Università degli Studi di Padova

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 30/10/2025

Ricordiamo brevemente la nozione e risultati sui CAMPI VETTORIALI.

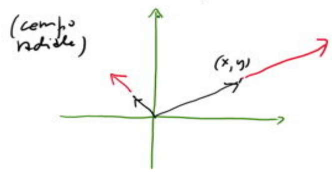
La definizione: dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, un CAMPO VETTORIALE su A è una funzione $F: A \to \mathbb{R}^n$ (ad ogni punto di A associo un vettore di $\mathbb{R}^n$).

Ex. $n=1$

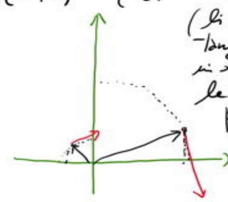
$F: A \to \mathbb{R}$ funzione

$n=2$ $\quad F_1(x,y) = (x,y)$ $\qquad\qquad$ $F_2(x,y) = (y,-x)$

(campo radiale)



(linee di campo, tangenti al campo in ogni punto, sono le circonferenze percorse in senso orario).



Se $\gamma : [a,b] \to A$ di classe $\mathcal{C}^1$, l'INTEGRALE DI LINEA di F lungo γ è

$$\boxed{\int_\gamma F \cdot dx := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt}$$

(Es. se F è un campo di forze, l'integrale di linea calcola il lavoro di F)

Riassumiamo alcune proprietà già viste in Analisi II.

Prop. (a) (INTEGRALE DI LINEA DI UN CAMPO CONSERVATIVO)

Se F è campo conservativo con potenziale $f: A \to \mathbb{R}$ (ovvero $F = \nabla f$)

si ha $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dx = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

In part.: l'integrale di linea di F non dipende dal percorso seguito per andare da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

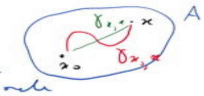
(b) Le sgg. proprietà sono equivalenti:

(i) F è conservativo

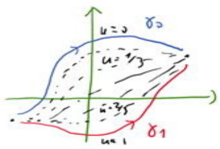
(ii) l'integrale di linea di F dipende solo dagli estremi.

(iii) l'integrale di linea di F lungo un circuito è nullo.

In tali ipotesi, fissato a piacere un punto $x_0 \in A$, un potenziale di F è dato da $f(x) = \int_{\gamma_{x_0,x}} F \cdot dx$ ove $\gamma_{x_0,x}$ è una qualunque curva che va da x_0 a x.



(c) L'integrale di linea di un campo irrotazionale è invariante sia per omotopie di curve a estremi fissati sia per omotopie di circuiti (non necessariamente con punto base fissato).
In particolare: un campo irrotazionale su un A <u>sempl. connesso</u> è conservativo.

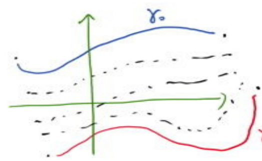


OMOTOPIA: deformazione continua tra cammini

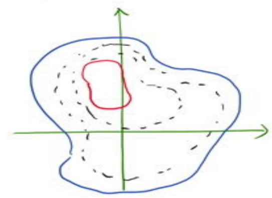
$\Gamma : [\overset{t}{a,b}] \times [\overset{u}{0,1}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continua

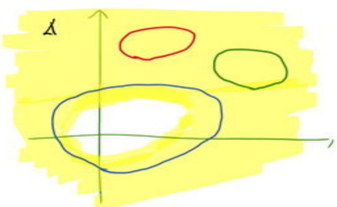
con $\Gamma(t,0) = \gamma_0(t)$, $\Gamma(t,1) = \gamma_1(t)$

(qui si richiede che l'omotopia sia anche a estremi fissati, ovvero $\Gamma(a,u)$ e $\Gamma(b,u)$ non dipendano da u)



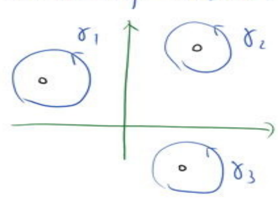
Queste invece sono omotopie a estremi non fissati





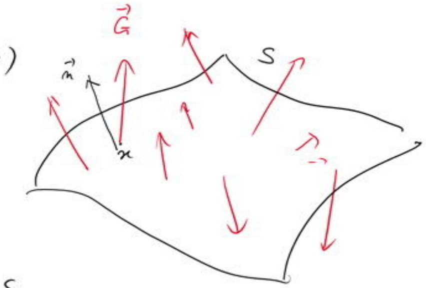
In questo dominio bucato (non semplicemente connesso) il circuito blu non è omotopo agli altri due, che invece lo sono tra loro.

(d) Sia A non sempl. connesso, e si consideri una famiglia massimale di circuiti semplici in A non nullomotopi (non omotopi a una costante) e non omotopi tra loro.
Se un campo irrotazionale ha integrale nullo su ciascuno di questi circuiti, allora esso è conservativo.



FLUSSO DI UN CAMPO ATTRAVERSO UN'IPERSUPERFICIE ORIENTATA

$G : A \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale ($A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto)
$S \subseteq A$ ipersuperficie orientata
$\vec{n}$ versore normale positivo.



Voglio definire una grandezza che descriva "come" e "quanto" il campo G attraversa S.
Essa dovrà dipendere:

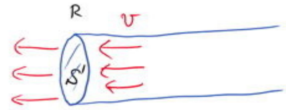
- dall'intensità del campo G;
- dalla estensione di S;
- dalla posizione reciproca di G e S (quanto più G è perpendicolare a S, tanto maggiore sarà l'attraversamento).

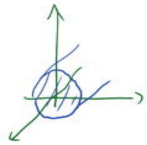
È allora naturale definire il flusso di G attraverso S così:

$$\boxed{\phi_S(G) := \int_S (G \cdot \vec{n})\, d\lambda_S}$$

$\boxed{\text{Ex.}}$ Se G è il campo delle velocità di un fluido (m/sec), e S è superficie di $\mathbb{R}^3$, allora $\phi_S(G)$ è la PORTATA MEDIA del fluido attraverso S (quantità di fluido/unità di tempo, m^3/sec).

Ad esempio, facciamo il caso in un caso semplice:
condotta cilindrica con scorrimento di liquido a velocità costante

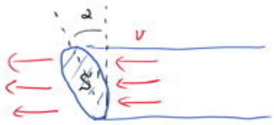
- 

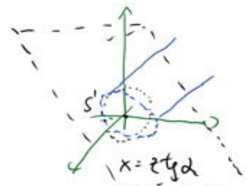


$\vec{G} = v\vec{e}_1$, $\vec{n} = \vec{e}_1$, $\vec{G}\cdot\vec{n} = v$

$\phi_S(\vec{G}) = \int_{\{y^2+z^2 \le R^2\}} v\, dy dz = v \cdot \text{Area}(S) = vR^2\pi$

Ma il flusso (in questo quadro costante) non dovrebbe cambiare con altre sezioni del tubo: vediamone due.

• 



$S' = \{(z\,tg\,\alpha, y, z) : (y,z) \in S\}$

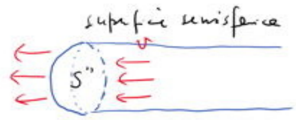
$\vec G = v\vec e_1 \qquad g(x,y,z) = x - z\,tg\,\alpha = 0$

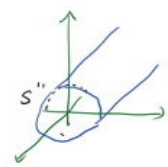
$\nabla g = (1, 0, -tg\,\alpha) \qquad \vec n = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}(1,0,-tg\,\alpha)$ $\quad \cos\alpha$

$\Rightarrow \vec n = (\cos\alpha, 0, -\sin\alpha)$

$\vec G \cdot \vec n = (v,0,0)\cdot(\cos\alpha, 0, -\sin\alpha) = v\cos\alpha \qquad d\sigma = \frac{1}{\cos\alpha}\,dy\,dz$ (VEDERE DOPO)

$$\Phi_{S'}(\vec G) = \int_{S'} (\vec G\cdot\vec n)\cdot d\sigma = \int_S v\cancel{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cancel{\cos\alpha}}\,dy\,dz = vR^2\pi$$

• 



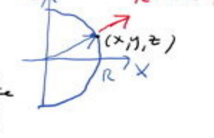
$S'' = \{(R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi)\}$

$-\pi/2 \le \theta \le \pi/2, \quad 0 \le \varphi \le \pi$

$d\sigma = R^2\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi$

$\vec n(x,y,z) = \frac{1}{R}(x,y,z)$ (sulla superficie S'')

$G = v\vec e_1 = (v,0,0)$

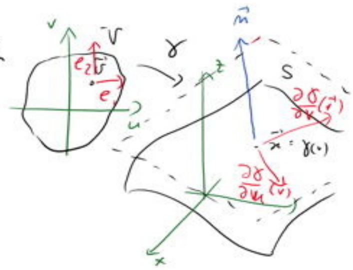


$$\Phi_{S''}(G) = \int_{S''} (G\cdot\vec n)\,d\sigma = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^\pi (v,0,0)\cdot\frac{1}{\cancel{R}}(\cancel{R}\cos\theta\sin\varphi, \cancel{R}\sin\theta\sin\varphi, \cancel{R}\cos\varphi)\cdot R^2\sin\varphi\,d\varphi$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^\pi R^2 v\cos\theta\sin^2\varphi\,d\varphi = R^2 v\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\int_0^\pi \sin^2\varphi\,d\varphi = R^2 v\pi$$

Questi sopra sono in realtà esempi facili, in cui la descrizione di $\vec n$ è intuitiva.
Nella pratica servirà invece una formula che permetta di calcolare il flusso in termini di una descrizione parametrica di S.

Supponiamo che S sia parametrizzata come varietà orientata da $\gamma : V \xrightarrow{\sim} S \subseteq \mathbb{R}^n$ con V aperto di $\mathbb{R}^{n-1}$ con parametro $(v_1, \dots, v_{n-1})$: si intende allora che $\left(\frac{\partial\gamma}{\partial v_1}(v), \dots, \frac{\partial\gamma}{\partial v_{n-1}}(v)\right)$ è una base positiva di $T_{\gamma(v)}S$.



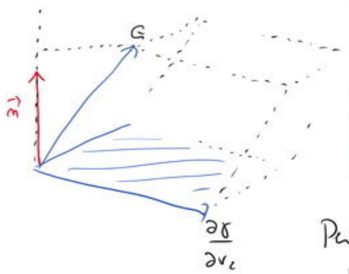
Prop.

$$\Phi_S(G) = \int_V \det\left(G(\gamma(v)), J_\gamma(v)\right)\,dv_1\cdots dv_{n-1}$$

$$= \int_V \det\begin{pmatrix} G_1(\gamma(v)) & & & \\ \vdots & \frac{\partial\gamma}{\partial v_1}(v) & \cdots & \frac{\partial\gamma}{\partial v_{n-1}}(v) \\ G_n(\gamma(v)) & & & \end{pmatrix} dv_1\cdots dv_{n-1}$$

Dim. In $\vec{x} = \gamma(\vec{v})$ sia $\vec{n}(\vec{x})$ il versore normale a S positivo (ovvero $\left(\vec{n}, \frac{\partial \gamma}{\partial v_1}(v), \dots, \frac{\partial \gamma}{\partial v_n}(v)\right)$ è base positiva di $\mathbb{R}^n$).

Si ha allora
$$\underbrace{G(\gamma(v)) \cdot \vec{n}(\gamma(v))}_{\substack{\text{della componente } G \\ \text{sulla direzione} \\ \text{ortogonale a} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial\gamma}{\partial v_{n-1}}}} \underbrace{\sqrt{\det\left(J_\gamma^t J_\gamma\right)}}_{\substack{\text{volume } (n-1)\text{-dim} \\ \text{del parallelepipedo} \\ \text{generato dalle sole} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial\gamma}{\partial v_{n-1}}}} = \underbrace{\det\left(G(\gamma(v)), J_\gamma(v)\right)}_{\substack{\text{volume } n\text{-dim del} \\ \text{parallelepipedo generato da} \\ G, \frac{\partial\gamma}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial\gamma}{\partial v_n}}}.$$

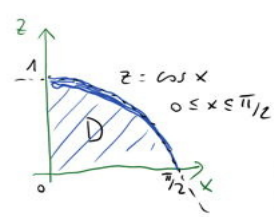


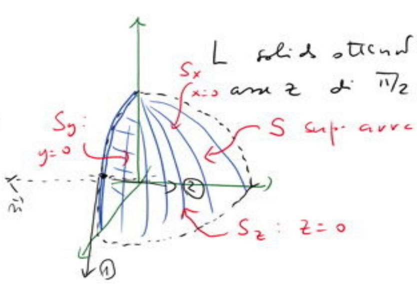
Pertanto, integrando ambo i membri su V ottengo ottengo il risultato. //

Mettiamo bene in evidenza il caso di una superficie in $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_S(G) &= \int_V \det\begin{pmatrix} G_1(\gamma(u,v)) & \frac{\partial\gamma_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\gamma_1}{\partial v}(u,v) \\ G_2(\gamma(u,v)) & \frac{\partial\gamma_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\gamma_2}{\partial v}(u,v) \\ G_3(\gamma(u,v)) & \frac{\partial\gamma_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\gamma_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} du\,dv \\ &= \int_V \left(G(\gamma(u,v)) \times \frac{\partial\gamma}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial\gamma}{\partial v}(u,v) \right) du\,dv.\end{aligned}}$$

Ex.





L solido ottenuto ruotando D attorno asse z di $\pi/2$ in senso antiorario.

Calcoliamo i flussi attraverso S, S_x, S_y e S_z dei due campi

$G_1 = (x, -y, 0)$, $G_2 = (x, y, 0)$.

G_1 e G_2 sono campi orizzontali $\Rightarrow \Phi_{S_z}(G_1) = \Phi_{S_z}(G_2) = 0$

S_y $(y=0)$: G_1 su S_y diventa $(x, 0, 0)$ (parallelo asse x perché le sue componenti y e z sono nulle)

$\Rightarrow \Phi_{S_y}(G_1) = 0$ (perché G_1 su S_y è parallelo a S_y stessa)

Idem per G_2; e idem per S_x, dunque anche $\Phi_{S_x}(G_1) = \Phi_{S_x}(G_2) = 0$

$$S = \Big\{ \overset{\gamma(\rho,\theta)=}{\big(\underset{x(\rho,\theta)}{\rho\cos\theta},\ \underset{y(\rho,\theta)}{\rho\sin\theta},\ \underset{z(\rho,\theta)}{\cos\rho}\big)} : 0 \le \rho \le \pi/2,\ 0 \le \theta \le \pi/2 \Big\}$$

Orientazione applicata: normale uscente

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} = (\cos\theta, \sin\theta, -\sin\rho) \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial\theta} = (-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, 0)$$

$$\Phi_S(G_1) = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \det \begin{array}{c} \\ (x) \\ (-y) \\ (0) \end{array} \begin{pmatrix} \rho\cos\theta & \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 0 & -\sin\rho & 0 \end{pmatrix} d\rho$$

G_1

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\rho \cdot \rho^2 \cos 2\theta \, d\rho = \overbrace{\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta \, d\theta}^{=0} \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\rho \, d\rho = 0$$

$$\Phi_S(G_2) = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \det \begin{array}{c} \\ (x) \\ (y) \\ (0) \end{array} \begin{pmatrix} \rho\cos\theta & \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 0 & -\sin\rho & 0 \end{pmatrix} d\rho$$

G_2

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\rho \, d\rho = \frac{\pi}{2}\Big(-\rho^2\cos\rho + 2\rho\sin\rho + 2\cos\rho\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi(\pi-2)}{2}$$

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (29/08/2016)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2015/16

1. Sia $g(x,y,z) = \log(x+y-z) - x^2 + 2y^2 - 3z^2$.

(a) Quali insiemi di livello di g sono superfici regolari? Detta M la superficie di livello contenente il punto $A(0,1,0)$, mostrare che è possibile esprimere M, all'intorno di A, come grafico di una funzione $z = \varphi(x,y)$. Calcolare poi in due modi il piano tangente a M in A.

(b) Dire per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ il punto A è stazionario in M per la funzione $f(x,y,z) = xy + \alpha y^2 - z$, determinandone la natura (estremante locale o sella).

2. Sia A la porzione del primo quadrante del piano racchiusa dalla curva $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$ (cardioide).

(a) Disegnare A e trovarne il baricentro.

(b) Dire se una tra le funzioni $\frac{x}{y}$ e $\frac{1}{x+y}$ è integrabile su A, se sì calcolando l'integrale.

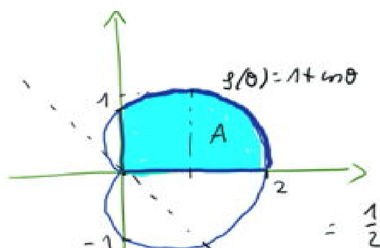
3. Nello spazio cartesiano si consideri il solido $E = \{(x,y,z) : x,y,z \geq 0,\ x+y+z \leq 4,\ x^2+y^2 \geq 1\}$.

(a) Calcolare volume e area totale della superficie esterna di E.

(b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo vettoriale $F = (1,-1,0)$.

(c) Calcolare l'area della base orizzontale di E usando la formula di Green nel piano (x,y).

2. (a)



$$\text{Area}(A) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\rho_2^2(\theta) - \rho_1^2(\theta)\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left((1+\cos\theta)^2 - 0^2\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\theta + 2\sin\theta + \frac{\theta + \sin\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{8} + 1 \sim 2{,}1$$

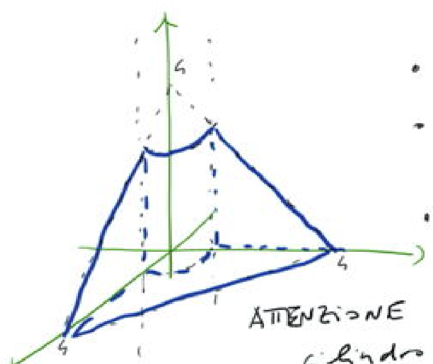
$$x_G = \frac{1}{\text{Area}(A)}\int_A x\,dx\,dy = \frac{8}{3\pi+8}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{1+\cos\theta} \rho\cos\theta \cdot \rho\, d\rho = \frac{8}{3\pi+8}\int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot \frac{(1+\cos\theta)^3}{3}\, d\theta = \ldots$$

(b) le due funzioni x/y e $\frac{1}{x+y}$ sono > 0 su A $\overset{T+F}{\Longrightarrow}$ calcoliamo un integrale iterato su A e vediamo..

$$\int_A \frac{x}{y}\,dx\,dy \overset{\text{(se esiste)}}{=} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{1+\cos\theta} \frac{\cancel{\rho}\cos\theta}{\cancel{\rho}\sin\theta}\cdot\rho\, d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta}\, d\theta \quad \underset{0}{\sim} \frac{4}{\sin\theta} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\theta}$$ Non integrabile

$$\int_A \frac{1}{x+y}\,dx\,dy \overset{\text{(se esiste)}}{=} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{1+\cos\theta} \frac{1}{\cancel{\rho}(\cos\theta+\sin\theta)}\cancel{\rho}\, d\rho = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\, d\theta$$ Converge! (nessun punto di singolarità in $[0,\pi/2]$)

(3)



- $x,y,z \geq 0$ dice che siamo nel I° ottante
- $x+y+z \leq 4$ individua il tetraedro equilatero di lato 4 (nel I° ottante)
- $x^2+y^2 \geq 1$ dice che siamo all'esterno del cilindro

ATTENZIONE: la sezione in alto tra piano e cilindro NON è orizzontale (le punte si trovano più in alto del resto!)

⇝ dunque NON è conveniente ragionare per z-fette.

Inoltre ovviamente NON è un solido di rotazione $\longrightarrow$ NO GULDINO

Converrà senz'altro ragionare per (x,y)-fili sopra la base $D =$  in (x,y).

Volume $= \displaystyle\int_{D} dx\,dy \int_0^{4-x-y} dz = \int_D (4-x-y)\,dx\,dy = \int_{T\ \text{(triangolo)}} (4-x-y)\,dx\,dy - \int_{C\ \text{(cerchio)}} (4-x-y)\,dx\,dy$

$$= \int_0^4 dx \int_0^{4-x} (4-x-y)\,dy - \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (4-\rho\cos\theta-\rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho$$

(x-fili su T) (polari su C)

$$= \int_0^4 \left[(4-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=4-x} dx - \int_0^{\pi/2} \left[2\rho^2 - \frac{\rho^3}{3}(\cos\theta+\sin\theta)\right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 (4-x)^2\,dx - \int_0^{\pi/2} \left(2 - \frac{1}{3}(\cos\theta+\sin\theta)\right) d\theta$$

$$= \left[-\frac{1}{6}(4-x)^3\right]_0^4 - \left(2\theta - \frac{1}{3}(\sin\theta-\cos\theta)\right]_0^{\pi/2} = (0) - \left(-\frac{32}{3}\right) - \left(\pi - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{34}{3} - \pi$$

$$= 34/3 - \pi \sim 8{,}2$$

Ulteriori dettagli nell'allegata risoluzione (pdf).

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (29/08/2016)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2015/16

1. Sia $g(x,y,z) = \log(x+y-z) - x^2 + 2y^2 - 3z^2$.

(a) Quali insiemi di livello di g sono superfici regolari? Detta M la superficie di livello contenente il punto $A(0,1,0)$, mostrare che è possibile esprimere M, all'intorno di A, come grafico di una funzione $z = \varphi(x,y)$. Calcolare poi in due modi il piano tangente a M in A.

(b) Dire per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ il punto A è stazionario in M per la funzione $f(x,y,z) = xy + \alpha y^2 - z$, determinandone la natura (estremante locale o sella).

2. Sia A la porzione del primo quadrante del piano racchiusa dalla curva $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$ (cardioide).

(a) Disegnare A e trovarne il baricentro.

(b) Dire se una tra le funzioni $\frac{x}{y}$ e $\frac{1}{x+y}$ è integrabile su A, se sì calcolando l'integrale.

3. Nello spazio cartesiano si consideri il solido $E = \{(x,y,z) : x,y,z \geq 0,\ x+y+z \leq 4,\ x^2+y^2 \geq 1\}$.

(a) Calcolare volume e area totale della superficie esterna di E.

(b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo vettoriale $F = (1,-1,0)$.

(c) Calcolare l'area della base orizzontale di E usando la formula di Green nel piano (x,y).

Analisi Matematica III – Esame Scritto (29/08/2016) – Soluzioni (fino a (3.a))

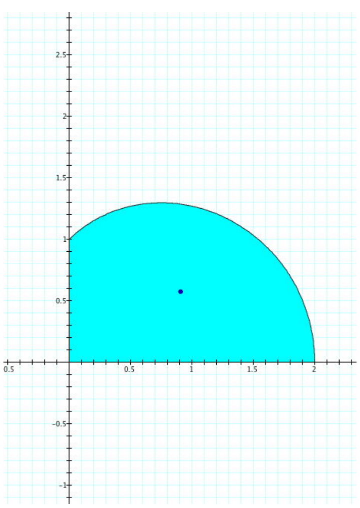
1. (a) La funzione $g(x,y,z) = \log(x+y-z) - x^2 + 2y^2 - 3z^2$ è definita nel semispazio $z < x+y$. Posto per comodità $u = \frac{1}{x+y-z}$, il gradiente $\nabla g(x,y,z) = (u-2x,\ u+4y,\ -u-6z)$ si annulla quando $u = 2x = -4y = -6z$: in particolare $y = -\frac{1}{2}x$ e $z = -\frac{1}{3}x$, e così da $u = 2x$ si ricava $x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$, e dunque il punto $P(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{5}})$ (l'altra soluzione, opposta a P è spuria perché è fuori dal dominio di g). Possiamo concludere che tutte le superfici di livello di g sono superfici regolari tranne quella di livello $g(P) = -\log 2 - \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{2}\log 5 - \frac{1}{2} \sim -0{,}9$ nel punto P. In particolare la superficie di livello M contenente il punto $A(0,1,0)$ (data perciò da $g(x,y,z) = g(A) = 2$) è regolare; si ha $\nabla g(A) = (\frac{\partial g}{\partial x}(A), \frac{\partial g}{\partial y}(A), \frac{\partial g}{\partial z}(A)) = (1,\ 5,\ -1)$, ed essendo $\frac{\partial g}{\partial z}(A) = -1 \neq 0$, grazie a Dini si può effettivamente esprimere M all'intorno di A come grafico di una funzione $z = \varphi(x,y)$, con $\varphi(0,1) = z(0,1) = 0$ e $\nabla\varphi(0,1) = (\dot{z}_x(0,1), \dot{z}_y(0,1)) = (1,5)$. Per uso futuro ricaviamo anche le derivate seconde: derivando rispetto a x e y i due membri dell'identità $g(x,y,z(x,y)) \equiv 2$ otteniamo $(1-\dot{z}_x)u - 2x - 6z\dot{z}_x = 0$ e $(1-\dot{z}_y)u + 4y - 6z\dot{z}_y = 0$ (da cui, calcolando in $(0,1)$, si ha $(1-\dot{z}_{x(0,1)}) = 0$ e $(1-\dot{z}_{y(0,1)}) + 4 = 0$ che danno ancora $(\dot{z}_{x(0,1)}, \dot{z}_{y(0,1)}) = (1,5)$), e derivando ancora rispetto a x e y si ottiene $(-\ddot{z}_{xx}u - (1-\dot{z}_x)^2)u^2 - 2 - 6(\dot{z}_x)^2 - 6z\ddot{z}_{xx} = 0$, $(-\ddot{z}_{xy}u - (1-\dot{z}_x)(1-\dot{z}_y))u^2 - 6\dot{z}_x\dot{z}_y - 6z\ddot{z}_{xy} = 0$ e $(-\ddot{z}_{yy}u - (1-\dot{z}_y)^2)u^2 + 4 - 6(\dot{z}_y)^2 - 6z\ddot{z}_{yy} = 0$ da cui, calcolando in $(0,1)$, si ha $-\ddot{z}_{xx(0,1)} - 2 - 6 = 0$, $(-\ddot{z}_{xy(0,1)}) - 30 = 0$ e $(-\ddot{z}_{yy(0,1)} - 16) + 4 - 150 = 0$, ovvero $\mathsf{H}_z(0,1) = \begin{pmatrix} \ddot{z}_{xx}(0,1) & \ddot{z}_{xy}(0,1) \\ \ddot{z}_{xy}(0,1) & \ddot{z}_{yy}(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -30 \\ -30 & -162 \end{pmatrix}$. Infine, lo spazio tangente affine a M in A è dato da $\nabla g(A) \cdot (x-0, y-1, z-0) = (1,5,-1) \cdot (x, y-1, z) = 0$, cioè $x + 5y - z = 5$; ciò si desume anche dalla forma grafico $z(x,y) = z_{(0,1)} + \nabla z_{(0,1)} \cdot (x-0, y-1)$, cioè $z = 0 + (1,5)\cdot(x, y-1)$ che ridà $z = x + 5y - 5$.

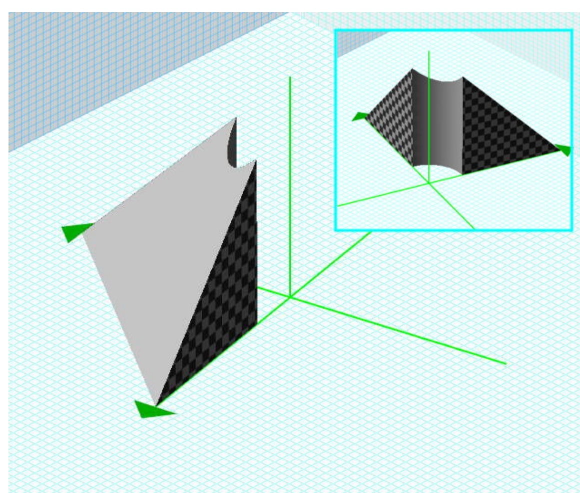
(b) La condizione che il punto A sia stazionario in M per $f(x,y,z) = xy + \alpha y^2 - z$ si scrive, usando Lagrange, chiedendo che $\nabla g(A) = (1,5,-1)$ sia proporzionale a $\nabla f(A) = (1, 2\alpha, -1)$: ciò dà $\alpha = \frac{5}{2}$. Consideriamo poi la funzione composta $F(y,z) := f(x,y,z(x,y)) = xy + \frac{5}{2}y^2 - z(x,y)$: si ha $\nabla F(x,y) = (y - \dot{z}_x,\ x + 5y - \dot{z}_y)$ (da cui $\nabla F_{(0,1)} = (0,0)$, come atteso) e $\mathsf{H}_F(x,y) = \begin{pmatrix} -\ddot{z}_{xx} & 1-\ddot{z}_{xy} \\ 1-\ddot{z}_{xy} & 5-\ddot{z}_{yy} \end{pmatrix}$, da cui $\mathsf{H}_F(0,1) = \begin{pmatrix} 8 & 31 \\ 31 & 167 \end{pmatrix}$, una matrice definita positiva (infatti $8 > 0$ e $\det > 0$): questo mostra che A è un punto di minimo locale stretto per f in M.

2. (a) (Figura 1) La figura piana A racchiusa nel 1o quadrante dalla curva polare $\rho(\theta) = 1+\cos\theta$ ha area data da $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta = \frac{1}{2}[\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+2+\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})) - \frac{1}{2}(0) = \frac{3\pi}{8}+1$. Vale poi[(1)] $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{1+\cos\theta} \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,(1+\cos\theta)^3\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta + 3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta)\,d\theta = \frac{1}{3}[\sin\theta + \frac{3}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta) + 3\sin\theta - \sin^3\theta + \frac{1}{4}(\sin\theta\cos^3\theta + \frac{3}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta))]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{16}+1$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho\sin\theta\,\rho\,d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,(1+\cos\theta)^3\,d\theta = [\frac{1}{12}(1+\cos\theta)^4]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{4}$, da cui $x_G = \frac{5\pi+16}{2(3\pi+8)} \sim 0{,}9$ e $y_G = \frac{10}{3\pi+8} \sim 0{,}6$.

(b) L'insieme A è compatto, ma le funzioni $\frac{x}{y}$ e $\frac{1}{x+y}$ non sono limitate su A; tuttavia, essendo positive su A, per Tonelli e Fubini basterà calcolare un integrale iterato e osservare cosa succede. • L'integrale $\int_A \frac{x}{y}\,dx\,dy$ è finito se e solo se lo è l'integrale iterato (già in variabili polari) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\frac{\rho\cos\theta}{\rho\sin\theta}\,\rho\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta}\,d\theta$; tuttavia, poiché $\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta} \sim^*_{0+} \frac{1}{\theta}$, la funzione non è integrabile su A. • L'integrale $\int_A \frac{1}{x+y}\,dx\,dy$ è finito se e solo se lo è l'integrale iterato $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\frac{1}{\rho\cos\theta+\rho\sin\theta}\,\rho\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\,d\theta$, che dopo la semplificazione per ρ è l'integrale di una funzione continua su $[0,\frac{\pi}{2}]$ e dunque converge. Per il calcolo converrà porre $\psi = \theta+\frac{\pi}{4}$, ottenendo $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos\theta}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1+\cos(\psi-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin\psi}\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\psi+\sin\psi)}{\sqrt{2}\sin\psi}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}+\cos\psi+\sin\psi}{\sin\psi}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\frac{\sqrt{2}}{\sin\psi}+\operatorname{cotg}\psi+1)\,d\theta = \frac{1}{2}[\sqrt{2}\log\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} - \log\sin\psi + \psi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)$ (ricordando che $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$ e dunque $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$).

3. (a) (Figura 2) Calcoliamo il volume di E per (x,y)-fili, tenendo presente che la base B è la differenza tra il triangolo rettangolo $B' = \{(x,y) : x,y\geq 0,\ x+y\leq 4\}$ e il quarto di cerchio $B'' = \{(x,y) : x,y \geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\}$: risulta allora $\operatorname{Vol}E = \int_{B'}(4-x-y)\,dx\,dy - \int_{B''}(4-x-y)\,dx\,dy = \int_0^4 dx\int_0^{4-x}(4-x-y)\,dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1(4-\rho(\cos\theta+\sin\theta))\,\rho\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^4(4-x)^2\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}[2\rho^2 - \frac{1}{3}\rho^3(\cos\theta+\sin\theta)]_{\rho=0}^{\rho=1}\,d\theta = -\frac{1}{6}[(4-x)^3]_0^4 - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-\frac{1}{3}(\cos\theta+\sin\theta))\,d\theta = \frac{32}{3} - [2\theta - \frac{1}{3}(\sin\theta-\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{34}{3}-\pi$. • Per considerazioni di geometria elementare, la già descritta base B ha area $8-\frac{\pi}{4}$; e ciascuna delle facce laterali T_x e T_y, triangoli rettangoli isosceli di lato $4-1=3$ paralleli rispettivamente all'asse x e y, ha area $\frac{9}{2}$. La faccia cilindrica posteriore C, parametrizzata da $(\cos\theta,\sin\theta,z)$ (elemento d'area 1) con $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ e $0\leq z\leq 4-\cos\theta-\sin\theta$, ha area $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{4-\cos\theta-\sin\theta} 1\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(4-\cos\theta-\sin\theta)\,d\theta = [4\theta - \sin\theta+\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = (2\pi-1)-(1) = 2(\pi-1)$. Infine, l'area della faccia anteriore obliqua S si può ricavare da quella di B con la legge del coseno: poiché il vettore normale $(1,1,1) = \sqrt{3}(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ forma con l'asse z un angolo di coseno $\frac{1}{\sqrt{3}}$, l'area di S vale $\sqrt{3}(8-\frac{\pi}{4})$. L'area totale di E è perciò $(8-\frac{\pi}{4}) + 2\cdot\frac{9}{2} + 2(\pi-1) + \sqrt{3}(8-\frac{\pi}{4}) = 15+8\sqrt{3}+\frac{(7-\sqrt{3})\pi}{4}$.





1. Ex. 2. **3.** Ex. 3.

[(1)] Ricordiamo che $\int\cos^3\theta\,d\theta = \int\cos\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta = \sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta + k$ e che $\int\cos^4\theta\,d\theta = \int\cos\theta\cdot\cos^3\theta\,d\theta = \sin\theta\cos^3\theta - \int\sin\theta\cdot 3\,(-\sin\theta)\cos^2\theta\,d\theta = \sin\theta\cos^3\theta + 3\int(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta\,d\theta = \sin\theta\cos^3\theta + \frac{3}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta) - 3\int\cos^4\theta\,d\theta$, da cui $\int\cos^4\theta\,d\theta = \frac{1}{4}(\sin\theta\cos^3\theta + \frac{3}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta))$.