

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

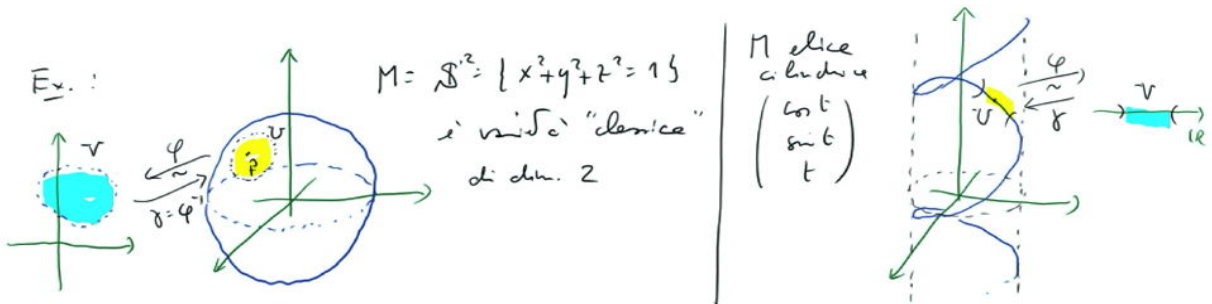
Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

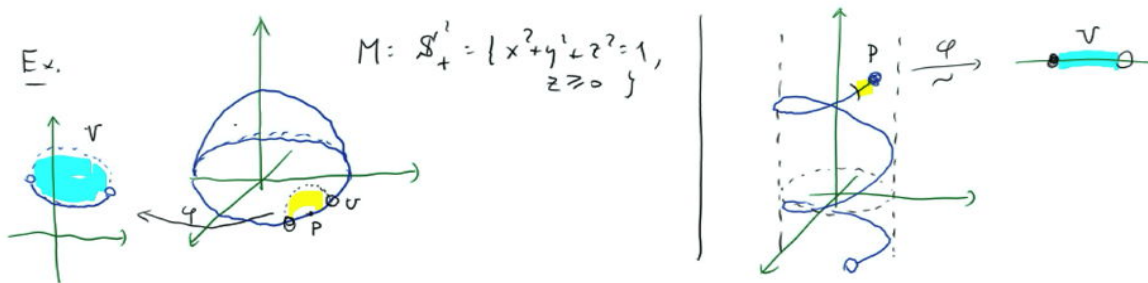
Lezione di martedì 28/10/2025

VARIETA' DIFFERENZIALI CON BORDO

La definizione "classica" di varietà differenziabile di dim. m , data all'inizio del corso, prevede che ogni punto delle varietà debba avere un intorno sulle varietà stessa che sia diffeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^m$.



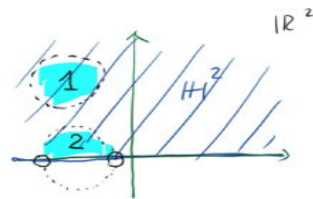
In questo modo però non si considerano varietà quelle che includono anche alcuni punti "di bordo" a cui non accade precisamente questo, ma c'è diffeomorfismo con un "semichiuso" di $\mathbb{R}^m$.



È per considerare anche insiemi più generali di questi tipi che introduco le nozioni di VARIETA' CON BORDO.

In $\mathbb{R}^m$ si considera il semispazio superiore chiuso

$$H^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_m \geq 0\}$$



Come sono fatti gli aperti di H^m ? Di due tipi:

1. Quelli che non toccano l'iperpiano $x_m = 0$, ovvero quelli contenuti in $x_m > 0$ (aperti anche in $\mathbb{R}^m$) aperti "classici"
2. Quelli che intersecano l'iperpiano $x_m = 0$, e dopo un tempo dentro una porzione (non sono più aperti in $\mathbb{R}^m$) aperti solo in H^m

Due insiemi con frontiera come differenziali? No!

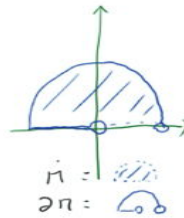
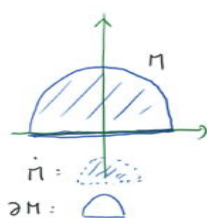
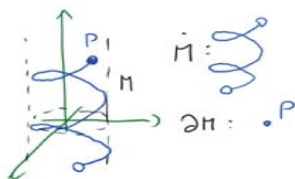
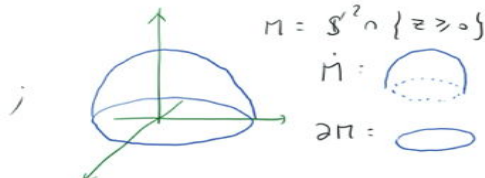
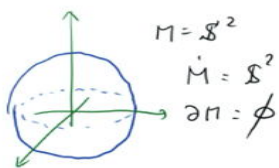
Se si fosse un differenziale $\frac{\varphi}{\sim} \rightarrow \varphi(P)$ sarebbe indotto un differenziale anche tra il dominio privato di P e il codominio privato di $\varphi(P)$ ma questo sarebbe assurdo (il primo è semplicemente connesso, il secondo no)

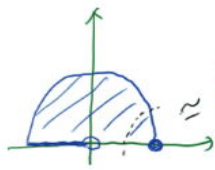
Si dice che un sottoinsieme $M \subseteq \mathbb{R}^n$ è una VARIETÀ CON BORDO in $\mathbb{R}^n$ di dim. m se ogni suo punto ha un intorno in M diffeomorfo a un aperto di H^m .

In questo modo, i punti di M vengono naturalmente divisi in due famiglie disgiunte:

- $\dot{M} = \{\text{punti di } M \text{ con intorno diffeomorfo a uno di tipo 1}\}$ INTERNO DI M
- $\partial M = \{\text{punti di } M \text{ con intorno diffeomorfo a uno di tipo 2}\}$ BORDO DI M

Es.





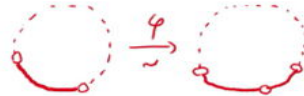
ma questo
NON È
un aplo
di H^2 !

Da qui questo NON È
una varietà al bordo!

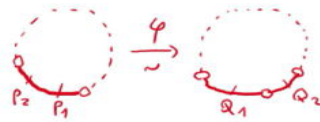
Perché? Se ci fosse un diffeom.



sarebbe indotto un diffeom.
anche rimuovendo P e $\phi(P)$:



Prendiamo due punti Q_1, Q_2 nel
codominio prima e dopo $\phi(P)$,
e le loro antimmagini P_1, P_2



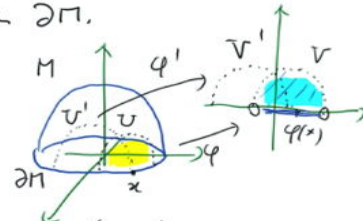
Allora l'immagine $\phi(P_1 P_2)$ dovrebbe essere un segmento
tutto contenuto in un arco (vedi anche dopo...), annullato!

È improbabile intesa che

Prop. Se M è una varietà bordata di dim. m e classe C^k ,
il suo interno $\dot{M}$ e il suo bordo ∂M sono entrambe
varietà senza bordo, di dim. rispettivamente m e $m-1$.

Dim. Che $\dot{M}$ sia così è ovvio (per i suoi punti vale la vecchia
definizione di varietà). Occupiamoci ora di ∂M .

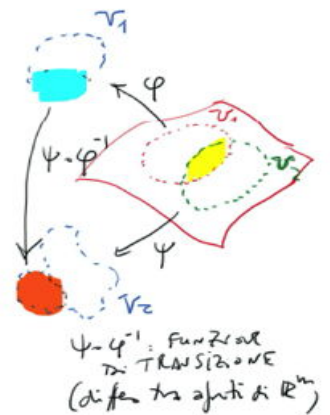
Sia $x \in \partial M$, e sia U intorno aperto
di x in M , V un aperto di H^m e
 $\phi: U \xrightarrow{\sim} V$ come sopra



Deve essere $\phi(x) \in \partial V$ per il T. Funzione inversa (ci deve essere
un intorno aperto di $\phi(x)$ diffeomorfo a uno di x , e se $\phi(x)$
non sta su nel bordo un tale intorno sarebbe una palla aperta,
con impossibilità di diffeomorfismo). Un po'

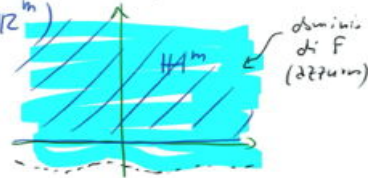
Questo implica in generale che $\phi(\partial U) = \partial V$.

Ma allora $\varphi|_{\partial U} : \partial U = U \times \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \partial V$ è caso facile
 di ∂M attorno a x , e questo mostra che ∂M è
 varietà classica di dim. $m-1$ poiché ∂U è un apl. di $\mathbb{R}^{m+1}$.
 L'ultima cosa da vedere sarebbe che le funzioni di transizione
 tra due carte di M inducono delle funzioni di transizione
 tra le componenti carte di ∂M .
 Ma ciò segue dal prossimo lemma.



Lemma

Un auto-diffeomorfismo $F: H^m \xrightarrow{\sim} H^m$ di classe $\mathcal{C}^k$
 (cioè un auto-omeomorfismo che si estende a un diffeomor-
 $\mathcal{C}^k$ su qualche intorno apl. di H^m in $\mathbb{R}^m$)
 induce un auto-diffeomorfismo
 $f: \partial H^m \xrightarrow{\sim} \partial H^m$ di classe $\mathcal{C}^k$,
 ponendo, se $x' = (x_1, \dots, x_{m-1})$



$$f(x') := F(x', 0).$$

Inoltre, se F ha $\det. \text{jacobiano} > 0$, così vale anche per f .

Dim.

Già si è detto prima che $F(\partial H^m) = \partial H^m$ (per il Teo.
 della Funz. inversa), dunque in effetti si induce un
 auto-diffeomorfismo f su ∂H^m come detto.

Potrebbe solo da vedere il punto sul segno del determinante,
 e lo vediamo per semplicità nel caso $m=2$ (gli altri
 sono simili). Se $F: H^2 \rightarrow H^2$, e cioè $F = (F_1, F_2)$:

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \quad \text{Concentrarsi sui soli punti} \\ \text{di } \partial H^2, \text{ ovvero } (y_1, 0)$$

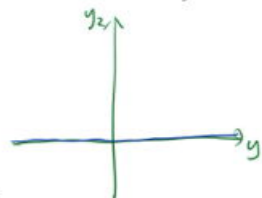
$$\text{Allora come detto: } f(y_1) := F_1(y_1, 0),$$

$$\text{e dunque } f'(y_1) = \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(y_1, 0);$$

$$\text{inoltre } F_2(y_1, 0) \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(y_1, 0) \equiv 0.$$

$$\text{Ne segue } J_F(y_1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(y_1, 0) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(y_1, 0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(y_1, 0) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(y_1, 0) \end{pmatrix}$$

$$\text{Inoltre } \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(y_1, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F_2(y_1, t) - F_2(y_1, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F_2(y_1, t)}{t} \rightarrow 0$$

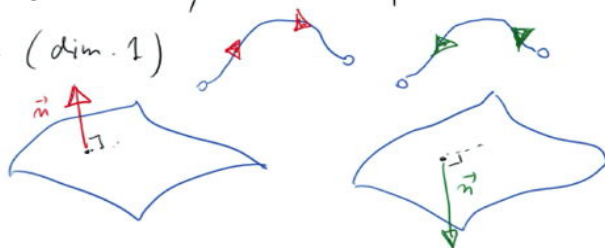


$$\text{per } J_F(y_1, 0) = \begin{pmatrix} f'(y_1) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(y_1, 0) \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(y_1, 0) \end{pmatrix} :$$

$$\text{dopo } \det J_F(y_1, 0) > 0 \Rightarrow f'(y_1) > 0 //$$

ORIENTAZIONE DI UNA VARIETÀ

La nozione di orientare una varietà significa, grossomodo, guardare la varietà "nella sua interezza" (non solo punto per punto) e chiedersi "in che maniera si può percorrerla": risulta che, quando le cose funzionano, le maniere son due, e lo si capisce intuitivamente dai casi delle curve (dim. 1) e delle ipersuperfici (dim. $n-1$)



Cerchiamo ora di essere più precisi.

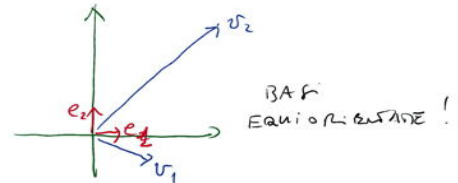
Primo passo: orientare $\mathbb{R}^m$ significa fissare una sua base ordinata chiamandola "positiva". Da quel momento in poi $\mathbb{R}^m$ si penserà orientato da quella base, nel senso che ogni altra sua base sarà "positiva" o "negativa" a seconda che il cambio tra le due (la funzione lineare - isomorfismo - di passaggio) abbia determinante > 0 oppure < 0 .

Solitamente si sceglie come base ordinata di riferimento la base canonica $(e_1, \dots, e_m)$ in questo ordine:

in questo caso si dice che $\mathbb{R}^m$ ha l'orientazione canonica.

Ex. Se in $\mathbb{R}^2$ considero l'ordine canonico, la base $\{v_1, v_2\}$ su $v_1 = (2, -1)$ e $v_2 = (5, 4)$ è positiva?

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 13 > 0 \quad \text{Sì.}$$



Secondo passo : aperti di $\mathbb{R}^m$ (CONNESSI)

Rispetto a prima non cambia nulla (lo spazio tangente in ogni punto è tutto $\mathbb{R}^3$).

Qui invece è interessante considerare diffeomorfismi più generali di quelli visti prima, cioè i cambi di base per spazi vettoriali.

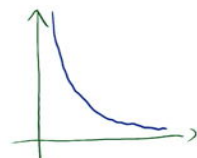
Sia $\phi: V' \xrightarrow{\sim} V$ un diffeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^m$ (ovvero un cambio di variabili): ovviamente un isomorfismo $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$ di spazi vettoriali è un esempio molto particolare di diffeomorfismo!

Visto che ϕ è diffe, $\det(J\phi): V' \rightarrow \mathbb{R}$ non si annulla mai (T. funz. inverse) e dunque, essendo continua, avrà segno costante > 0 oppure < 0 .

Tale segno si denota di solito con $\text{sign}(\phi) = \pm 1$.

E' da cui che ϕ PRESERVA / INVERTE l'orientazione a seconda che $\text{sign} \phi = \pm 1$.

Ex. • $\phi:]0, +\infty[\xrightarrow{\vee}]0, +\infty[\quad \phi(x) = \frac{1}{x^2}$ diffe!
 $\phi' = -\frac{1}{x^3} < 0$: ϕ inverte l'orientazione!



• $\phi: \begin{array}{|c|} \hline \text{quadrante aperto} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \text{quadrante aperto} \\ \hline \end{array}$

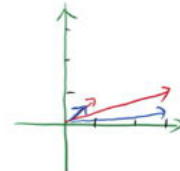
$$\phi(u, v) = (uv, \frac{v}{u}) \quad \begin{cases} x = uv \\ y = \frac{v}{u} \end{cases} \quad \begin{cases} v = x/u \\ y = \frac{x}{u^2} \end{cases} \quad \begin{cases} u = \sqrt{\frac{x}{y}} \\ v = \sqrt{xy} \end{cases} \text{ differenziale!}$$

$$J\phi = \begin{pmatrix} v & u \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix} \quad \det J\phi = \frac{2v}{u} > 0 \quad \text{dunque } \phi \text{ preserva l'orientazione!}$$

Già per verifica, vediamo che ϕ manda $(1, \frac{1}{2})$ e $(3, 1)$

$$\phi(1, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad \phi(3, 1) = (3, \frac{1}{3})$$

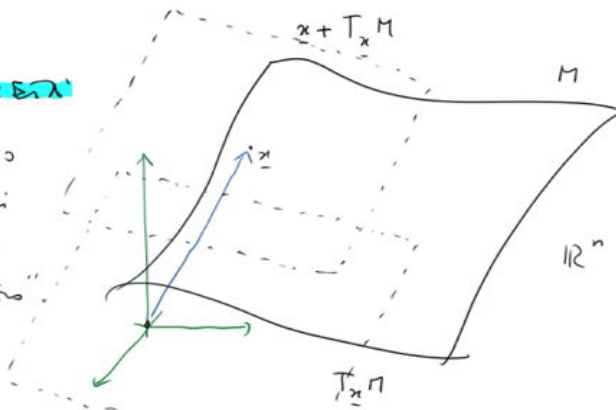
le due basi sono equiorientate!



Terzo passo: varietà qualsiasi (CONNESSE)

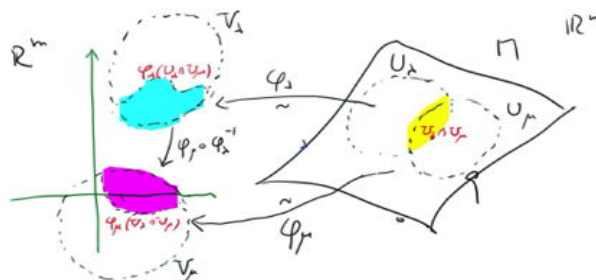
ORIENTAZIONE DI UNA VARIETÀ

Significa: "orientare ciascuno spazi tangente $T_x M$ nei vari punti $x \in M$, ma in modo continuo da un punto all'altro".



Più precisamente: se M è reale di dim. $m \leq n$,

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ si dirà **ORIENTABILE** se esiste un atlante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Pi\}$ "orientato", ossia tale che tutte le funzioni di transizione $\varphi_\mu \circ \varphi_\alpha^{-1}$ (diffeomorfismi di $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\mu) \subseteq \mathbb{R}^m$ su $\varphi_\mu(U_\alpha \cap U_\mu) \subseteq \mathbb{R}^m$) preservino l'orientazione di $\mathbb{R}^m$.



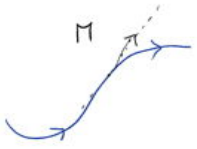
$\varphi_\mu \circ \varphi_\alpha^{-1}$ è un auto-diffeomorfismo di $U_\alpha \cap U_\mu$, e chiedo che $\det J_{\varphi_\mu \circ \varphi_\alpha^{-1}}$ sia positivo:

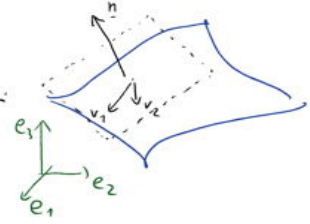
quindi per $\forall \alpha, \mu$ t.c. $U_\alpha \cap U_\mu \neq \emptyset$

M si dirà **ORIENTATA** quando si è esplicitamente scelto per essa un atlante orientato.

Ne segue che una varietà definita da una sola parametrizzazione $\gamma: V \rightarrow M$ è sempre orientabile: infatti, se $x \in M$ è $x = \gamma(v)$ per un certo $v \in V$: allora $T_x M = d\gamma_v(\mathbb{R}^m)$ eredita da $\mathbb{R}^m$ l'orientazione, tramite le basi ordinate $(d\gamma_v(e_1), \dots, d\gamma_v(e_m)) = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial v_1}(v), \dots, \frac{\partial \gamma}{\partial v_m}(v) \right)$. Quest'accedo si realizza nelle grandi maggioranza dei casi, specialmente quando si calcolano integrali (in effetti, in tali casi non possiamo suddividere di m -misura nulla, dopo di che M sia descritta da una sola parametrizzazione qualsivoglia).

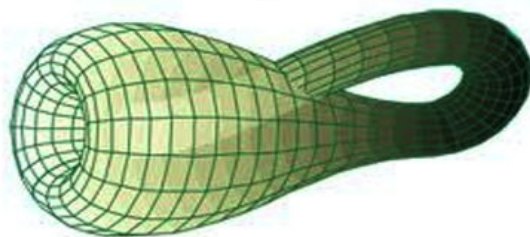
Ex. • $m=0$
points M $\begin{matrix} +1 & -1 & +1 \\ & & -1 \end{matrix}$ Significa assegnare a ciascun punto un segno $+1$ o oppure -1 (la varietà è "scissa", dopo ciascun punto fa "stacco e si").

• $m=1$
curve  Significa (sempre se le curve i'annunc!) scegliere una dei due versi di parametrizzazione.

• $m=n-1$
ipersuperfici  Significa (nel caso comune!) scegliere una delle due normali come positive.

• Ci sono sempre delle varietà NON orientabili.

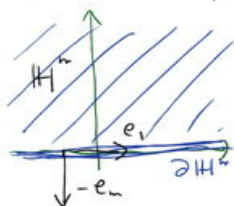
Esempi classici sono il NASOSTO DI MOBIUS e la BOTTEGLIA DI KLEIN



Una cosa molto importante è che, data una varietà con bordo, L'ORIENTAZIONE SCELTA SULLA VARIETÀ INDUCE UN'ORIENTAZIONE SULLA VARIETÀ BORDO.

Prop. | Se M è varietà orientabile di dim m , tale è anche il suo bordo ∂M (di dim $m-1$); inoltre, un'orientazione di M ne induce una su ∂M .

Dim. (e costruzione) Partiamo da $H^m = \{x : x_m \geq 0\}$, con $\partial H^m = \{x : x_m = 0\}$



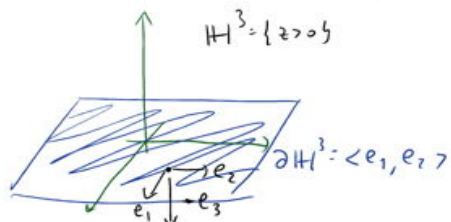
$$\partial H^m \subseteq \mathbb{R}^{m-1} = \langle e_1, \dots, e_{m-1} \rangle.$$

Una faccia a decidere se $(e_1, \dots, e_{m-1})$ è positiva?

Lo sarà per definizione quando

normale uscente!
 $(-e_m, e_1, \dots, e_{m-1})$ è base positiva per $\mathbb{R}^m$
 (manif. dell'orient. coincide)

Quindi nel caso del disco ($m=2$) la risposta è sì: (e_1) è base positiva.



Invece per $\partial H^3 = \langle e_1, e_2 \rangle$ la

risposta è No: (e_1, e_2) è base negativa.

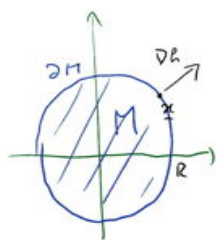
(In generale: $(e_1, \dots, e_{m-1})$ è base positiva per $\partial H^m \Leftrightarrow m$ è pari).

In generale, possiamo considerare le funzioni come

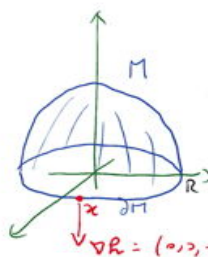
$$M = \{x = (x_1, \dots, x_n) : g_1(x) = \dots = g_{n-m}(x) = 0, h(x) \leq 0\}$$

$$\partial M = \{x = (x_1, \dots, x_n) : g_1(x) = \dots = g_{n-m}(x) = 0, h(x) = 0\}$$

Ex.



g non c'è
 (val. dim. $n=2$)
 $h(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$



$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$
 $h(x, y, z) = -z$

In tal caso, per $x \in \partial M$, $\nabla h(x)$ è la normale a ∂M in x uscente da M .

e data da una base $(v_1, \dots, v_{m-1})$ di $T_x(\partial M)$ è positiva $\Leftrightarrow$

la base $(\nabla h(x), v_1, \dots, v_{m-1})$ di $T_x M$ è positiva. //

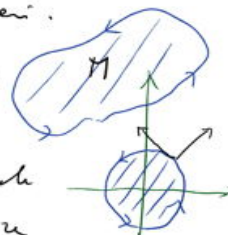
Ex

• $W \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $h: W \rightarrow \mathbb{R}$ funzione nei due pezzi.

Considera $M = \{x : h(x) \leq 0\}$ (chiuso di W):

è varietà su bordo $\partial M = \{x : h(x) = 0\}$.

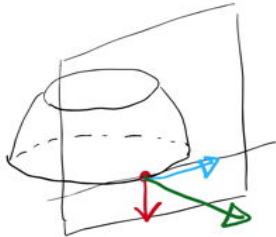
In tal caso, se $x \in \partial M$, il vettore $\nabla h(x)$ è la normale uscente, e l'orientazione di ∂M ne viene di conseguenza (è quella antioraria)



$M = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$
 $\partial M = \{a, b\}$

$(e_1, +1) \sim e_1$
 $(-e_1, -1) \sim e_1$

$M = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, 0 \leq z \leq 1\}$
 $\partial M = \partial M_- \cup \partial M_+$
 $\partial M_- = \{g=0, h_- = -z=0\}$ dove $M = \{g=0, h_- \leq 0\}$
 $\partial M_+ = \{g=0, h_+ = z-1=0\}$ dove $M = \{g=0, h_+ \leq 0\}$



A quel punto dovremo essere in grado di orientare le varietà e, in modo univoco, il loro bordo.

Ritorniamo inoltre che, dato una varietà descritta da una sola parametrizzazione, quella parametrizzazione dà naturalmente un'orientazione alla varietà

Es.

$\gamma(x, y) = (x, y, \sqrt{4-x^2-y^2})$
 $\text{con } (x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$

$J_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$

$\gamma(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \sin \varphi \\ R \sin \theta \sin \varphi \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 $0 \leq \varphi \leq \pi$

$J_\gamma = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \sin \varphi \\ R \cos \theta \cos \varphi & R \sin \theta \cos \varphi \\ 0 & -R \sin \varphi \end{pmatrix}$

Totale: le due parametrizzazioni funzionano entrambe, però danno orientazioni opposte a M (quella uscente e in cui M è visto dal bordo delle palle piene e quella data dalle param. cartesiane, in cui la normale positiva è quella uscente).