8}{(8\sqrt{2}-7)\pi} \left(\left(\frac{2}{5} \right) - (0) + \left(\frac{3\pi}{16} \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{8} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \right) \right)$$

$$= \frac{8}{(8\sqrt{2}-7)\pi} \left(\frac{2}{5} + \frac{3\pi}{16} - \frac{1}{4} - \frac{3\pi}{32} \right) = \frac{1}{20\pi(8\sqrt{2}-7)} \sim 0,28$$

$$\int (2-z^2)^{3/2} dz = \left[z = \sqrt{2} \sin t \right]$$

$$= \int \cos^4 t dt = \int \cos t \cdot \cos^3 t dt$$

$$= \sin t \cos^3 t - \int \sin t (-3 \sin t \cos^2 t) dt$$

$$= \sin t \cos^3 t + 3 \int \sin^2 t \cos^2 t dt$$

$$= \sin t \cos^3 t + 3 \int (1 - \cos^2 t) \cos^2 t dt$$

$$= \sin t \cos^3 t + 3 \int \cos^2 t dt - 3 \int \cos^4 t dt$$

$$= 4 \int \cos^2 t dt = \sin t \cos^3 t + 3 \frac{t + \sin t \cos t}{2} + k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \sin t \cos^3 t + \frac{3}{8} (t + \sin t \cos t) + k$$

$$Z_G = \frac{1}{V_G(D)} \int_D z dx dy dz = \frac{24}{(8\sqrt{2}-7)\pi} \left(\int_0^1 z dz \int_{\square_{\sqrt{2}}} dx dy + \int_1^{\sqrt{2}} z dz \int_{\square_{\sqrt{2}-z^2}} dx dy \right)$$

$$= \frac{24}{(8\sqrt{2}-7)\pi} \left(\int_0^1 \frac{z\pi}{4} z dz + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(2-z^2)\pi}{4} z dz \right) = \frac{6}{8\sqrt{2}-7} \left(\left[\frac{z^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{6} \right]_1^{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{6}{8\sqrt{2}-7} \left(\left(\frac{1}{3} \right) - (0) + (1) - \left(\frac{3}{4} \right) \right) = \frac{7}{2(8\sqrt{2}-7)} \sim 0,85$$

• La funzione $f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$ non è limitata all'intorno di $(0,0,0) \in D$ (notare che sull'asse z vale $f(0,0,z) = \frac{1}{z} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \infty$)
 dunque non è possibile dire subito se f sia o meno integrabile su D .

D'altra parte f è ≥ 0 su D , dunque per Tonelli + Fubini essa sarà integrabile $\Leftrightarrow$ se un quadruplo integrale iterato è finito, e tale sarà il valore dell'integrale.

Per vedere se c'è, calcolando sia per z -fisso che con le coord. sferiche.

① Per z -fisso:

$$\int_0^1 dz \int_{\square_{\sqrt{2}}} \frac{z}{x^2+y^2+z^2} dx dy + \int_1^{\sqrt{2}} dz \int_{\square_{\sqrt{2}-z^2}} \frac{z}{x^2+y^2+z^2} dx dy$$

questo addendo è certamente finito, ma lo aggiungo per completezza del calcolo. Quella di convergenza incasta è solo il primo addendo.

$$= \int_0^1 z dz \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\rho^2+z^2} \rho d\rho + \int_1^{\sqrt{2}} z dz \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{2-z^2}} \frac{1}{\rho^2+z^2} \rho d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^1 z \left(\frac{1}{2} \ln(\rho^2+z^2) \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} dz + \int_1^{\sqrt{2}} z \left(\frac{1}{2} \ln(\rho^2+z^2) \right) \Big|_0^{\sqrt{2-z^2}} dz \right)$$

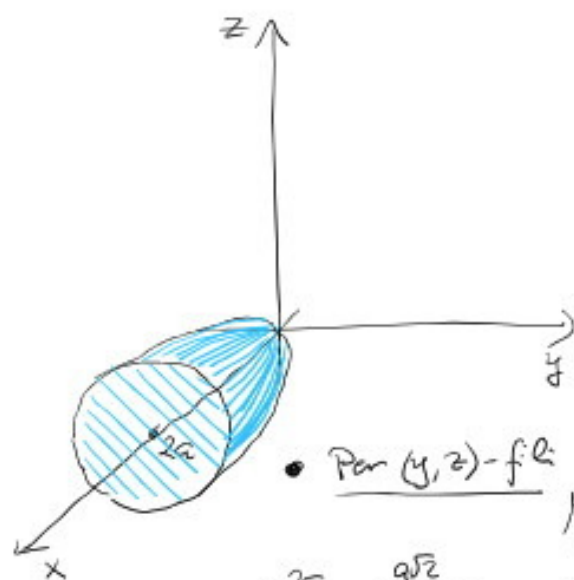
$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4} \left(\int_0^1 z (\log(z^2+z) - \log(z^2)) dz + \int_1^{\sqrt{2}} z (\log 2 - \log z^2) dz \right) \\
&= \frac{\pi}{4} \left(\int_0^1 z \log\left(1+\frac{1}{z}\right) dz + \int_1^{\sqrt{2}} z (\log 2 - 2 \log z) dz \right) \\
&= \int z \log\left(1+\frac{1}{z}\right) dz = \frac{z^2}{2} \log\left(1+\frac{1}{z}\right) - \int \frac{z^2}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{z^2}}{1+\frac{1}{z}} dz = \frac{z^2}{2} \log\left(1+\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2} \int \frac{z}{z+1} dz \\
&= \frac{1}{2} \left(z^2 \log\left(1+\frac{1}{z}\right) + z - \log(z+1) \right) + K \\
&= \int z \log z dz = \frac{z^2}{2} \log z - \int \frac{z^2}{2} \cdot \frac{1}{z} dz = \frac{z^2}{2} \log z - \frac{z^2}{4} + K = \frac{z^2}{4} (2 \log z - 1) + K \\
&= \frac{\pi}{4} \left(\left[\frac{1}{2} \left(z^2 \log\left(1+\frac{1}{z}\right) + z - \log(z+1) \right) \right]_0^1 + \left[\frac{\log 2}{2} z^2 - \frac{z^2}{4} (2 \log z - 1) \right]_1^{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{\pi}{8} \left((\log 2 + 1 - \log 2) - (0) + (2 \log 2 - 2(\log \sqrt{2} - 1)) - (\log 2 + 1) \right) \\
&= \frac{\pi}{8} (2 - \log 2) \quad \text{valore finito (e > 0)}.
\end{aligned}$$

(2) In cond. sferiche: (dal punto 1) già so che l'integrale converge, dunque sono tranquillo...

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho \cos \varphi}{\rho^2} \cancel{\rho^2} \sin \varphi d\rho + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi}} \frac{\rho \cos \varphi}{\rho^2} \cancel{\rho^2} \sin \varphi d\rho \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\pi/4} \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{\rho^2}{2} \right)_0^{\sqrt{2}} d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{\rho^2}{2} \right)_0^{\frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi}} d\varphi \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\pi/4} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cancel{\sin \varphi} \cos \varphi \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^6 \varphi} d\varphi \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\left(-\frac{\cos 2\varphi}{4} \right)_0^{\pi/4} + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 - \sin^2 \varphi}{\sin^5 \varphi} \cos \varphi d\varphi \right) \quad t = \sin \varphi \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}/2}^1 \left(\frac{1}{t^5} - \frac{1}{t^3} \right) dt \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2t^2} - \log t \right) \Big|_{\sqrt{2}/2}^1 \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left((-\frac{1}{2}) - (-1 + \frac{1}{2} \log 2) \right) \right) \\
&= \frac{\pi}{8} (2 - \log 2), \text{ lo stesso valore trovato in precedente.}
\end{aligned}$$

In conclusione, f è integrabile su D con $\int_D f \, dxdydz = \frac{\pi}{8} (2 - \log 2)$.

Calcolare i momenti d'inerzia rispetto agli assi coordinati del corpo $E = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq ax \leq 2a^2\}$ (con $a > 0$) di densità di massa $\mu > 0$, possibilmente in vari modi.



(a) RISPETTO ASSE X

• Per x-func

$$\begin{aligned} \int_E \mu(y^2+z^2) dx dy dz &= \mu \int_0^{2a} dx \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{ax}} (y^2+z^2) dy dz \\ &= \mu \int_0^{2a} dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{ax}} r^2 \cdot r dr \quad \textcircled{I} r = \sqrt{ax} \\ &= \frac{1}{2} \pi \mu \int_0^{2a} a^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \pi \mu a^2 \left(\frac{x^3}{3} \right)_0^{2a} = \frac{4\pi}{3} \mu a^5 \end{aligned}$$

• Per (y,z)-fct

$$\begin{aligned} \mu \int dy dz \int_{\frac{y^2+z^2}{a}}^{2a} (y^2+z^2) dx &= \mu \int_{\frac{y^2+z^2}{a}}^{2a} (y^2+z^2) \left(2a - \frac{y^2+z^2}{a} \right) dy dz \\ &= \mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a\sqrt{2}} \rho^2 (2a - \frac{\rho^2}{a}) \rho d\rho \quad \textcircled{II} r = a\sqrt{2} \\ &= 2\pi \mu \left(\frac{2a\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6a} \right)_0^{a\sqrt{2}} = 2\pi \mu \left(2a^5 - \frac{4}{3}a^5 \right) = \frac{4\pi}{3} \mu a^5 \end{aligned}$$

(b) RISPETTO ASSE Z (E ANCHE RISPETTO ASSE Y)

• Per x-func

$$\begin{aligned} \mu \int_0^{2a} dx \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{ax}} (x^2+y^2) dy dz &= \mu \int_0^{2a} dx \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{ax}} (x^2+r^2 \cos^2 \alpha) r dr \\ &= \mu \int_0^{2a} dx \int_0^{2\pi} d\alpha \left[\frac{x^2 r^2}{2} + \frac{r^4 \cos^2 \alpha}{4} \right]_0^{\sqrt{ax}} = \mu \int_0^{2a} dx \int_0^{2\pi} \left(\frac{ax^3}{2} + \frac{ax^4 \cos^2 \alpha}{4} \right) d\alpha \\ &= \frac{1}{4} \mu \int_0^{2a} \left[2ax^3 \cdot 2\pi + a^2 x^2 \frac{2\pi \cos 2\alpha}{2} \right]_{\alpha=0}^{2\pi} dx = \frac{1}{4} \mu \int_0^{2a} (2ax^3 \cdot 2\pi + \frac{a^2 x^2}{2} \cdot 2\pi) dx \\ &= \frac{1}{4} \mu \pi a \int_0^{2a} (4x^3 + ax^2) dx = \frac{1}{4} \mu \pi a \left[x^4 + \frac{ax^3}{3} \right]_{x=0}^{2a} = \frac{14\pi}{3} \mu a^5 \end{aligned}$$

• Per (y,z)-fct

$$\begin{aligned} \mu \int dy dz \int_{\frac{y^2+z^2}{a}}^{2a} (x^2+y^2) dx &= \mu \int dy dz \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{x=\frac{y^2+z^2}{a}}^{x=2a} \\ &= \mu \int_{a\sqrt{2}}^{2a} \int_0^{a\sqrt{2}} \left(\frac{8a^3}{3} + 2ay^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{y^2+z^2}{a} \right)^3 - \left(\frac{y^2+z^2}{a} \right) y^2 \right) dx dy \\ &= \mu \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{a\sqrt{2}} \left(\frac{8a^3}{3} + 2a\rho^2 \cos^2 \alpha - \frac{\rho^6}{3a^3} - \rho^2 \cos^2 \alpha \cdot \frac{\rho^2}{a} \right) \rho d\rho = \dots = \frac{14\pi}{3} \mu a^5 \end{aligned}$$

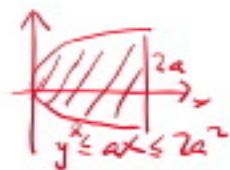
• Per (x,y)-fct

$$2 \cdot \mu \int_{\frac{y^2}{a}}^{2a} dx \int_0^{\sqrt{ax-y^2}} (x^2+y^2) dz = 2\mu \int_{\frac{y^2}{a}}^{2a} (x^2+y^2) \sqrt{ax-y^2} dx dy$$

Pongo $\begin{cases} u = \sqrt{ax-y^2} \\ v = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u^2+v^2}{a}, u \geq 0 \\ y = v \end{cases}$

Poi $\frac{y^2}{a} \leq x \leq 2a \Leftrightarrow \frac{v^2}{a} \leq \frac{u^2+v^2}{a} \leq 2a \quad (u \geq 0)$

$\Leftrightarrow v^2 \leq u^2+v^2 \leq 2a^2 \quad (u \geq 0)$

Dunque  $\leftrightarrow$ 

Jacobiano $\begin{pmatrix} \frac{2}{3}a & \frac{2}{3}v/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det = \frac{2}{3}a > 0$

$$= 2\mu \int_{\frac{0}{a\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4\sqrt{2}}} \int_0^{a\sqrt{2}} \left(\frac{(u^2+v^2)^2}{a^2} + v^2 \right) \cdot u \cdot \frac{2}{3}a \, du \, dv = 2\mu \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\sqrt{2}} \left(\frac{\rho^4}{a^2} + \rho^2 \sin^2 \theta \right) \cdot \frac{2}{3} \rho^2 \cos \theta \cdot \frac{2}{3} \rho \, d\rho$$

$$= \frac{4\mu}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta \cdot \left[\frac{\rho^8}{8a^2} + \frac{\rho^6}{6} \sin^2 \theta \right]_{\rho=0}^{\rho=a\sqrt{2}} = 8\mu a^5 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + \frac{2}{3} \sin^2 \theta \right) \cos^2 \theta \, d\theta$$

$$= 8\mu a^5 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos^2 \theta + \frac{1}{6} \sin^2(2\theta) \right) d\theta = \dots = \frac{14\pi}{3} \mu a^5.$$

• Cambio di variabili, poi coordinate sferiche

$$\begin{cases} u = \sqrt{ax-y^2-z^2} \geq 0 \\ v = y \\ w = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u^2+v^2+w^2}{a} \\ y = v \\ z = w \end{cases} \quad \text{Jac} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a & \frac{2}{3}v & \frac{2}{3}w \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \det = \frac{2}{3}a$$

$$E = \{y^2+z^2 \leq x \leq 2a^2\} \Leftrightarrow D = \begin{cases} u^2+v^2+w^2 \leq 2a^2 \\ u \geq 0 \end{cases} \text{ (semisfera)}$$

$$\mu \int_E (x^2+y^2) \, dx \, dy \, dz = \mu \int_D \left(\frac{(u^2+v^2+w^2)^2}{a^2} + v^2 \right) \frac{2}{3}a \, du \, dv \, dw$$

(Passo in coord. sferiche)

$$= \mu \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \left(\frac{\rho^4}{a^2} + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \right) \cdot \frac{2}{3} \rho^2 \cos \theta \sin^2 \varphi \cdot \rho^2 \sin \theta \, d\rho$$

$$= \frac{2\mu}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi \left[\frac{\rho^8}{8a^2} + \frac{\rho^6}{6} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \right]_{\rho=0}^{\rho=a\sqrt{2}}$$

$$= 4\mu a^5 \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \left(1 + \frac{2}{3} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \right) d\theta$$

$$= 4\mu a^5 \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi \left[\sin \theta + \frac{2}{9} \sin^2 \varphi \sin^3 \theta \right]_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2}$$

$$= 6\mu a^5 \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \left(1 + \frac{2}{9} \sin^2 \varphi \right) d\varphi = \dots = \frac{14\pi}{3} \mu a^5.$$